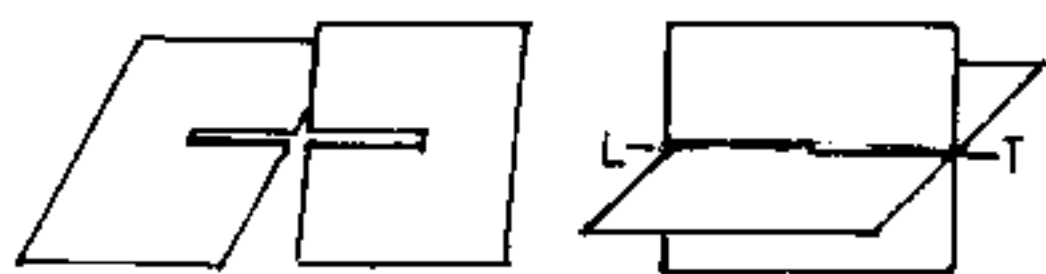


# Elementi di Geometria Descrittiva

## (Proiezioni di Monge)

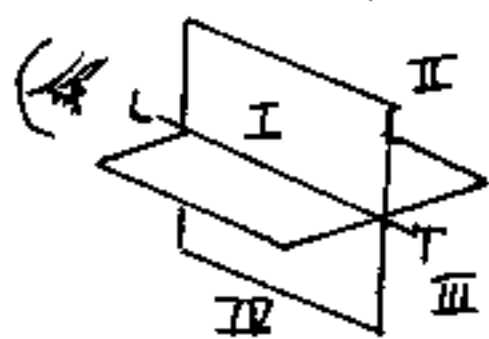
Per una corretta rappresentazione delle grandezze nello spazio tridimensionale, occorre avvalersi della geometria descrittiva. Trattiamo ora le proiezioni di Monge.

Per capire velocemente i metodi della geometria descrittiva, procuriamoci un pezzo di cartone, (per es. la base di un blocco di carta), dividiamolo a metà, ed a metà del taglio, incidiamo perpendicolarmente fino a metà profondità, con spessore pari a quello del cartone. Incastrando sull'in-



cisione i due cartoni, otteniamo la materializzazione dei piani di

proiezione che possono ruotare intorno alla retta comune, detta: linea di terra, (LT). Un cartone lo poniamo orizzontale e rappresenta il primo piano di proiezione, l'altro verticale è il secondo piano di proiezione; perpendicolare alla (LT) sarà il



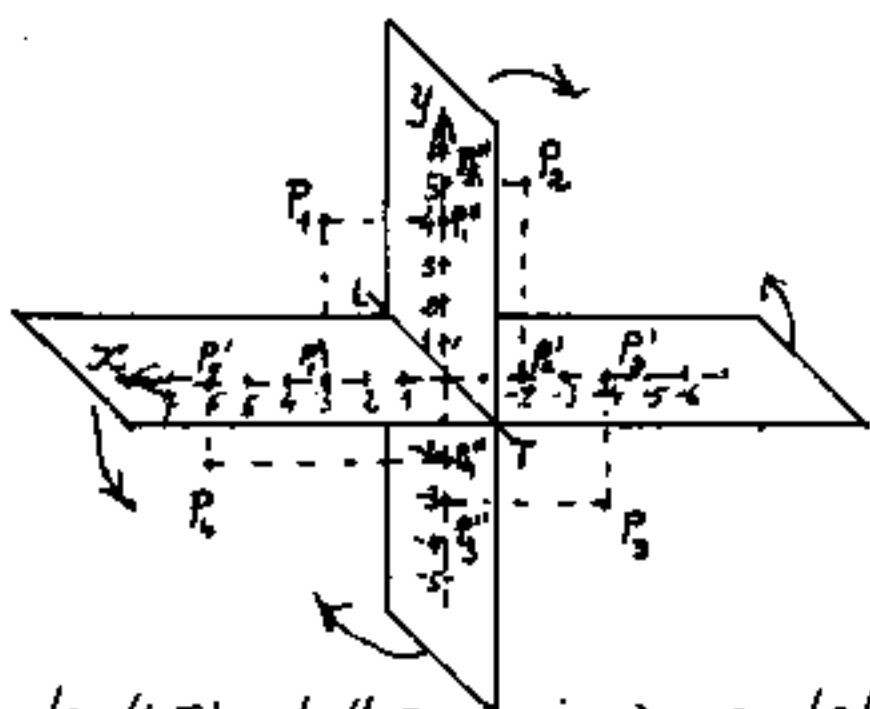
terzo piano di proiezione. Chiameremo:

"I° diedro" quello che si apre all'osservatore, facendo ruotare un cartone; è delimitato

dalla faccia superiore del piano orizzontale, e dalla faccia verso l'osservatore del piano verticale.

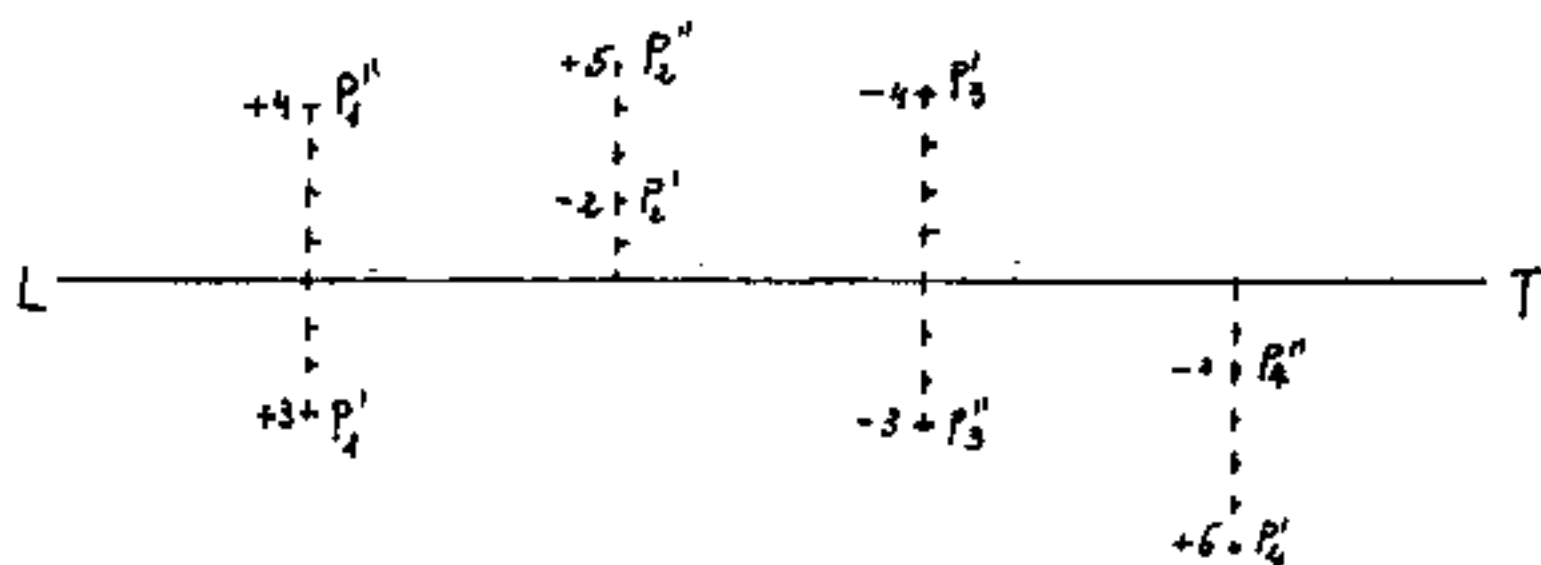
II° diedro, sempre sopra il piano orizzontale, dietro il piano verticale. Sotto il secondo diedro vi è il III° diedro, e sotto il I° diedro vi è il IV° diedro.

Poiché noi disegniamo su un foglio piano, apriamo il I° diedro (che si affaccia all'osservatore), cioè materialmente facciamo ruotare i nostri due cartoni intorno alla linea di terra fino a farli sovrapporre. Vediamo cosa succede alle proiezioni dei punti ubicati nei vari diedri.



Siano:  $P_1, P_2, P_3, P_4$  punti rispettivamente ubicati nel I, II, III, IV; diedro e siano:  $P_1 \equiv (3, 4)$ ;  $P_2 \equiv (-2, 5)$ ;  $P_3 \equiv (-4, -3)$   $P_4 \equiv (6, -2)$ ; questi numeri indicano rispettivamente le distanze

da (LT) della prima e della seconda proiezione, e sarebbe ro le coordinate dei punti per asse  $x$  orizzontale ed asse  $y$  verticale. (In assonometria la  $x$  è verticale). Indichiamo con  $P'$  e  $P''$  rispettivamente la prima e la seconda proiezione di  $P$ , ed aprendo il I° diedro si ha la rappresentazione di Monge.



Si nota che la I<sup>a</sup> proiezione è positiva al disotto della linea di terra, negativa al disopra; che la II<sup>a</sup> proiezione è positiva al disopra della linea di terra, negativa al disotto. Perciò:

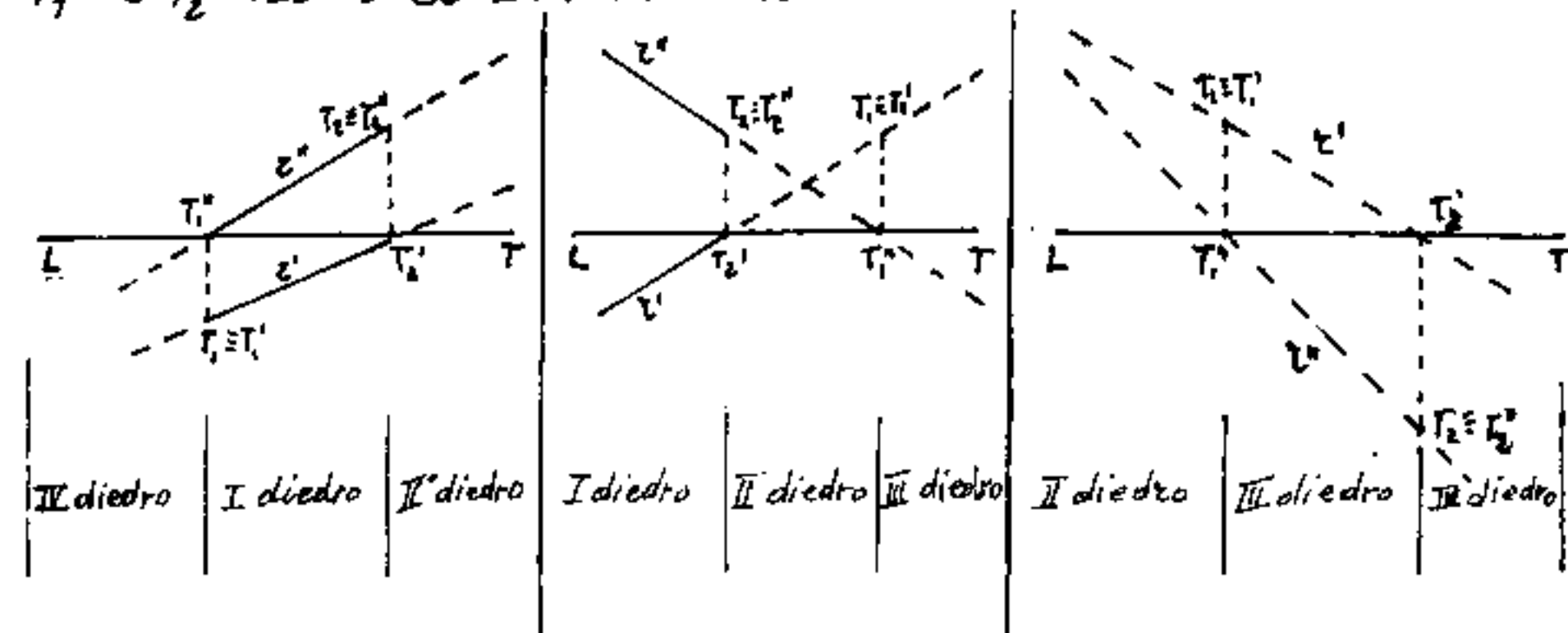
il I<sup>o</sup> diedro avrà: la I<sup>a</sup> proiezione sotto  $\overline{LT}$ , la II<sup>a</sup> sopra.

„ II<sup>o</sup> diedro „ entrambe le proiezioni sopra  $\overline{LT}$

„ III<sup>o</sup> diedro „ invertite le proiezioni del I<sup>o</sup> diedro

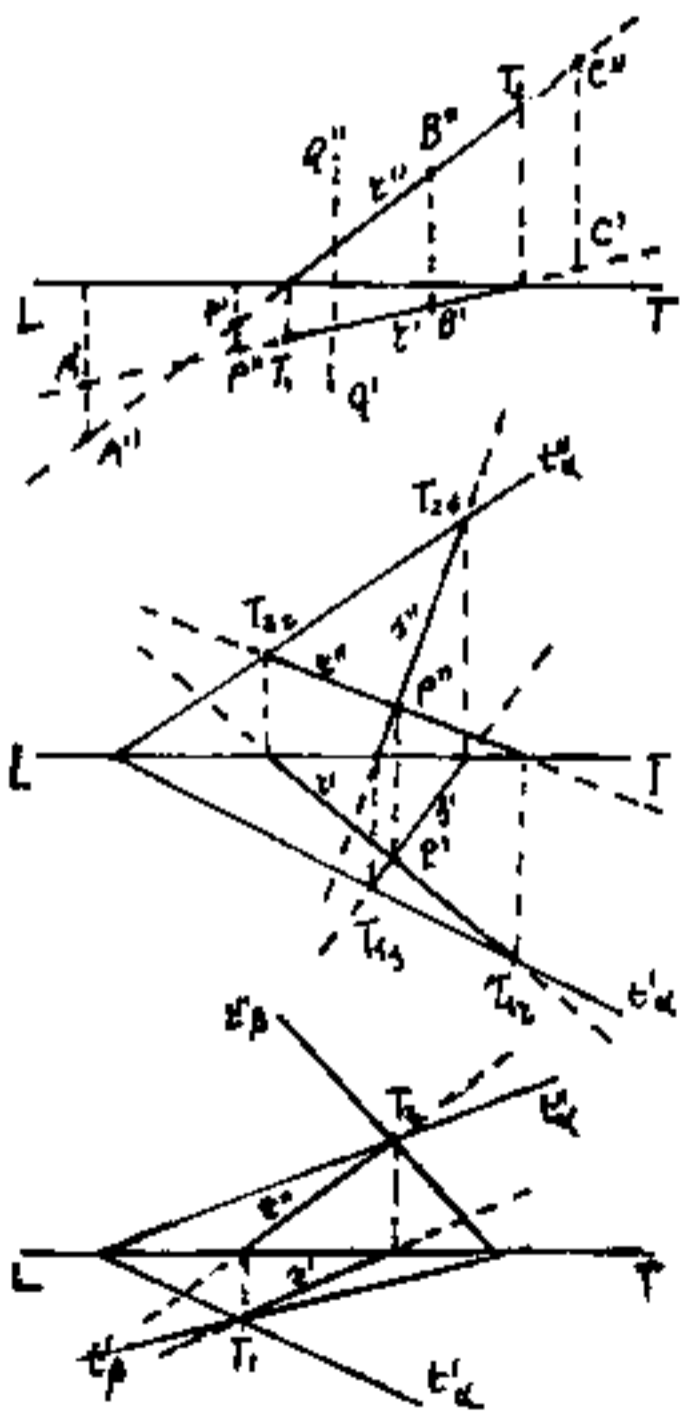
„ IV<sup>o</sup> diedro „ entrambe le proiezioni sotto  $\overline{LT}$ .

Le proiezioni di ogni punto giacciono sulla stessa perpendicolare alla  $\overline{LT}$ . - Per studiare le proiezioni della retta procuriamoci un sottile rigido segmento rettilineo, (per es. un ferro da magliaia), forando con questo i cartoni, facciamogli attraversare tre diedri. Il foro nei cartoni, cioè il punto comune alla retta ed al piano di proiezione si chiama "traccia" della retta e si indica con la lettera  $T$ , avremo  $T_1 = I^a$  traccia sul I<sup>o</sup> piano di proiezione,  $T_2 = II^a$  traccia sul II<sup>o</sup> piano di proiezione.  $T_1 \equiv T_1'$ ;  $T_2 \equiv T_2''$ .  $T_1''$  e  $T_2'$  sono su  $LT$ . Avremo:



## Appartenenza

- 1) Un punto appartiene ad una retta se ha le proiezioni sulle proiezioni omonime della retta.
- 2) Due rette hanno un punto comune (non sono sghembe) se le proiezioni omonime delle due rette si incontrano in due punti che stanno sulla stessa perpendicolare ad  $\overline{LT}$ .
- 3) Un piano taglierà i due piani di proiezione secondo due rette (dette tracce) che si incontrano su  $\overline{LT}$  e si indicano con  $t'_\alpha, t''_\alpha$ . (tracce del piano  $\alpha$  sul I° e II° piano)
- 4) Le rette che appartengono ad un piano, hanno le tracce sulle tracce omonime del piano
- 5) I punti comuni alle tracce omonime di due piani sono le tracce omonime della retta comune.



Nella figura:  $A, B, C$  appartengono alla retta  $r$ ;  $P$  e  $Q$  non appartengono ad  $r$  (Perché  $Q$  non ha le proiezioni su quelle della retta, e  $P'$  è  $t''_\alpha$  e  $P''$  è  $t'_\alpha$ ).

Le rette  $r$  ed  $s$  appartengono ad  $\alpha$  ed hanno il punto  $P$  in comune.

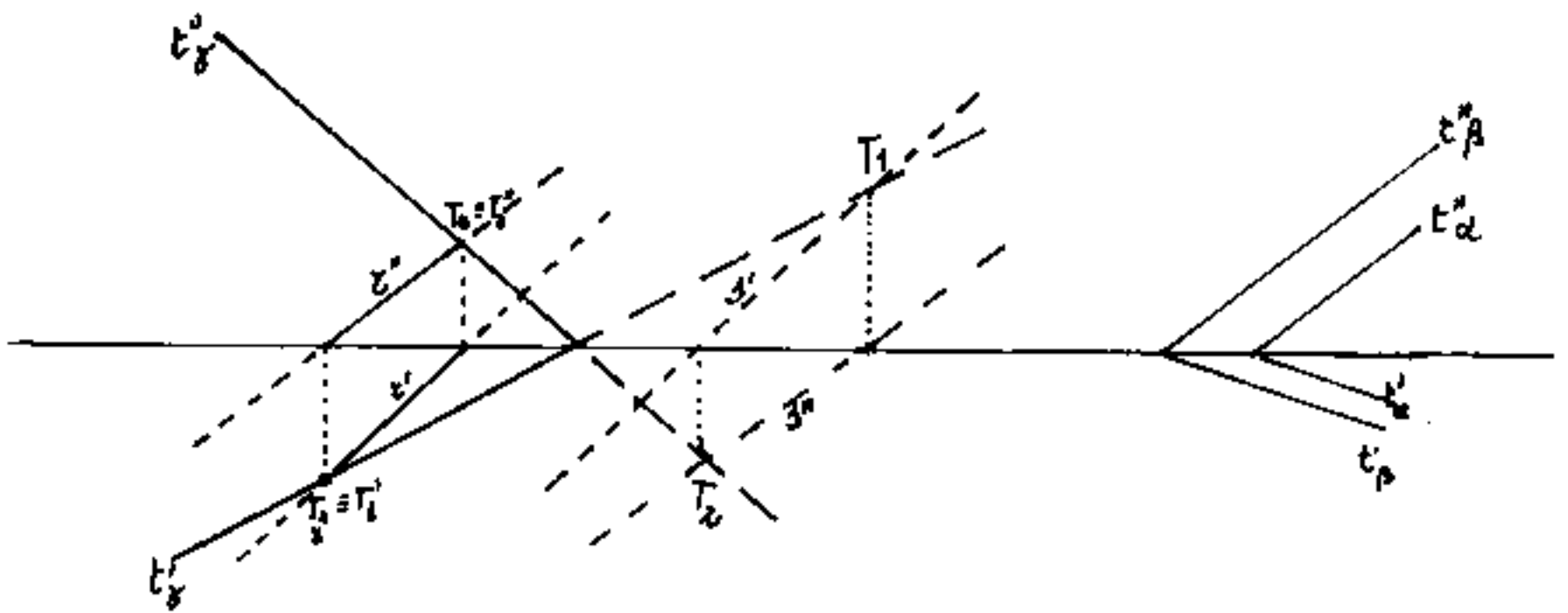
Se due rette si incontrano in  $P$  determinano il piano comune  $\alpha$ .

La retta  $r$  è comune ai piani  $\alpha$  e  $\beta$ , è la loro intersezione. (Le tracce omonime per  $T_1$  e per  $T_2$ ). ( $P$  su  $\alpha$ )

- 6) Un punto appartiene ad un piano se appartiene ad una retta del piano.

# Condizioni di parallelismo

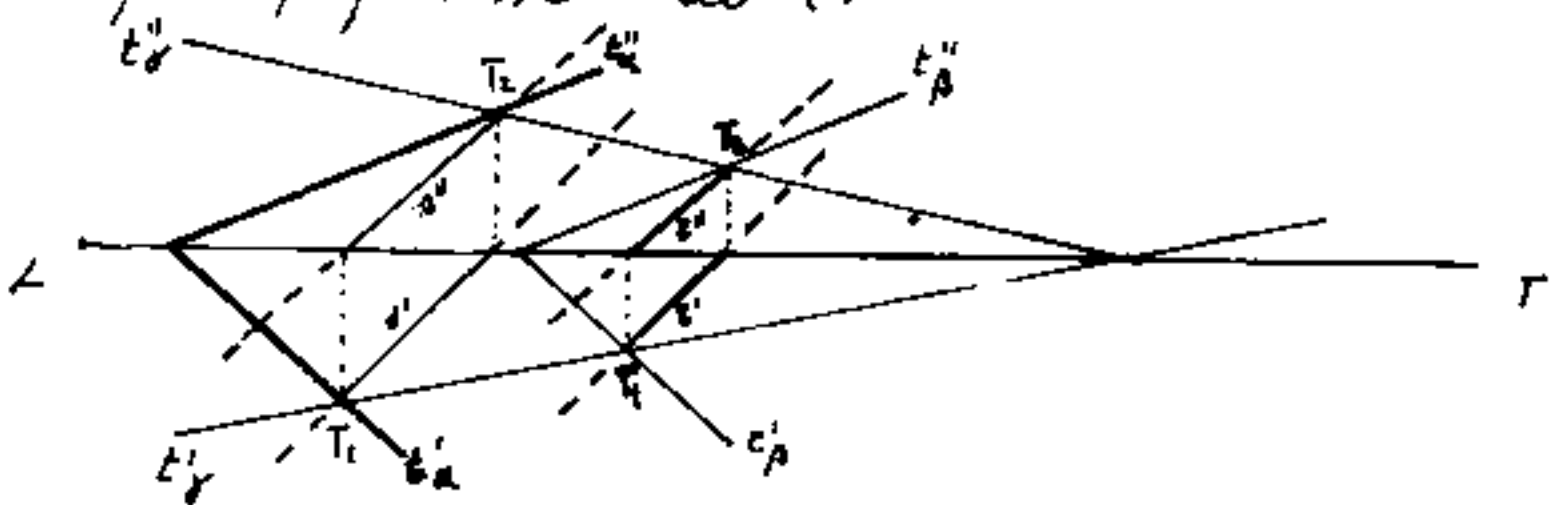
- 1) Due rette sono parallele, se hanno le proiezioni omonime parallele.
- 2) Due piani sono paralleli, se hanno le tracce omonime parallele.
- 3) Una retta è parallela ad un piano se appartiene ad un piano parallelo.



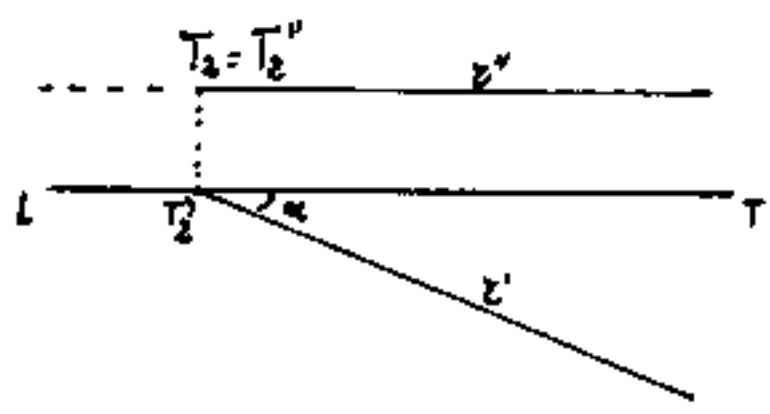
La retta  $r$  che attraversa il I° diedro e la retta complanare  $s$  che non attraversa il primo diedro sono parallele.

I piani  $\alpha$  e  $\beta$  sono paralleli.

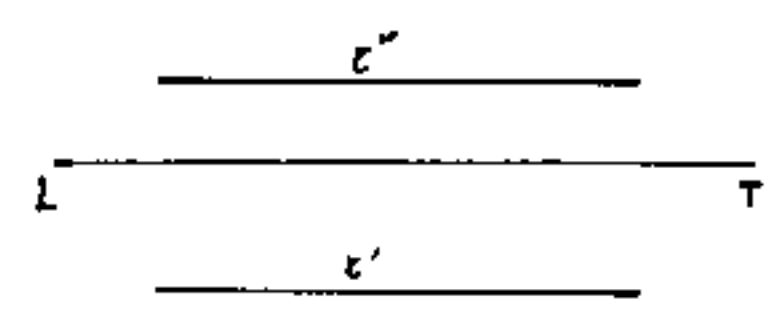
Per verificare se una retta  $r$  ed un piano  $\alpha$  sono paralleli, per la retta  $r$  tracciamo un qualsiasi piano  $\gamma$  la retta  $s$  intersezione di  $\alpha$  con  $\gamma$  sarà parallela ad  $r$  e per  $r$  passiamo tracciamo il piano  $\beta$  parallelo ad  $\alpha$ .



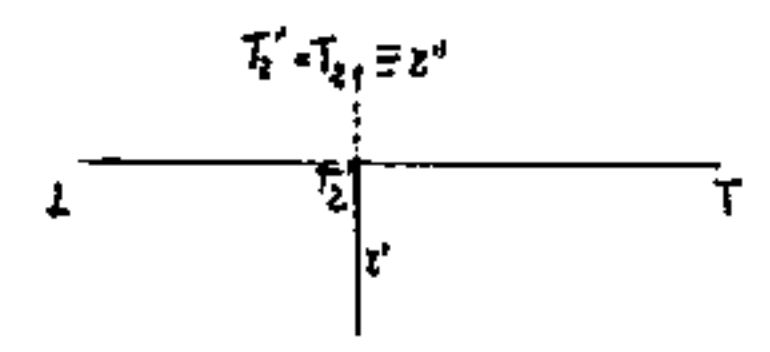
# Rappresentazione di enti particolari



Retta orizzontale (inclinata di  $\alpha$  sul secondo piano.)



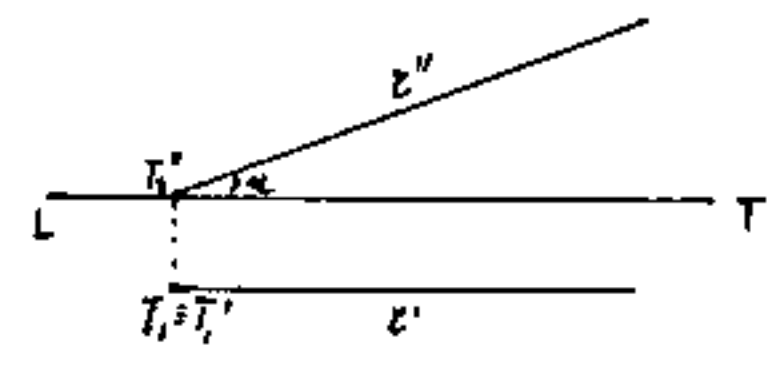
Retta parallela ad LT



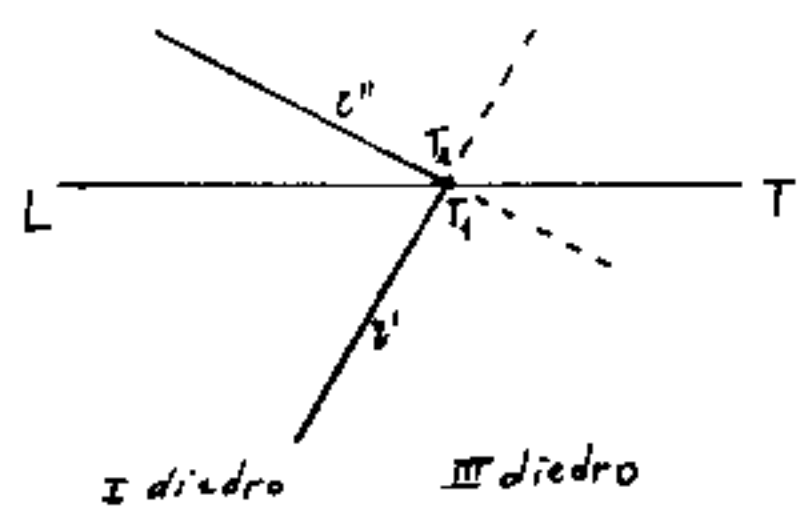
Retta proiettante in seconda proiezione



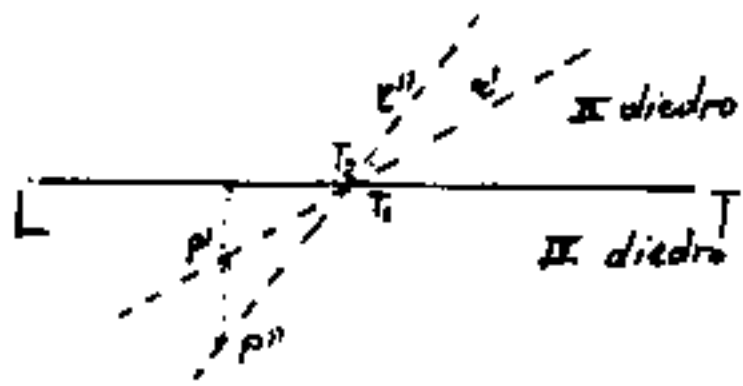
Retta proiettante in prima proiezione



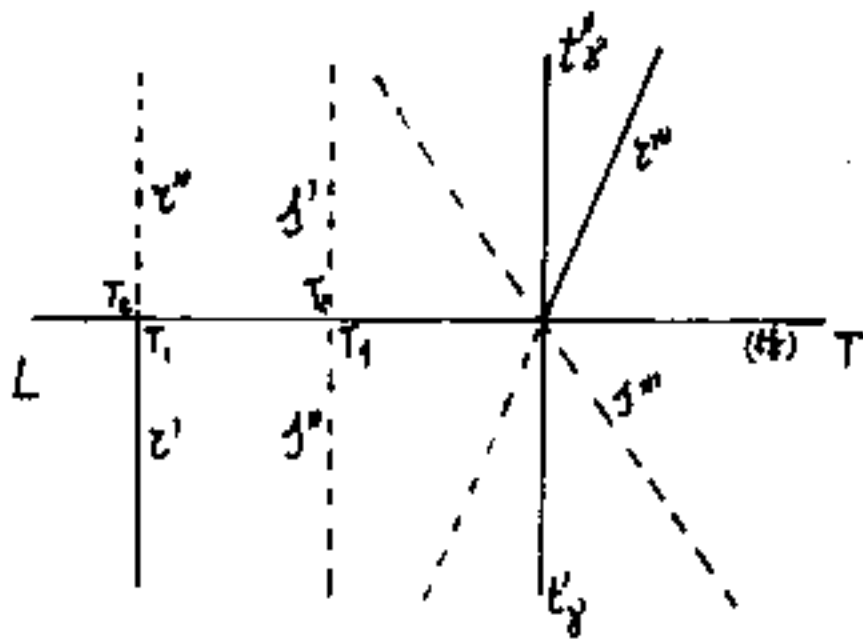
Retta parallela al secondo piano di proiezione ed inclinata di  $\alpha$  sull'orizzontale



Retta passante per LT  
 $T_1$  e  $T_2$  coincidono. Per determinare l'inclinazione sull'orizzontale occorre avvalersi di un piano proiettante.



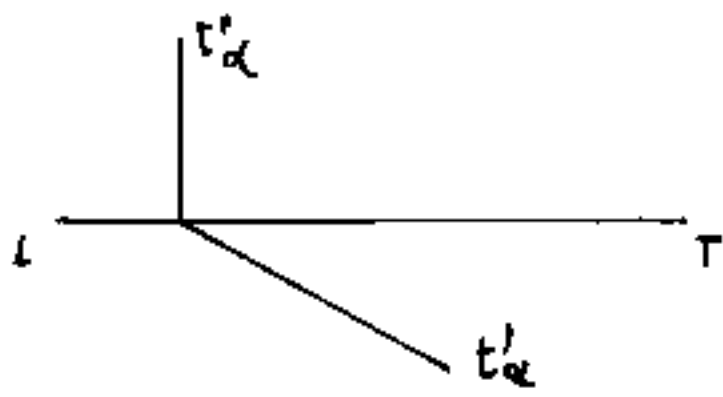
Retta per LT attraverso il II ed il IV diedro. Notare le inclinazioni delle proiezioni per poter prendere proiezioni di punti.



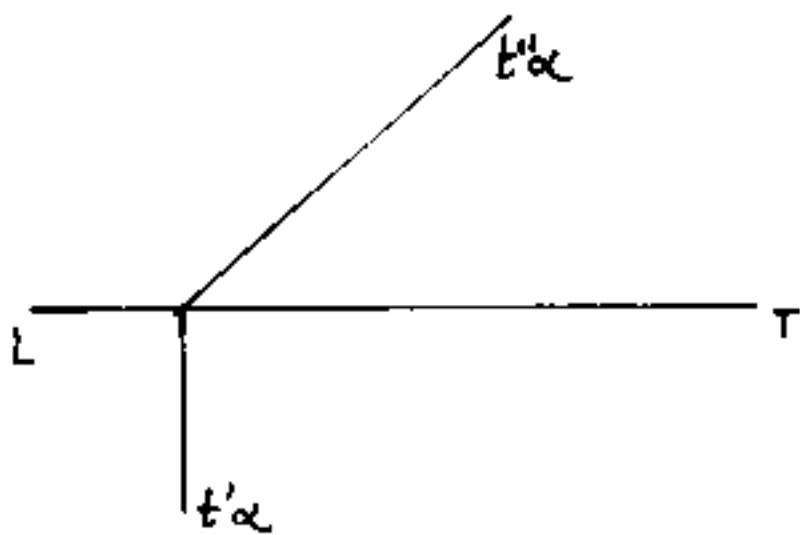
Rette perpendicolari ad LT, passanti per I e III diedro e per II e IV diedro (Il terzo piano di proiezione consente di vedere l'inclinazione)

Ricordiamo che su un piano comunque inclinato, c'è sempre un insieme di rette orizzontali e perpendicolarmente ad esse c'è l'insieme delle rette di massima pendenza. Solo se il piano di giacitura è verticale le rette di massima pendenza diventano rette verticali. In altre parole, in ogni piano vi sono infinita rette orizzontali mentre le rette verticali esistono solo su pianiverticali.

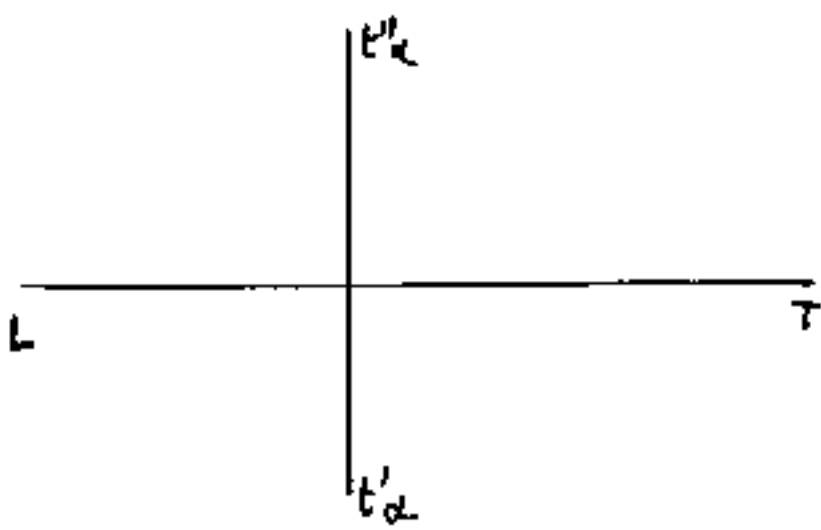
Si noti quindi che i termini: "verticale" ed "orizzontale" non possono scambiarsi, mentre è possibile scambiare gli assi cartesiani di riferimento. Ogni retta verticale è asse di un fascio di piani verticali.



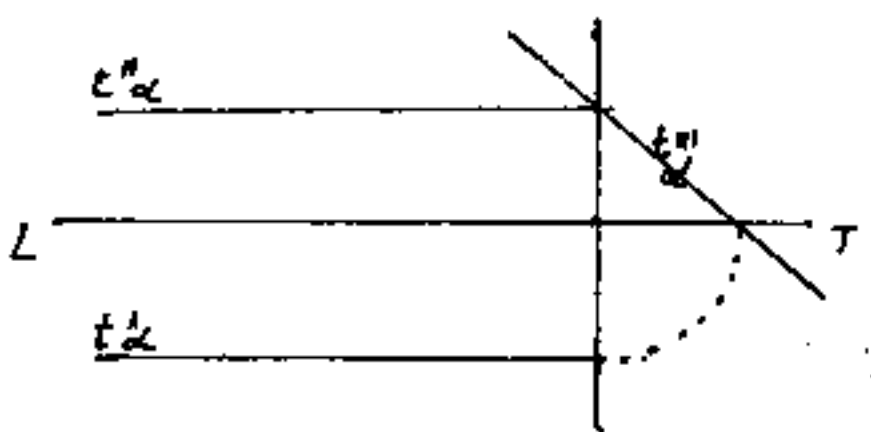
Piano proiettante in prima proiezione  
proiezione (È un piano verticale, le figure su esso si proiettano sulla 1<sup>a</sup> traccia) (in prima proiezione)



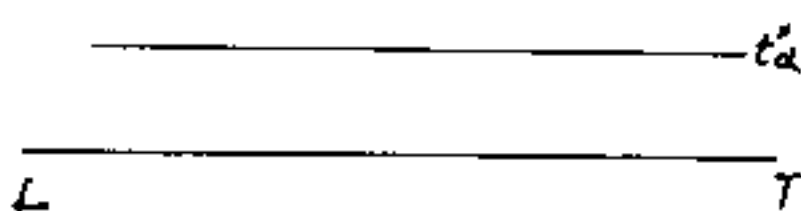
Piano proiettante in seconda proiezione  
proiezione (Le figure su di esso si proiettano sulla 2<sup>a</sup> traccia) (in seconda proiezione)



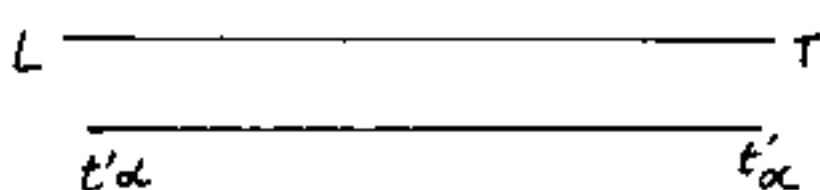
Piano di profilo (È un piano verticale, perpendicolare ad LT, le figure su di esso si proiettano sulle tracce, in 1<sup>a</sup> e in 2<sup>a</sup> proiezione è il terzo piano di proiezione)



Piano parallelo alla linea di terra (LT) rappresentato anche con la terza traccia.

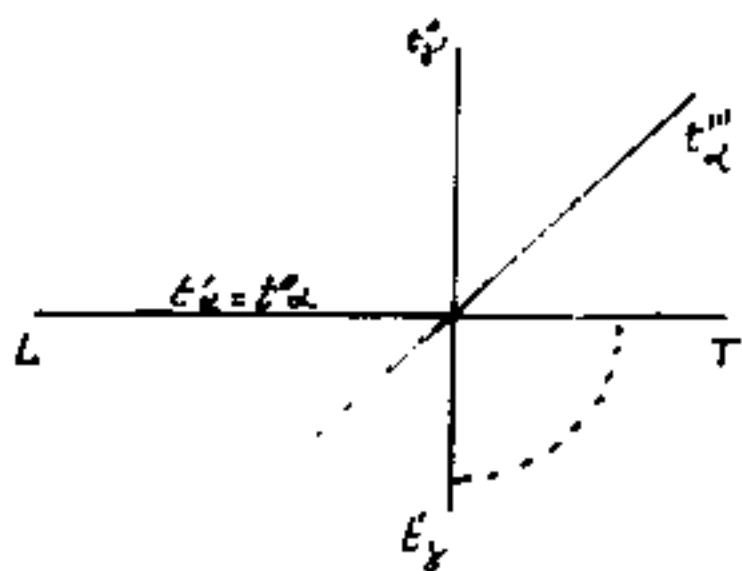


Piano orizzontale (la prima traccia è all'infinito)



Piano verticale parallelo al secondo piano di proiezione (la seconda traccia è all'infinito)



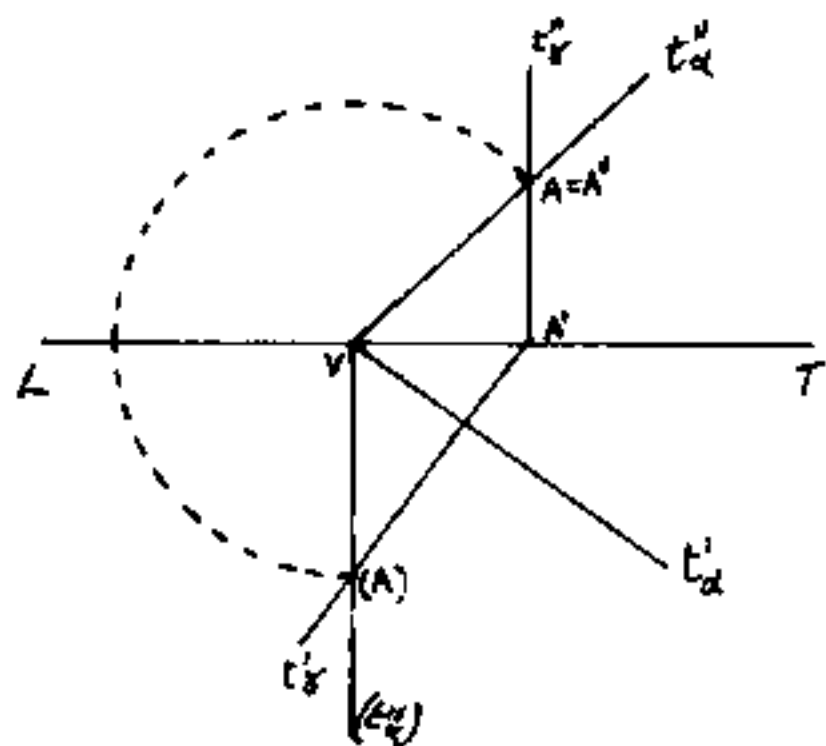


Per rappresentare un piano passante per la linea di terra (LT) è necessario il III piano di proiezione.

## Le vere grandezze

In geometria descrittiva vi sono due operazioni di notevole importanza in quanto consentono di disegnare in vera grandezza i segmenti visti "di scorcio" nelle proiezioni. - Esse sono: "Il ribaltamento del piano" e "La rotazione della retta". Il primo consiste nel ribaltare il piano su uno dei piani di proiezione, in tal modo le figure su tale piano si vedranno in vera grandezza sul piano di proiezione ove si è ribaltato. La rotazione della retta consiste nel renderla parallela ad un piano di proiezione, in tal modo i segmenti staccati sulla retta ruotata si proietteranno in vera grandezza sul piano di proiezione parallelo.

## Il ribaltamento del piano



Vogliamo ribaltare il piano  $\alpha$  sul primo piano di proiezione; assumiamo come asse di rotazione la sua prima traccia  $t'_\alpha$ , tutti i punti del piano, nella rotazione, descriveranno circonferenze su

piani perpendicolari all'asse; tracciamo quindi il piano  $\delta$  proiettante in prima proiezione ed avente  $t'_\delta$  perpendicolare a  $t'_\alpha$  (quindi il piano  $\delta$  è perpendicolare a  $t'_\alpha$ ). Il punto  $V$  comune alle due tracce di  $\alpha$  è certamente un punto di  $\alpha$  che non si sposterà nel ribaltamento perché appartenente all'asse di rotazione ( $t'_\alpha$ ). Il punto  $A$  comune alle seconde tracce di  $\alpha$  e  $\delta$  appartiene ad entrambi i piani. Il segmento  $\overline{VA}$  giacente sul II° piano di proiezione è già in vera grandezza, ed è il raggio della circonferenza che traccerà  $A$  sul piano  $\delta$  nel ribaltamento.

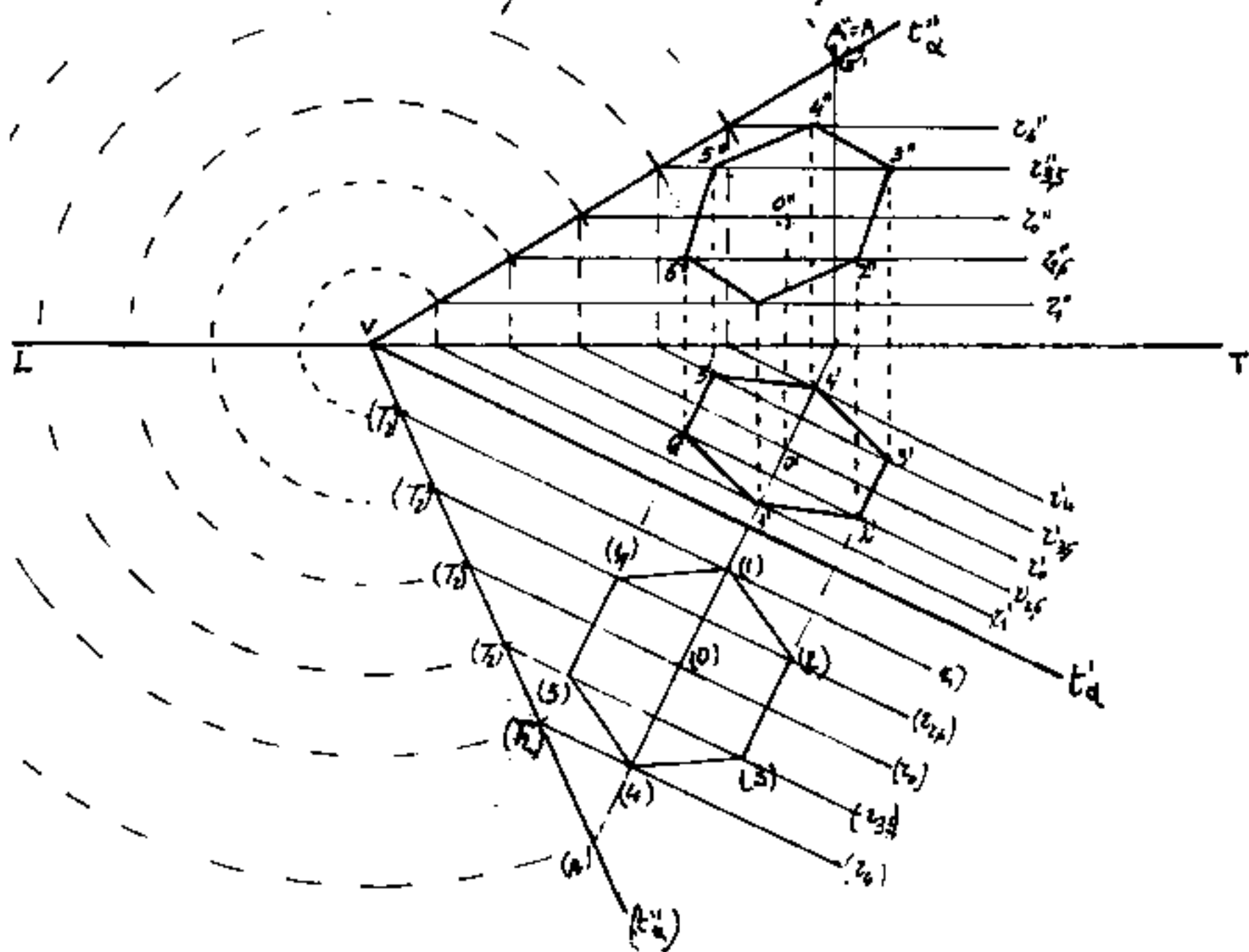
$\overline{VA}$  rimane costante a ribaltamento avvenuto, cioè quando tutto il piano  $\alpha$  coinciderà col primo piano di proiezione e quindi  $A$  sarà finito in  $(A)$  sulla prima traccia di  $\delta$  ove:  $\overline{VA} = \overline{V(A)}$ . (Elementi ribaltati si indicano in parentesi). ( $\delta$  è detto piano ausiliario)

Una volta ribaltato il piano, possiamo disegnarci in vera grandezza una figura qualsiasi, (per esempio un esagono) quindi riportando il piano nella sua primitiva posizione possiamo vedere come le proiezioni deformano la figura. (L'esagono proiettato non sarà più regolare). Per eseguire le proiezioni della figura, ci si avvale del fatto che rette parallele all'asse di rotazione, rimangono parallele nel

ribaltamento, e poiché il nostro asse (prima traccia) è orizzontale, tali rette saranno orizzontali. Quindi nel ribaltamento, ciascun punto della figura, e del piano  $\alpha$  rimarrà su un piano perpendicolare all'asse di rotazione e su una retta parallela a tale asse.

### Esempio

Tracciato su  $\alpha$  e ribaltato l'esagono regolare: 1, 2, 3, 4, 5, 6; per ciascun punto tracciamo le rette perpendicolari e parallele all'asse; le prime sono anche le tracce dei piani  $\delta$ , le seconde avranno le tracce ribaltate ( $t_2$ ) su ( $t'_\alpha$ ) e la loro distanza da  $V$  resta invariata nel ribaltamento per cui è facile tracciare le proiezioni delle rette parallele all'asse ed orizzontali da cui le proiezioni dei punti.

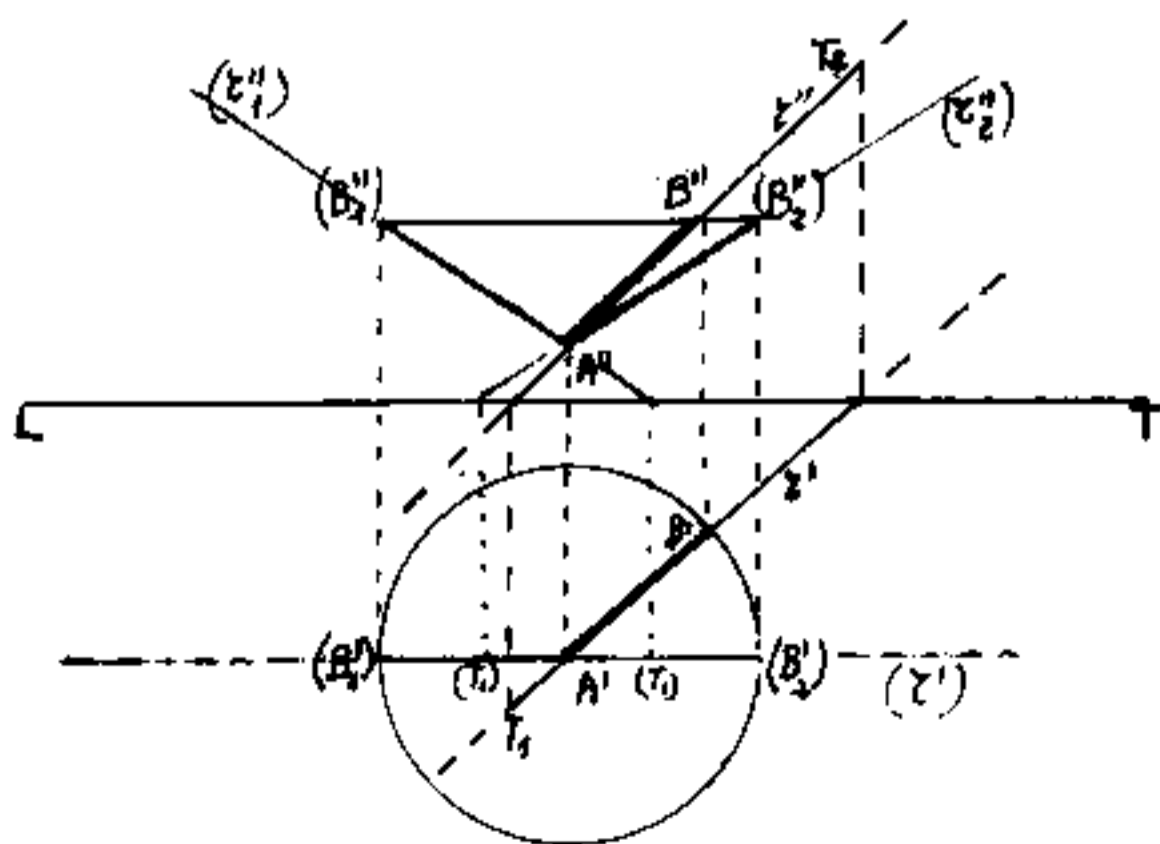


# Rotazione della retta

Se vogliamo la vera grandezza di un segmento  $\overline{AB}$  di cui conosciamo le proiezioni, basta rendere parallela ad un piano di proiezione la retta su cui giace il segmento, in quella proiezione ogni segmento della retta si proietterà in vera grandezza. A tal fine basta ruotare un segmento di retta, che nella rotazione descriverà una superficie conica.

## Esempio

Il segmento  $\overline{AB}$  della retta è vogliamo renderlo parallelo al 2° piano di proiezione. L'asse di rotazione deve essere verticale, e la faremo passare per  $A$ , in tal modo le proiezioni di  $A$  resteranno immutate nella rotazione, mentre  $B$  descriverà una circonferenza e  $B''$  un segmento orizzontale pari al diametro della circonferenza:  $(B_1'')(B_2'')$  mentre:  $\overline{A''(B_2'')} = \overline{A''B_2''} = \underline{\text{vera grandezza di } \overline{AB}}$ .

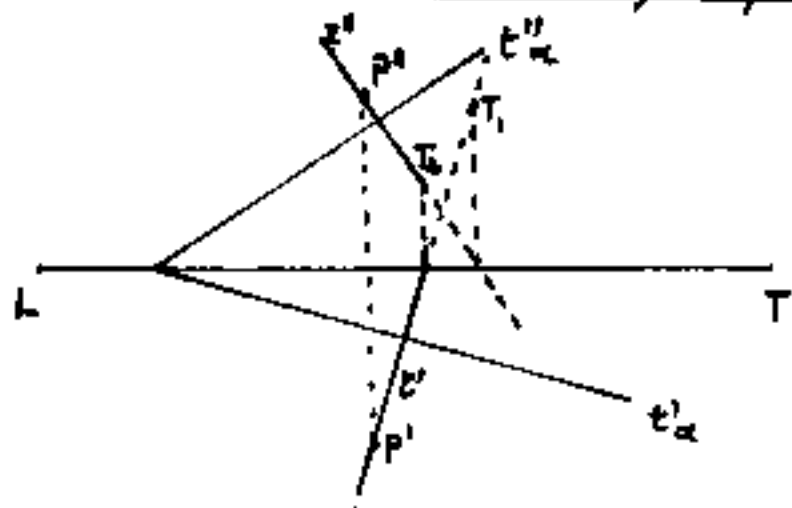


Spesso l'asse di rotazione si fa passare per  $T_1$  (prima traccia della retta).

# Condizioni di perpendicolarità

- 1) Una retta è perpendicolare ad un piano quando le proiezioni della retta sono perpendicolari alle tracce omonime del piano
- 2) Due rette sono perpendicolari quando, incontrandosi, una appartiene ad un piano perpendicolare all'altra.
- 3) Due piani sono perpendicolari quando ciascuno di essi contiene rette perpendicolari all'altro.

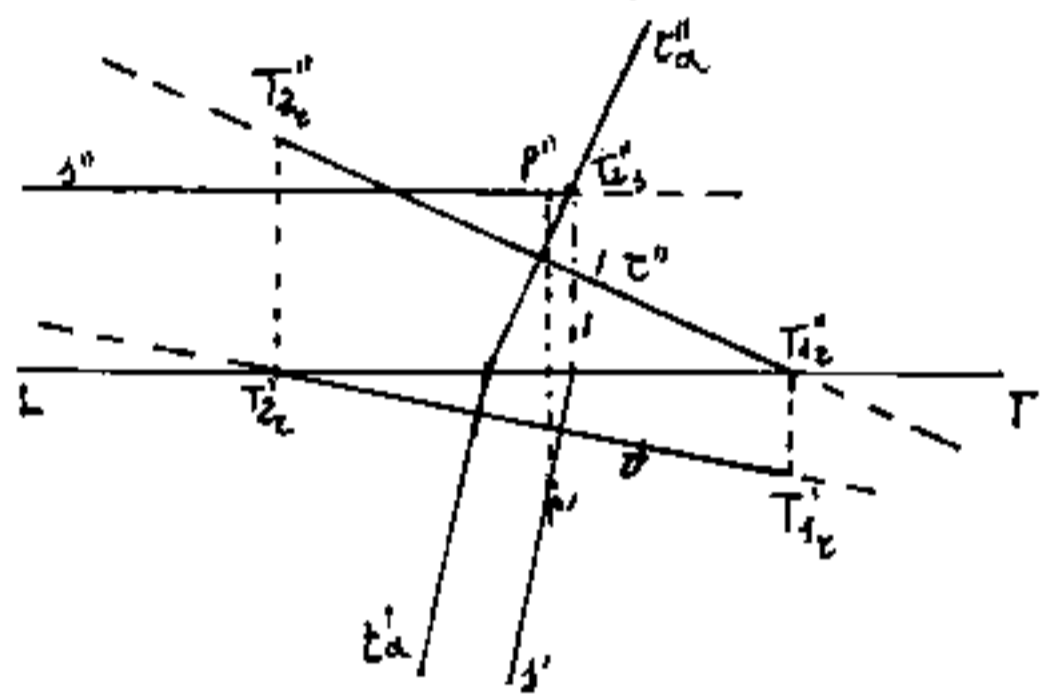
È da notare che solo la 1) condizione è direttamente eseguibile. "Per esempio: per il punto P tracciare la retta perpendicolare al piano  $\alpha$ ".



Più complesso il problema: "per il punto P tracciare il piano perpendicolare alla retta r."

È facile tracciare un piano  $\alpha$  qualsiasi perpendicolare ad  $r$ , ed è facile intuire che il piano per  $P$  sarà parallelo ad  $\alpha$ . Ogni piano ha infinite rette orizzontali che hanno la caratteristica di avere la seconda proiezione parallela alla linea di terra e la prima proiezione parallela alla traccia del piano cui appartiene, ( $T_1 \rightarrow \infty$ ); perciò se per  $P$  facciamo

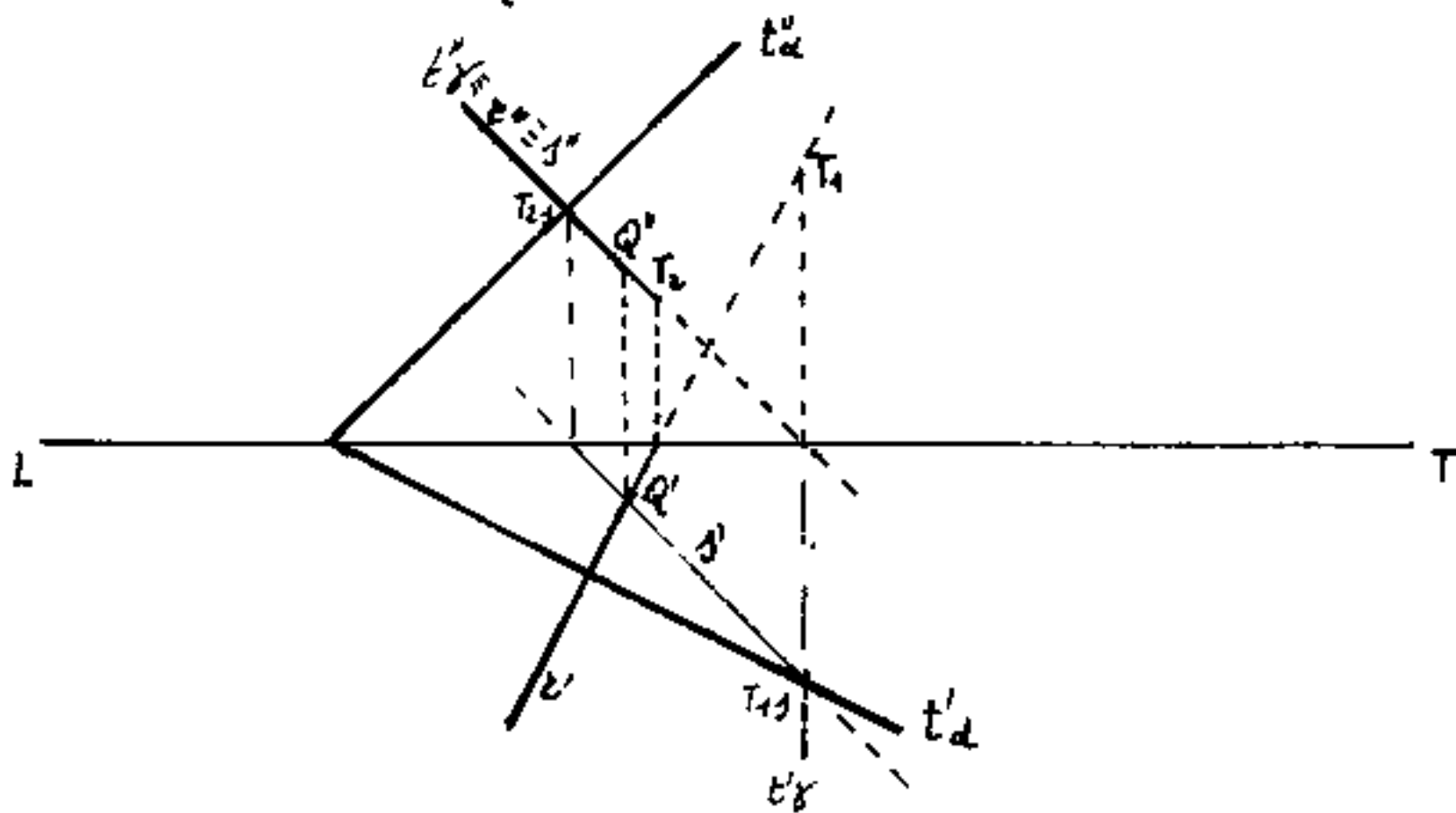
passare una retta orizzontale che abbia la prima proiezione perpendicolare alla prima proiezione della retta data; anche il piano che passa per la retta orizzontale conterrà  $P$  e se poniamo  $t''_\alpha$  (passante per  $T_2$ ) perpendicolare ad  $\tau''$   $t''_\alpha$  dovendo essere parallelo alla prima proiezione della retta orizzontale sarà perpendicolare ad  $\tau'$  e quindi  $\alpha$  contiene  $P$  ed è normale ad  $\tau$ .



La seconda condizione porta il problema:  
"Per  $P$  tracciare una retta perpendicolare ad una data retta  $\tau$ ."

Notiamo che se una retta  $\tau$  ed un piano  $\alpha$  sono perpendicolari, tutti i piani passanti per  $\tau$  sono perpendicolari ad  $\alpha$  e tutte le rette giacenti su  $\alpha$  e passanti per il punto  $Q$  comune ad  $\tau$  ed  $\alpha$  sono perpendicolari ad  $\tau$ . Questa osservazione è la base per i problemi di perpendicolarità, quindi data una retta  $\tau$

ed un piano  $\alpha$ , fra loro perpendicolari, per trovare il punto  $Q$  in cui  $\tau$  attraversa  $\alpha$ , basta prendere un piano ausiliario  $\delta$  passante per  $\tau$  (e quindi sarà perpendicolare ad  $\alpha$ ) che avrà in comune con  $\alpha$  una retta  $s$  (anche questa perpendicolare ad  $\tau$ ) il punto comune alle rette  $\tau$  ed  $s$  è  $Q$ .

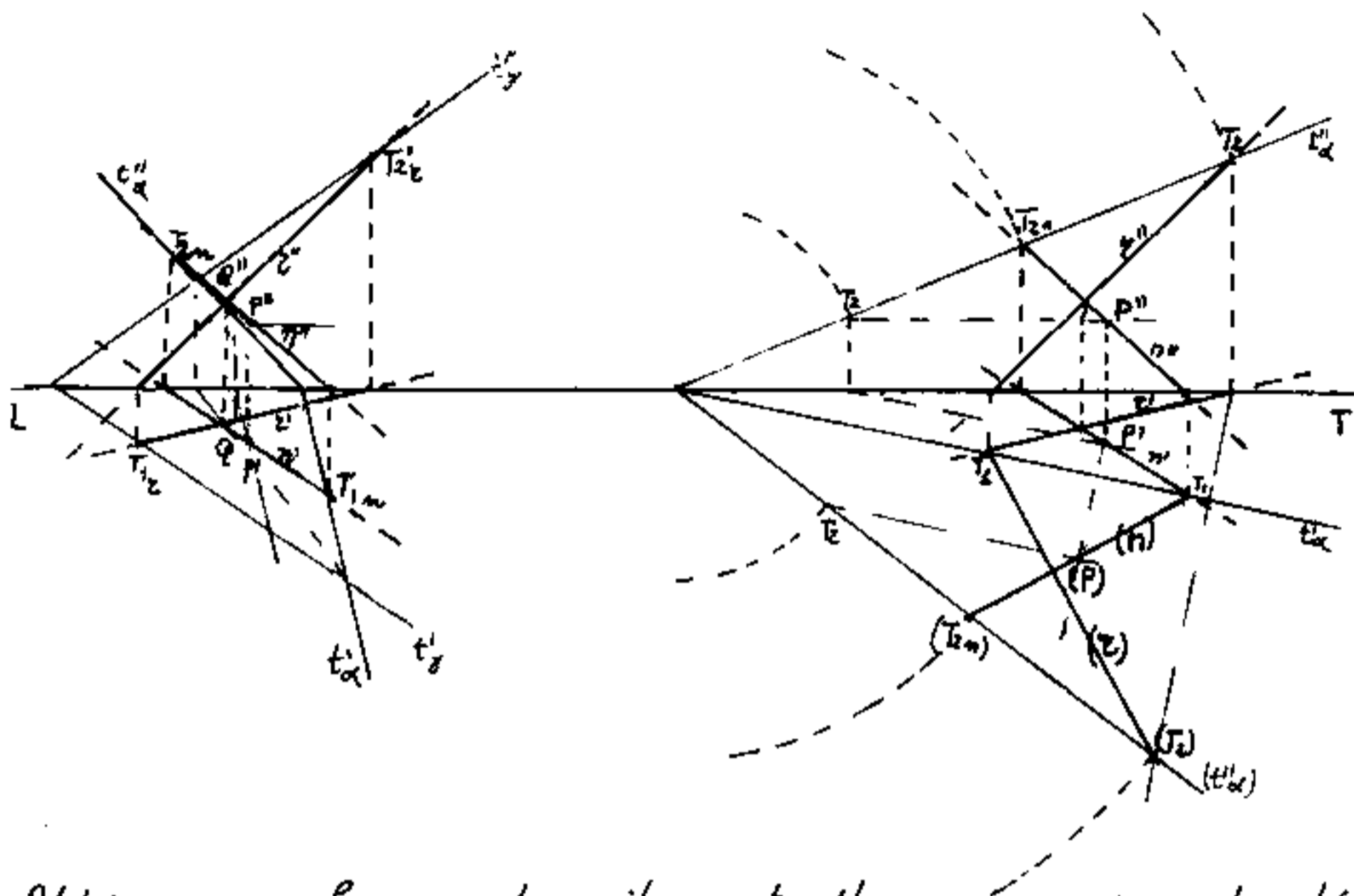


Per alleggerire il disegno, il piano  $\delta$  si è preso proiettante in seconda proiezione.

Possiamo ora tornare al nostro problema:

"Dati  $P$  ed  $\tau$ , per  $P$  tracciare la retta normale ad  $\tau$ ".

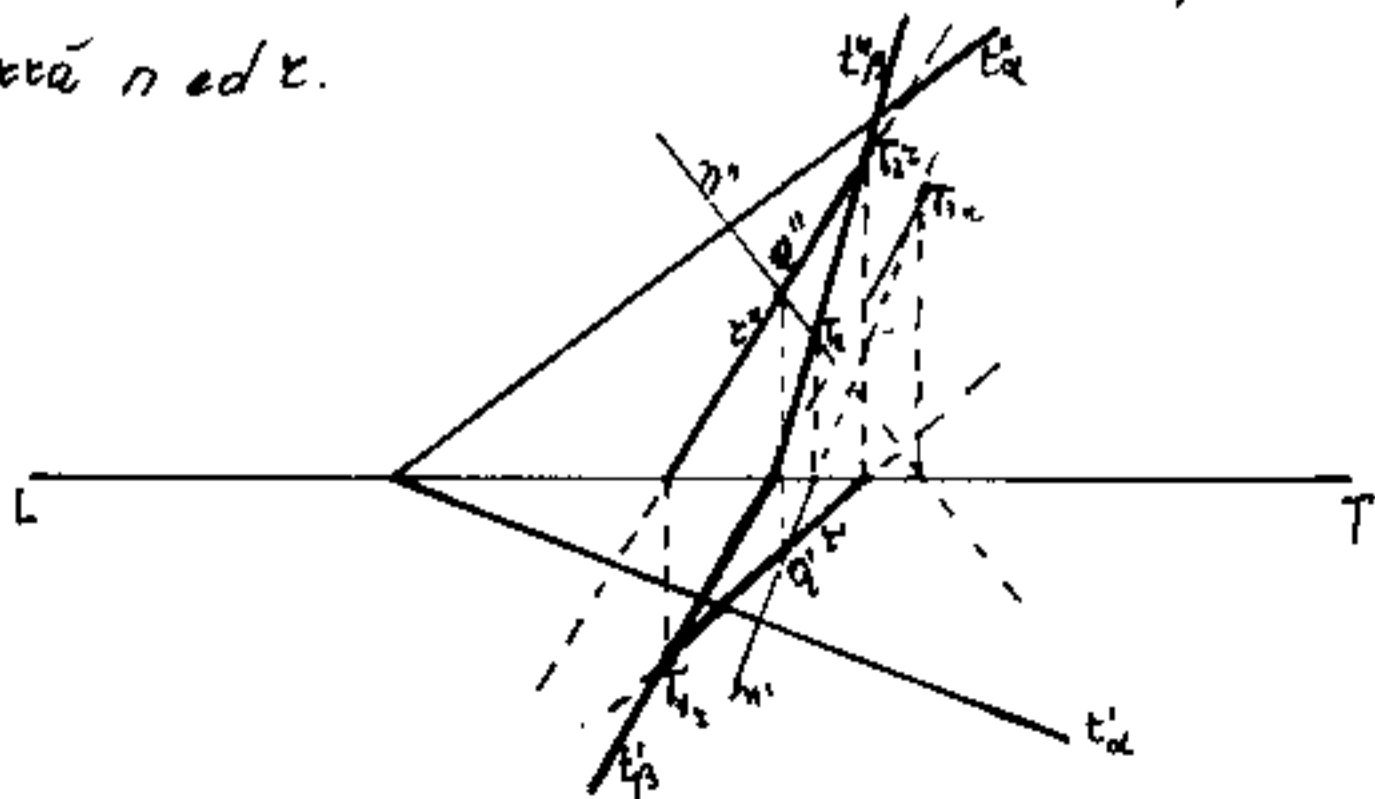
Si può operare in più modi: 1) Per  $P$  tracciamo il piano  $\alpha$  normale ad  $\tau$  (vedi esempio prece.) e cerchiamo  $Q$  comune ad  $\tau$  ed  $\alpha$ , la retta  $\overline{PQ}$  è tutta su  $\alpha$  e quindi è normale ad  $\tau$  e passa per  $P$ . 2) Un altro modo di risolvere il problema è quello di ribaltare il piano comune a  $P$  ed  $\tau$  e sul piano ribaltato tracciare da  $P$  la perpendicolare ad  $\tau$  e quindi riportare il piano.



Abbiamo graficamente sviluppato l'esercizio in entrambi i metodi, ricordiamo che occorre notevole precisione nel disegno, quindi caso per caso, può essere preferibile il 1) ed il 2) metodo.

Abbiamo infine: Dati il piano  $\alpha$  e la retta  $r$  trovare il piano  $\beta$  passante per  $r$  e normale ad  $\alpha$ .

Tracciamo la retta  $n$  normale ad  $\alpha$  e coplanare alla  $r$   $\beta$  conterrà  $n$  ed  $r$ .



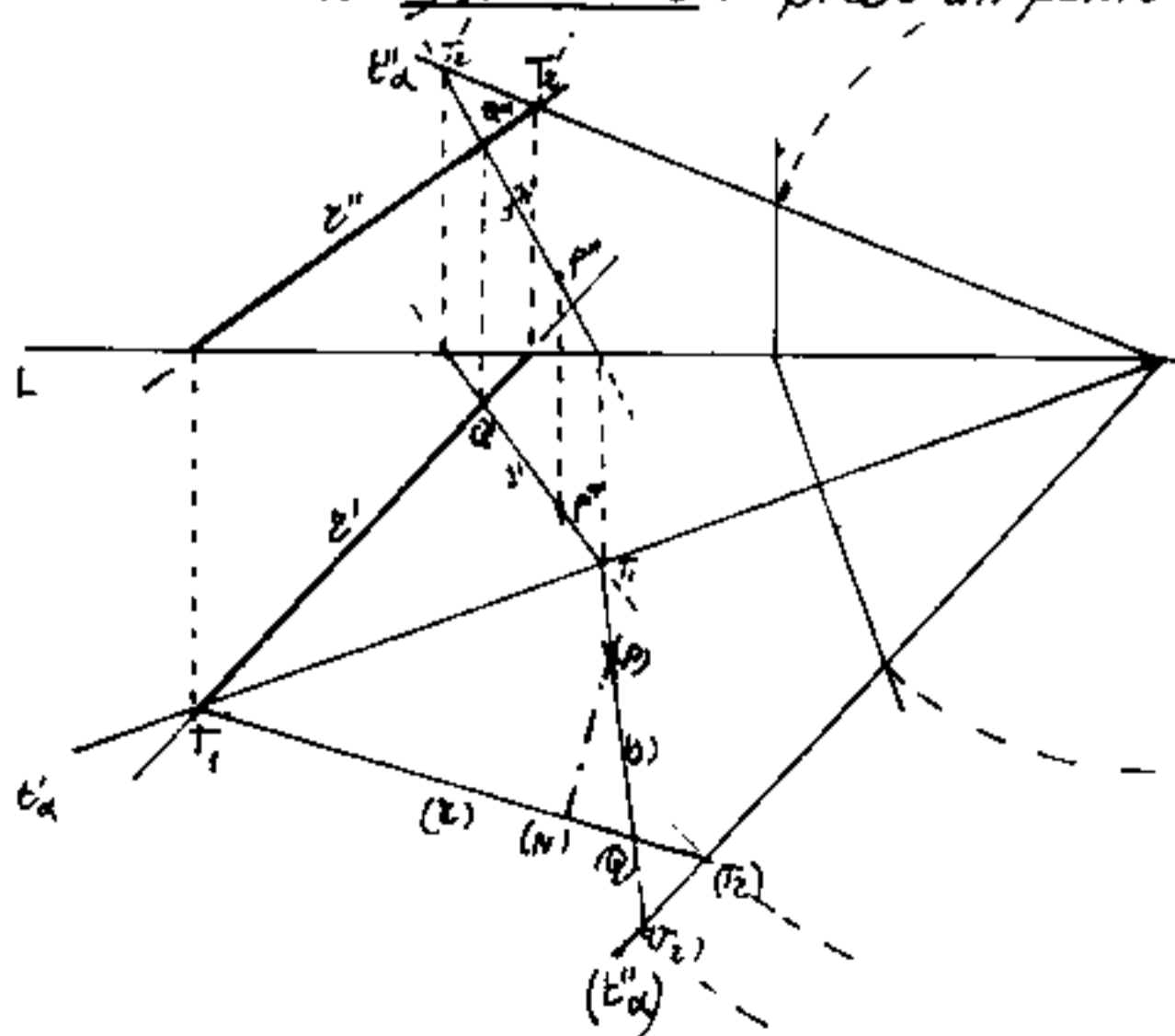


Problema: Dato la retta  $r$  ed il punto  $P$  fuori di essa, trovare il segmento minima distanza di  $P$  da  $r$ .

Si può operare in più modi:

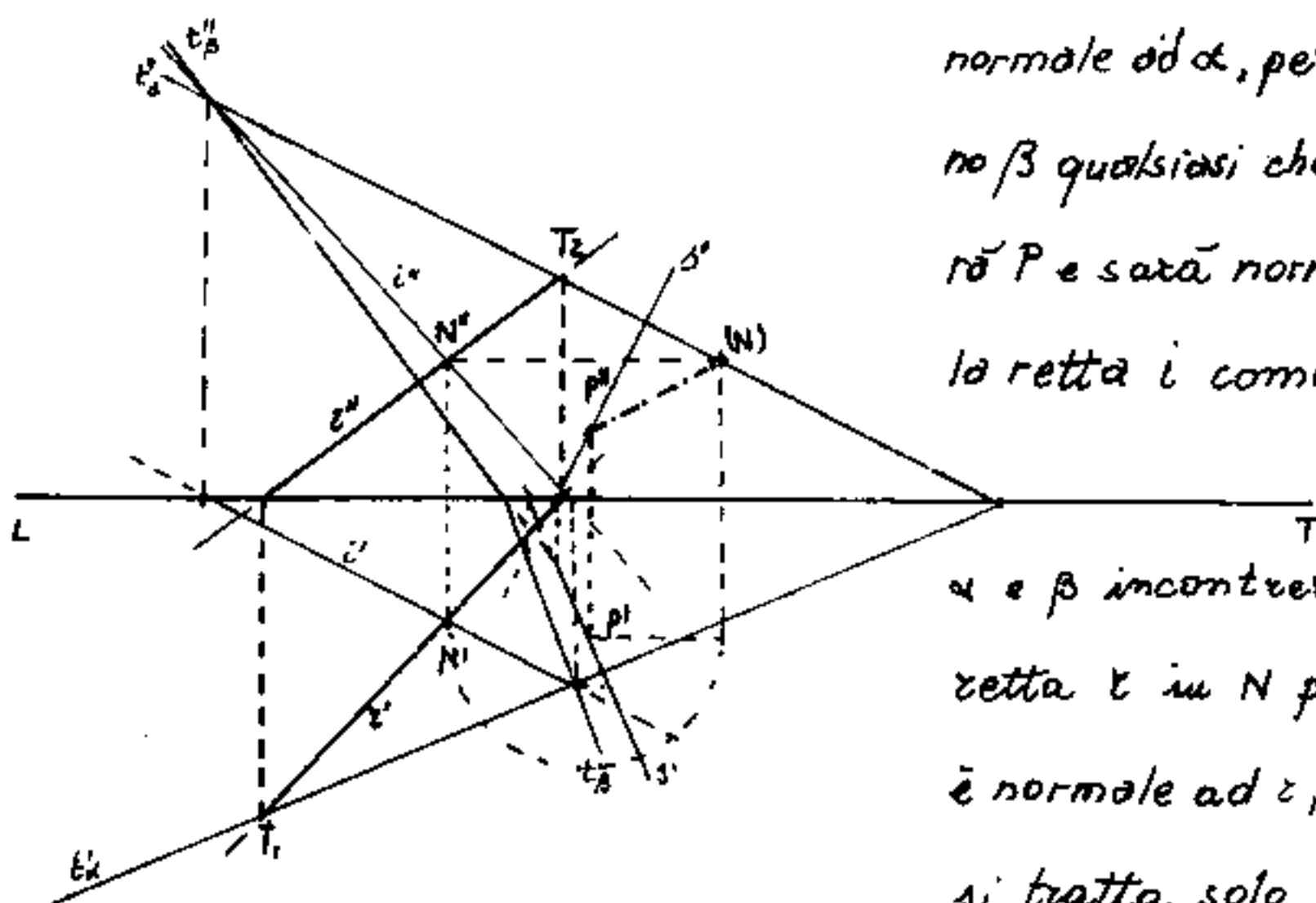
- 1) Ribaltare il piano comune ad  $r$  e  $P$ , e da  $P$  tracciare la normale ad  $r$  fino al punto comune  $N$ , il segmento  $\overline{PN}$  è in vera grandezza, il segmento di minima distanza di cui si può riportare le proiezioni.
- 2) Si può da  $P$  tracciare le proiezioni della retta normale ad  $r$  ed individuato  $N$  comune ruotare la retta normale per avere  $\overline{PN}$  in vera grandezza.
- 3) Per  $P$  si può tracciare la parallela alla  $r$  e ribaltare il piano delle due rette, oppure tracciare da  $P$  la normale al piano parallelo alla  $r$  e passante per  $P$ . ecc.

Vediamo il 1) metodo: preso un punto  $Q$  generico su  $r$  trac-



ciamo la retta  $\overline{PQ} = s$   
 ribaltiamo il comune  
 ad  $r$  ed  $s$  e da  $(P)$   
 ribaltato la normale  
 ad  $(r)$  ribaltata. Il  
 segmento  $\overline{PN}$  è a  
 tratto e punto.

2° metodo: Per  $\alpha$  un piano di qualsiasi, e per  $P$  la retta  $s$



normale ad  $\alpha$ , per  $s$  un piano  $\beta$  qualsiasi che conterrà  $P$  e sarà normale ad  $\alpha$ , la retta  $i$  comune ad

$\alpha$  e  $\beta$  incontrerà la retta  $r$  in  $N$  poiché  $\beta$  è normale ad  $r$ , ora

si tratta solo di ruotare

te  $\overline{PN}$  in modo da averne la vera grandezza.  $\overline{P(N)}$  è tratto e punto.

Si noti come i vari metodi per risolvere un problema portano a soluzioni più o meno elaborate, ed anche più o meno precise per l'errore di graficismo.

Facendo molta pratica (non studiando teoremi a memoria) vengono spontanee e risoluzioni talvolta molto semplici e precise. Abbiamo esposto risoluzioni di carattere generale, potremmo aggiungerne altre, però volevamo invitarvi a disegnare con cura le varie risoluzioni e troverete che tutte possono essere semplificate.

## Le rette sghembe

Due rette sghembe, sono due rette che giacciono su due piani paralleli, per cui non hanno punti in comune.

Se per un punto di una delle due rette tracciamo una retta parallela all'altra, il piano che le contiene è parallelo all'altra retta; e l'angolo da esse formato è l'angolo delle direzioni delle due rette sghembe.

Se tracciamo tutti i piani perpendicolari ad una retta sghemba, nessuno di essi conterrà l'altra retta sghemba, salvo il caso che le loro direzioni siano ortogonali.

Se tracciamo tutti i piani passanti per una retta sghemba, uno solo di essi è parallelo all'altra retta sghemba e contiene tutte le sue rette parallele. Nessuno di essi è perpendicolare all'altra retta sghemba, salvo il caso che le direzioni delle rette sghembe siano ortogonali.

L'angolo delle direzioni di due rette sghembe, può vedersi ribaltando il piano comune ad una sghemba ed alla parallela dell'altra retta sghemba.

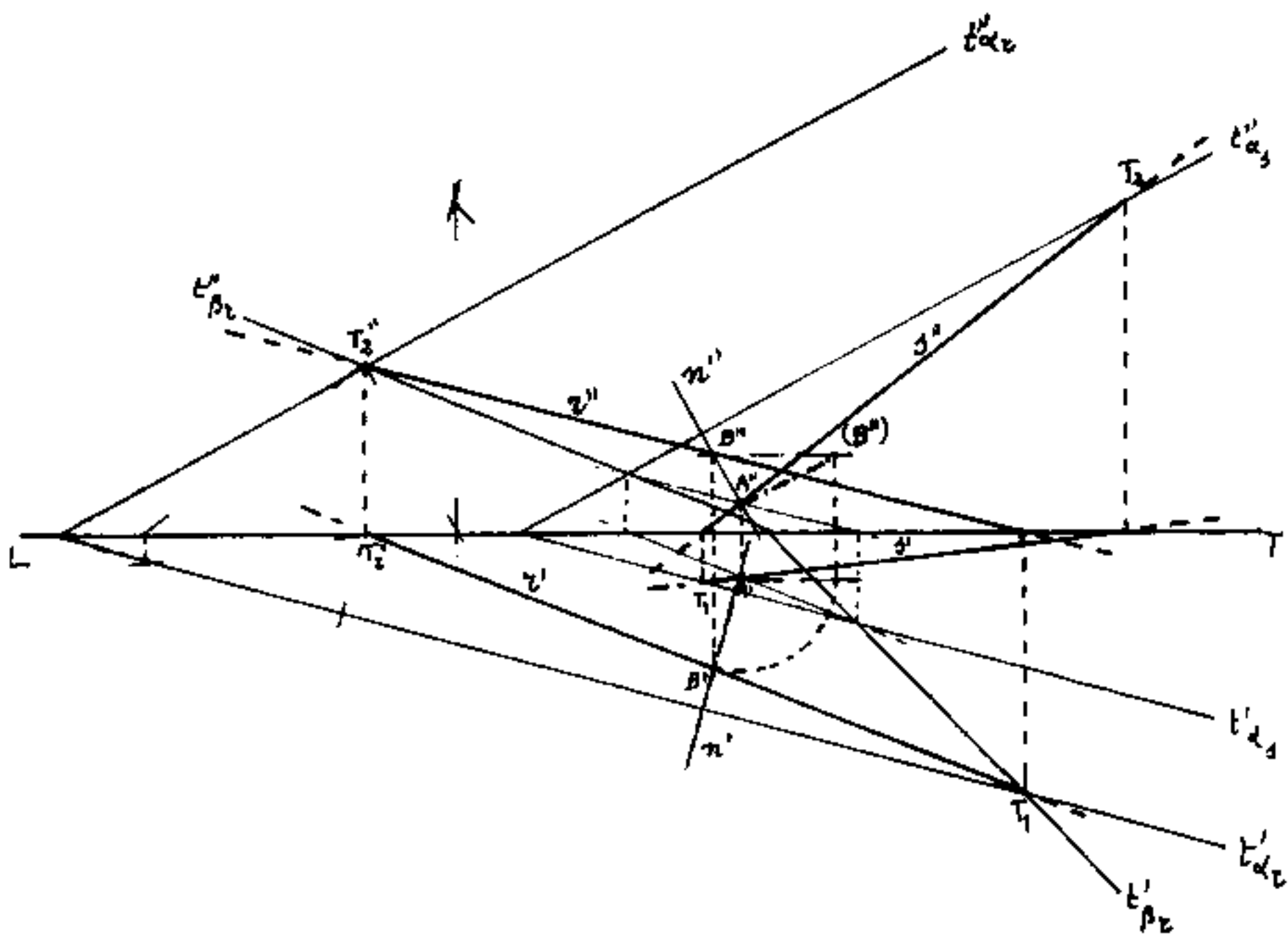
Una retta perpendicolare ai due piani paralleli contenenti le rette sghembe intercetta il segmento distanza dei due piani.

Fra le infinite rette perpendicolari ai due piani contenenti le rette sghembe, v'è un piano di rette perpendicolari che contiene una delle due rette sghembe, ed un altro piano che contiene l'altra retta sghemba; la retta comune a questi due piani perpendicolari è la retta perpendicolare alle due rette sghembe, che intercetta su di essa il segmento di minima distanza delle due rette sghembe ed uguaglia la distanza dei due piani paralleli su cui giacciono le rette sghembe.

Siano:  $r$  ed  $s$  le rette sghembe giacenti rispettivamente sui piani paralleli:  $\alpha_2$  ed  $\alpha_3$ ; e sui piani perpendicolari ad  $\alpha_2$ :  $\beta_2$  e  $\beta_3$ ; sia  $n$  la retta normale ad  $r$  ed  $s$  comune a  $\beta_2$  e  $\beta_3$  e su di essa  $\overline{AB}$  il segmento di minima distanza. (trattato per avere la vera grandezza.)

Date quindi due rette sghembe  $r$  ed  $s$  per un punto di  $\pi$  (per es. una traccia) si fa passare una retta parallela ad  $s$  (non importa disegnarla, basta segnare la sua prima traccia, che unita con la prima traccia di  $r$  sarà la traccia del piano  $\alpha$  parallelo ad  $s$  ( $t'_\alpha$ ) che incontrando la linea di terra permette di tracciare ( $t''_\alpha$ ). Per lo stesso punto di  $r$  possiamo tracciare la normale ad  $\alpha$  e quindi per  $r$  il piano  $\beta$  normale ad  $\alpha$ , che incontra in  $A$  la  $s$ .

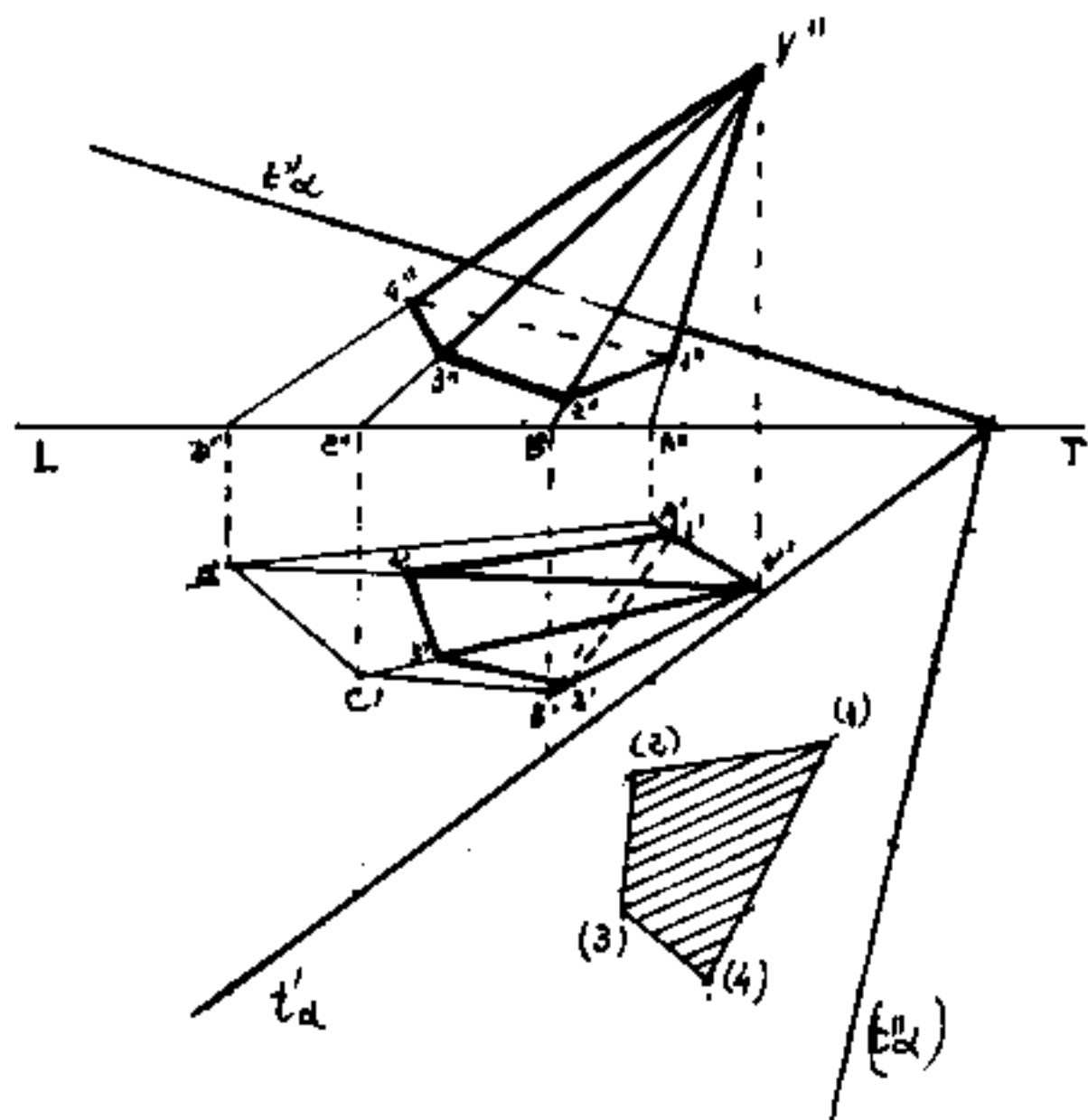
Da  $A$  la normale ad  $\alpha$  che incontrerà in  $B$  la  $\epsilon$ , quindi ruotare il segmento  $\overline{AB} = \overline{A^1(B^1)}$ . (a tratto e punto)



Poiché gli errori di graficismo possono in qualche caso essere notevoli; per cui conviene verificare ogni passaggio, per esempio ripetendo la costruzione con punti diversi, o ripetere la costruzione scambiando  $s$  ed  $\epsilon$ . Di  $n''$  non si sono disegnate le tracce, che, nel caso in esame risultano troppo ravvicinate e possono confondere il disegno.

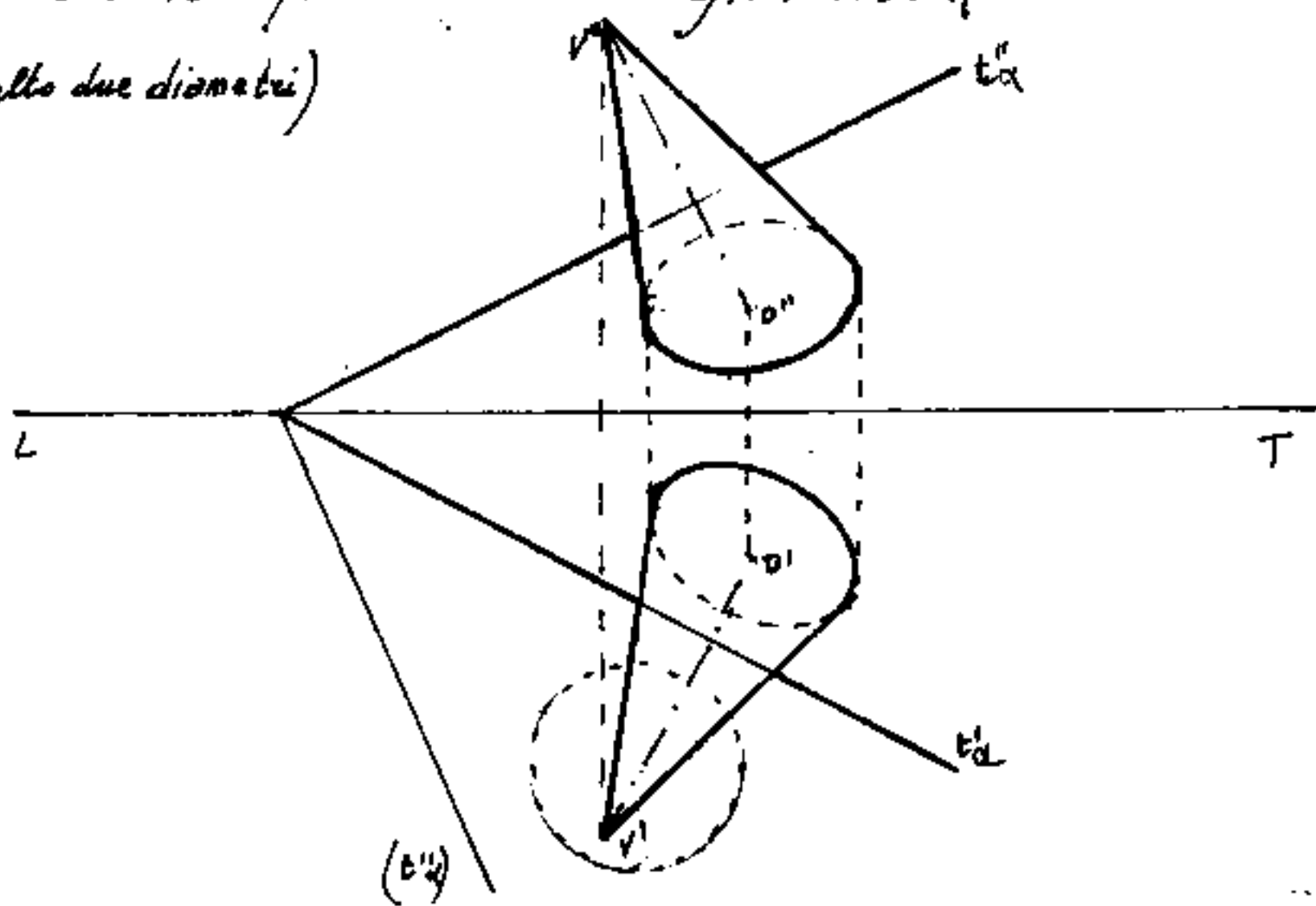


piramide si ripete la costruzione ora descritta)



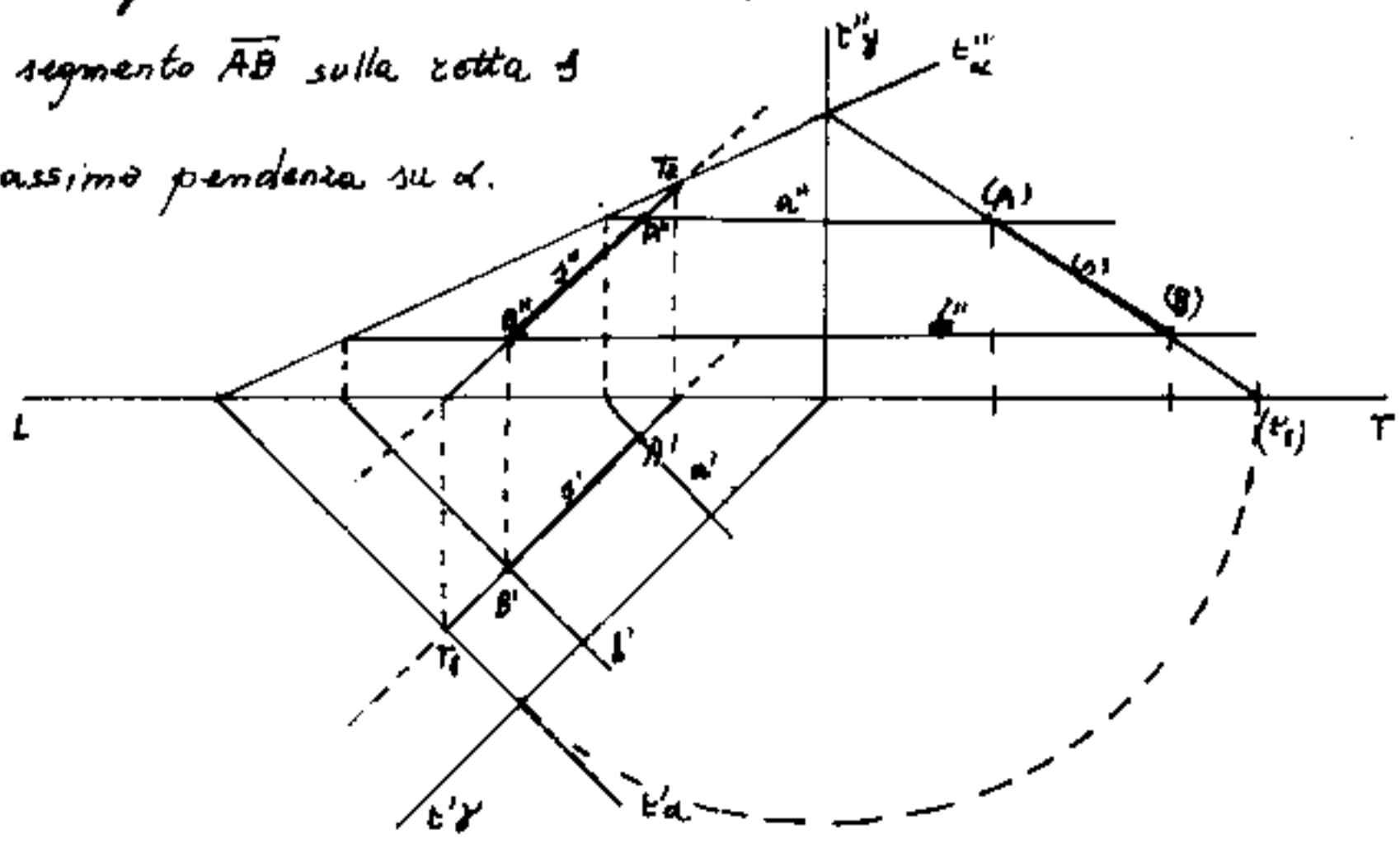
Poichè gli spigoli di qualsiasi solido a facce piane, sono delle rette, la costruzione è la stessa.

Per i solidi delimitati da superfici curve è necessario qualche accorgimento. (Cono circolare retto su  $\alpha$  alto due diametri)



- Un cerchio, su qualunque piano si proietti, avrà sempre due punti distanti un diametro (dagli estremi di un segmento, al diametro maggiore degli infiniti ellissi, agli infiniti diametri della sua circonferenza). Il diametro minore di un'ellisse è sempre perpendicolare al diametro maggiore. Se il diametro maggiore è orizzontale, il diametro minore è sulla retta di massima pendenza del piano su cui giace il cerchio proiettato. Se consideriamo un piano  $\alpha$  ribaltato sul primo piano di proiezione, i segmenti paralleli alla I<sup>a</sup> traccia di  $\alpha$  si proiettano in vera grandezza in prima proiezione e giacciono su rette orizzontali, le rette di massima pendenza proietteranno in vera grandezza i loro segmenti sulla retta comune ad  $\alpha$  e  $\delta$  ribaltata sul secondo piano, facendo coincidere  $t'_\delta$  con LT.

Per A segmento  $\overline{AB}$  sulla retta  $\delta$  di massima pendenza su  $\alpha$ .

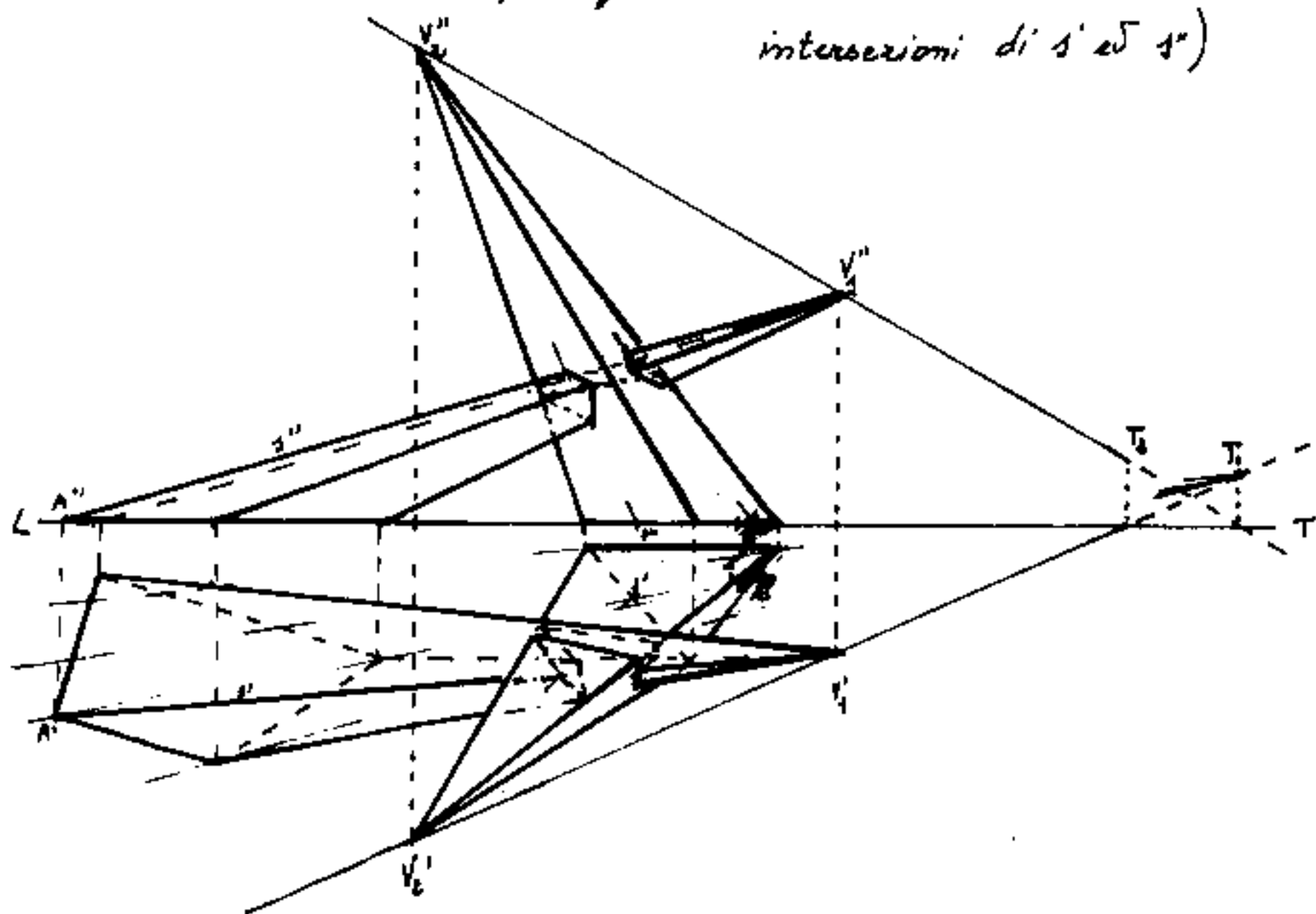




## Intersezione di due piramidi

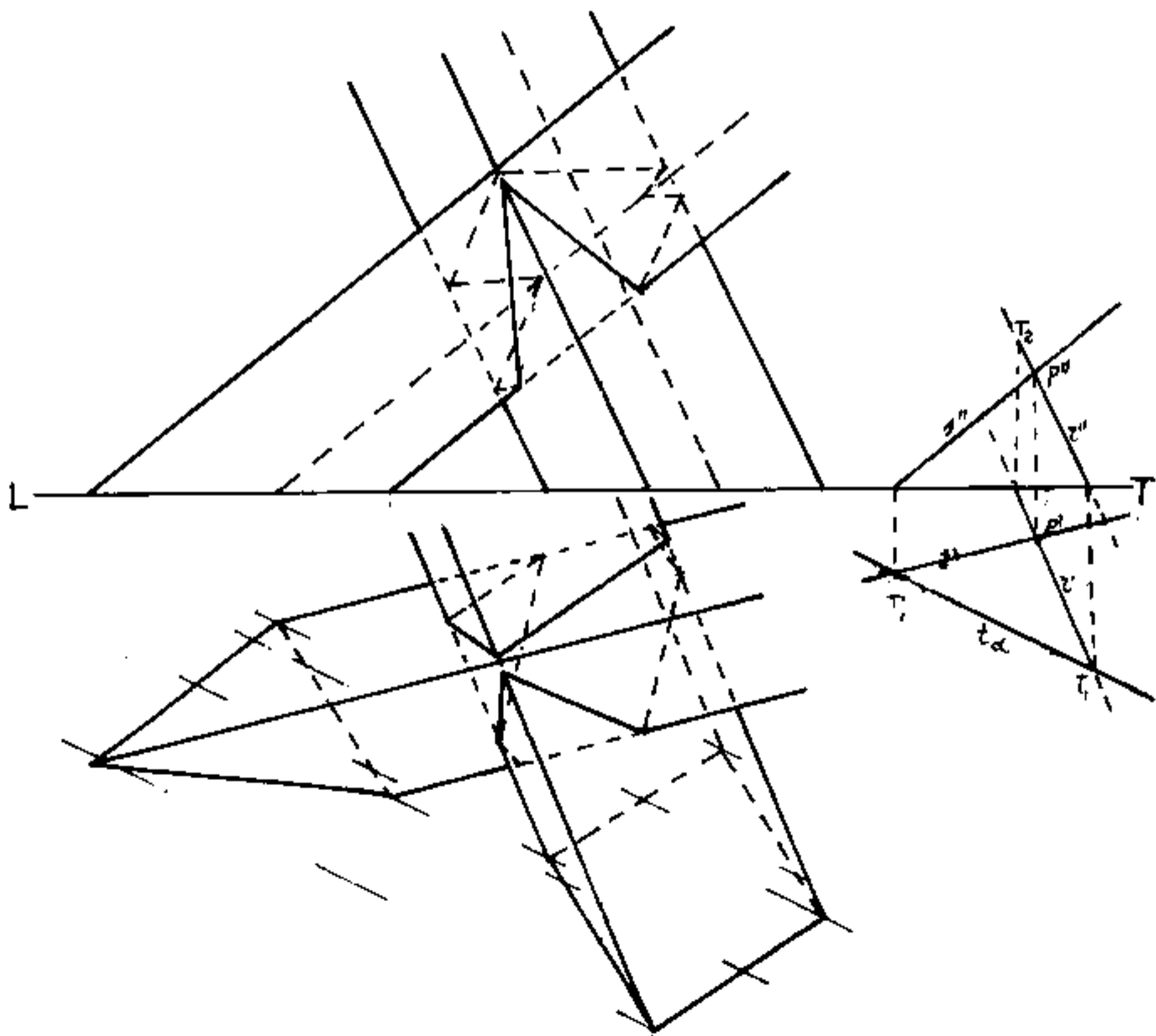
Per la retta che unisce i due vertici delle piramidi, facciamo passare un fascio di piani contenenti gli spigoli delle piramidi, se queste hanno le basi sul primo piano di proiezione, i vertici delle basi sono anche prime tracce delle rette spigoli, per cui ogni piano passante per i vertici delle piramidi la cui prima traccia passa per un vertice della base di una piramide, ne contiene lo spigolo, e se taglia due lati della base dell'altra piramide, determina le rette secondo cui il piano ne taglia le facce e quindi i punti in cui lo spigolo contenuto lo perfora. ( $T_1 A'$  determina l'el da cui le

intersezioni di  $s'$  e  $s''$ )



## Intersezione di prismi

L'intersezione di una piramide con un prisma ha reale la retta dei piani passante per il vertice della piramide e parallela al prisma; mentre per l'intersezione di due prismi tale retta è all'infinito ed i piani sono tutti paralleli fra loro. A noi interessa la direzione delle prime tracce, perciò prese due rette  $r$  ed  $s$  parallele ai prismi e complanari, le loro prime tracce danno la direzione cercata. Quindi si procede come l'esempio precedente per l'intersezione di due piramidi.

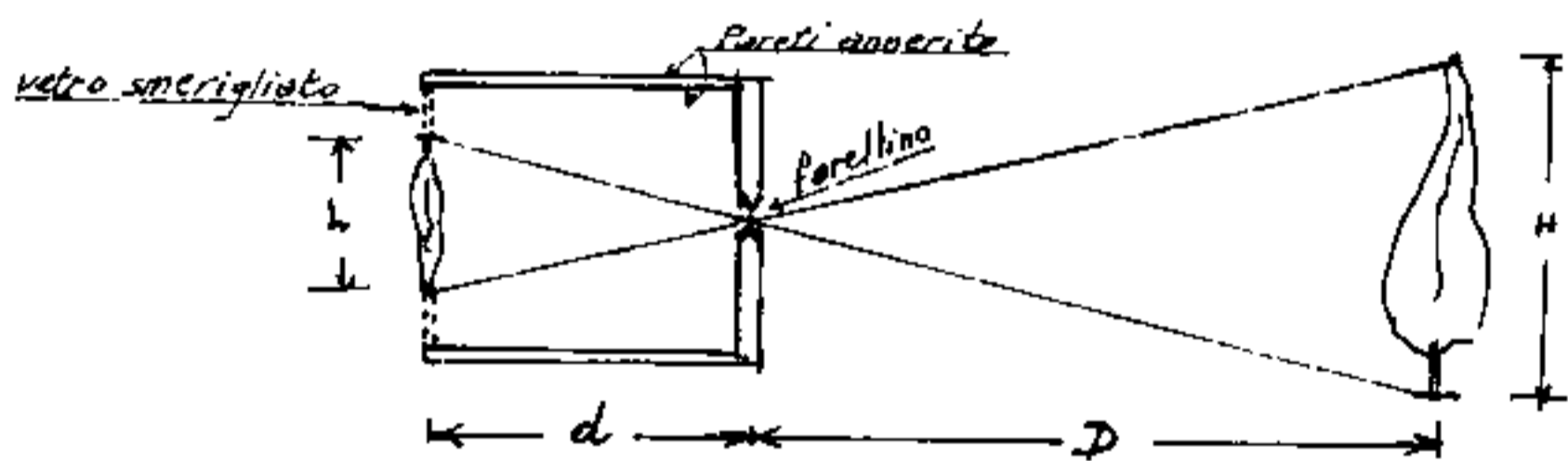


## Le prospettive e le assonometrie

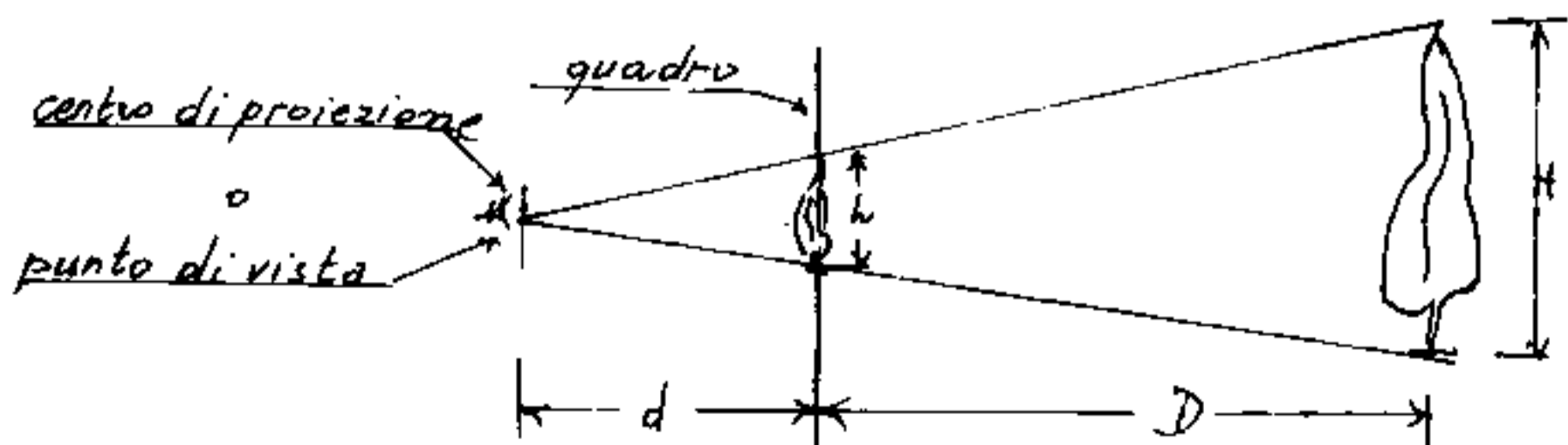
Oltre la proiezione di Monge che ha il centro di proiezione all'infinito e quindi proietta ortogonalmente sui piani di proiezione, consideriamo la proiezione centrale, ove il centro di proiezione è in campo finito e la proiezione dell'oggetto avviene su un piano detto quadro.

È evidente che se l'oggetto rimane fra il centro di proiezione ed il quadro, la sua rappresentazione risulta ingrandita, se sta dietro il quadro apparirà impiccolita. Questa seconda modalità utilizzeremo per la prospettiva

Consideriamo una camera oscura costituita da una scatola parallelepipedica, annerita, avente su una faccia un forellino centrale e sulla faccia opposta un vetro smerigliato;

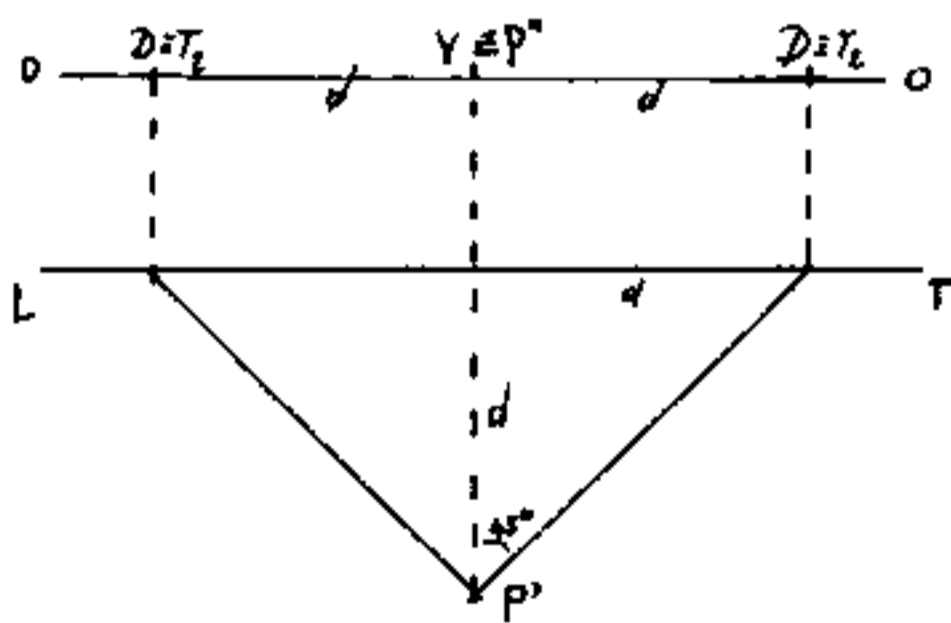


sul vetro smerigliato si riforma l'immagine impiccolita nel rapporto:  $\frac{h}{H} = \left(\frac{d}{D}\right)$ ;  $h = H\left(\frac{d}{D}\right)$ . (l'immagine è capovolta)



Nella proiezione centrale ed in prospettiva l'immagine si forma dritta e vale lo stesso rapporto della camera oscura. Nelle macchine fotografiche il forellino è dimensionabile col diaframma e vi è un sistema ottico "obiettivo" che mette a fuoco l'immagine sulla pellicola.

Consideriamo, nella proiezione di Monge, un punto  $P$  (punto diviso) nel primo diedro, e consideriamo il secondo piano di proiezione come "quadro" per immagini di oggetti nel secondo diedro. L'osservatore in  $P$  dista " $d$ " dal quadro, e se il primo piano di proiezione si considera piano terra, il piano parallelo all'altera dell'osservatore sarà il piano d'orizzonte, che intercetta sul secondo piano di proiezione la linea  $\overline{OO'}$  detta linea d'orizzonte. Se da  $P$  tracciamo due rette orizzontali



li a  $45^\circ$  sul quadro e siano sulla retta  $OO'$  i punti  $D$  le loro seconde tracce; se indichiamo con  $V \equiv P'$  la distanza  $\overline{VD} = \overline{P'T_1} = d$  è la distanza dell'osservatore dal quadro.

In prospettiva:  $V$  = centro di vista = punto di fuga di tutte le rette normali al quadro,  $D$  = punti di fuga di tutte le rette a  $45^\circ$  sul quadro.  $\overline{OO'}$  luogo di tutti i punti di fuga. Cosa si deve intendere per punto di fuga? È il punto all'infinito ove noi vediamo convergere un insieme di rette

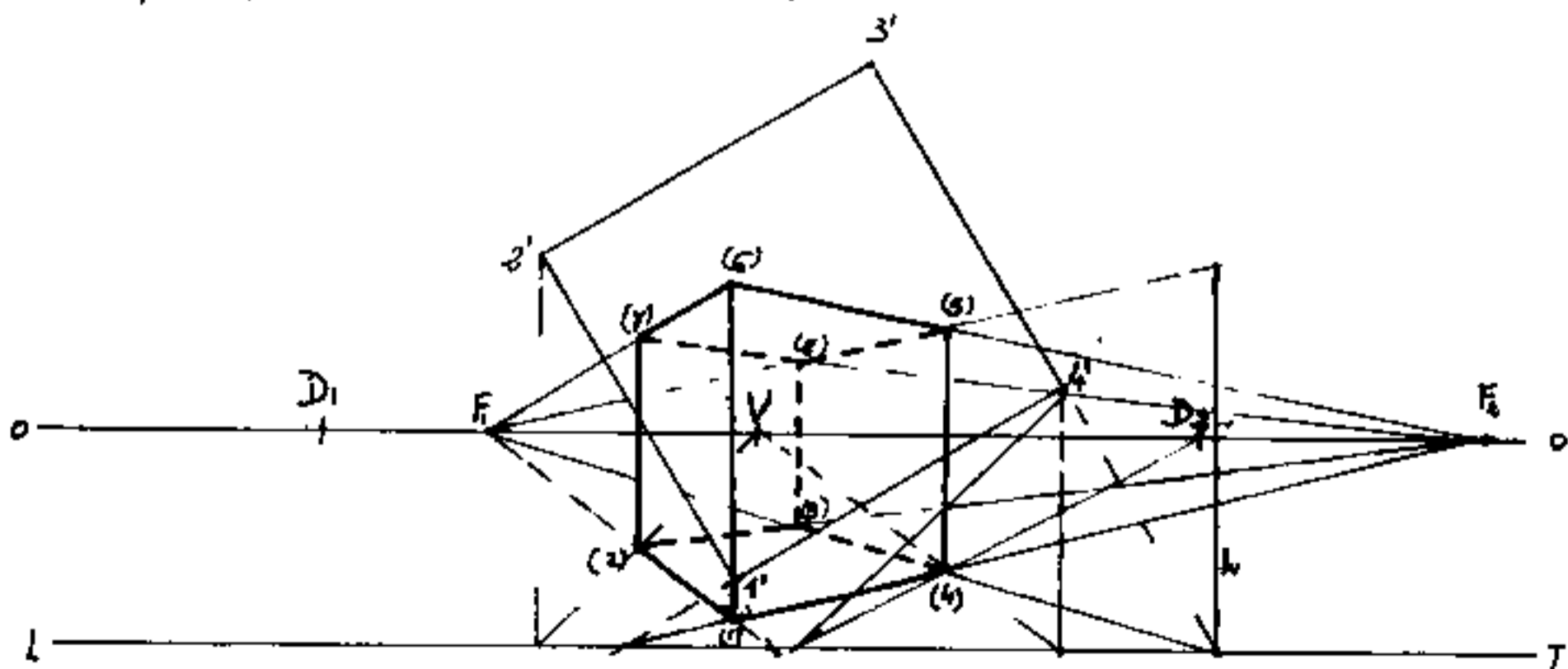
parallele, che in prospettiva giace sulla linea d'orizzonte  $\overline{oo}$ .  
Tutte le rette parallele convergono nello stesso punto di fuga.  
Se consideriamo un insieme di rette parallele, come in un rettilineo ferroviario vediamo le verghe del treno ed i cavi ad esse paralleli, oppure in un viale i filari di alberi o di siepi, le linee di gronda dei tetti, le linee dei davanzali delle finestre, le linee dei marciapiedi, ecc. noi le vediamo avvicinarsi, queste rette parallele, sempre di più, via via che si allontanano, fino a convergere in un ideale punto che chiamiamo punto di fuga. Gli oggetti più sono lontani, più li vediamo impiccoliti, e l'effetto prospettiva; le linee parallele al quadro si mantengono parallele, perché i loro punti hanno tutti la stessa distanza dal quadro perciò il loro punto di fuga è all'infinito; in particolare: le linee verticali si mantengono verticali in prospettiva.

Facciamo la prospettiva di un cubo per mettere in pratica la teoria.

Tracciata la linea di terra LT, si traccia al di sopra di LT la parallela linea d'orizzonte oo, la distanza fra le due parallele è l'altezza dell'osservatore al centro di  $\overline{oo}$  fissiamo un punto V, punto di vista, che è

anche il punto di fuga delle rette normali al quadro.  
 Se "d" è la distanza dell'osservatore dal quadro, poniamo su  $\overline{OO}$ , simmetrici a V i punti  $D_1$  e  $D_2$  tali che  $\overline{D_1V} = \overline{D_2V} = "d"$ , ove  $D_1$  e  $D_2$  sono rispettivamente i punti di fuga delle rette a  $45^\circ$  a sinistra e a destra rispetto all'osservatore. Le distanze da LT delle prime proiezioni dei punti sono le distanze dei punti dal quadro. I punti sul quadro sono le seconde tracce delle rette e coincidono con la loro rappresentazione in prospettiva.

Disegniamo il quadrato  $1,2,3,4$ , nel secondo diedro e prolunghiamo i lati fino alle tracce su LT. Per un punto (p.e.  $4'$ ) facciamo passare due rette orizzontali, una perpendicolare al quadro, l'altra a  $45^\circ$  ed uniamo le loro tracce su LT con i loro punti di fuga V e D, il punto comune è la rappresentazione in prospettiva del punto (p.e.  $4$ ). Se uniamo le tracce di  $1-4$  e

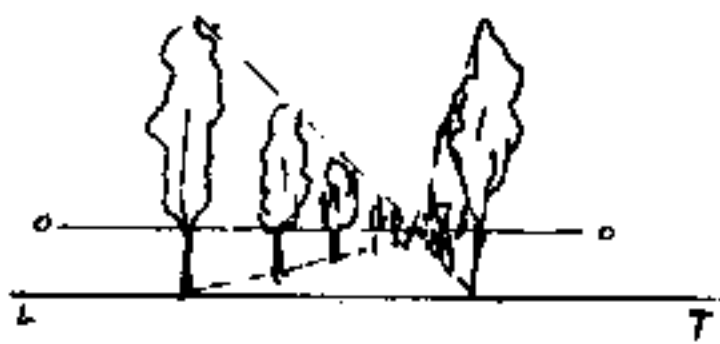


di  $4'-3'$  con  $(4)$  troviamo su  $\overline{OO}$  i punti di fuga  $F_1$  ed  $F_2$  di tutte le

parallele a tali lati, per cui se su LT vi sono le tracce dei quattro lati, basterà unirle con i punti di fuga  $F_1$  ed  $F_2$  per avere la pianta completa in prospettiva, se un lato (come 2'-3') ha la traccia fuori dal disegno occorre riportare in prospettiva un punto (per es 2') e basterà una perpendicolare la cui traccia unita con V intersecherà la prospettiva del lato (in 2'). Queste costruzioni si possono fare anche per controllare il grafico.

Se dalla traccia di un lato su LT riportiamo in verticale (sul quadro) l'altezza  $h$  (nel nostro caso un lato = spigolo) e l'estremo lo colleghiamo col punto di fuga, sulle verticali dei punti in prospettiva, si intercettano i lati superiori paralleli che uniti dai loro estremi ai punti di fuga delineano in prospettiva l'intero cubo.

Supponiamo di essere su un lato di un viale alberato largo otto metri e noi osserviamo a due metri da terra, la fuga dei due filari di alberi fra loro distanti quattro metri ed alti otto metri. Si noti come le spaziature e l'impiccolimento degli alberi sia diverso per i due lati, data la posizione dell'osservatore. (3 di

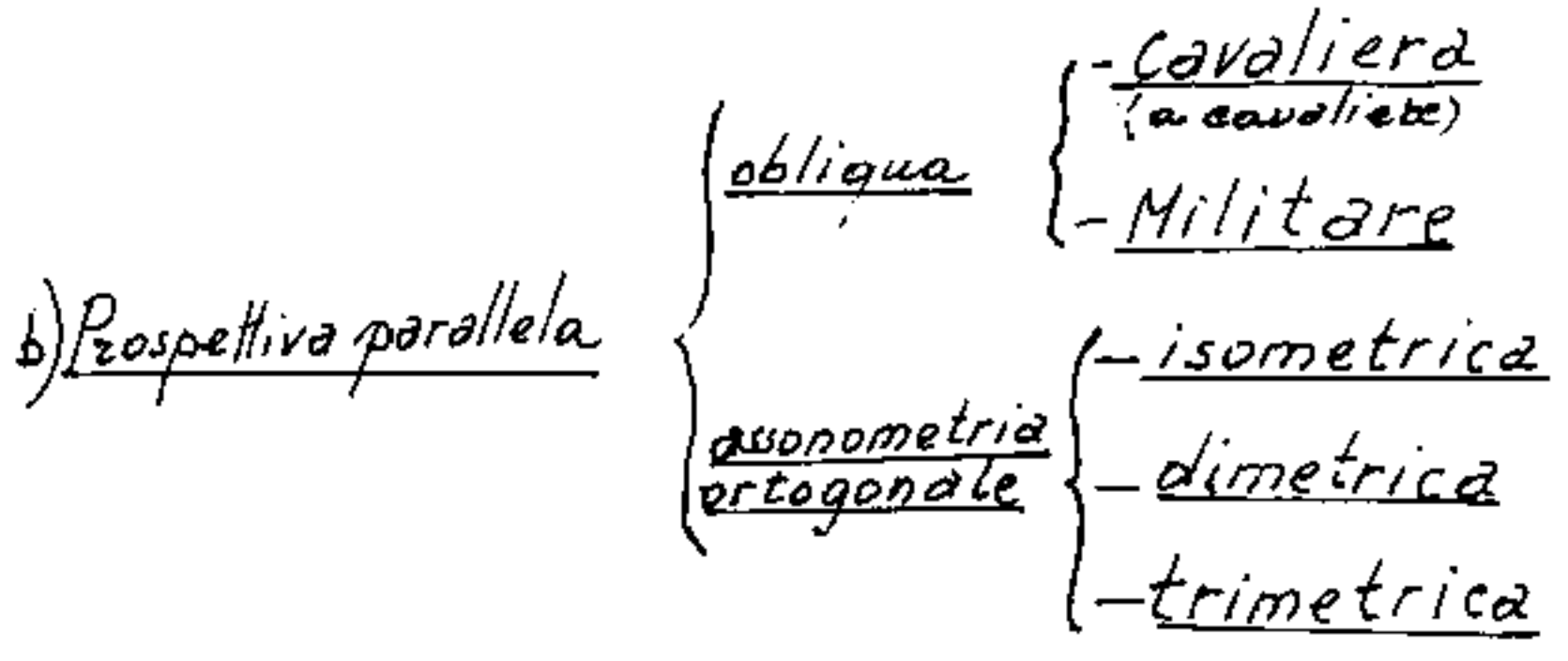


regni possono eseguirsi in scala)

La prospettiva che abbiamo esposto è anche chiamata: "Prospettiva Conica" o "Prospettiva centrale" da distinguersi dalla cosiddetta: "Prospettiva parallela", spesso detta semplicemente Assonometria.

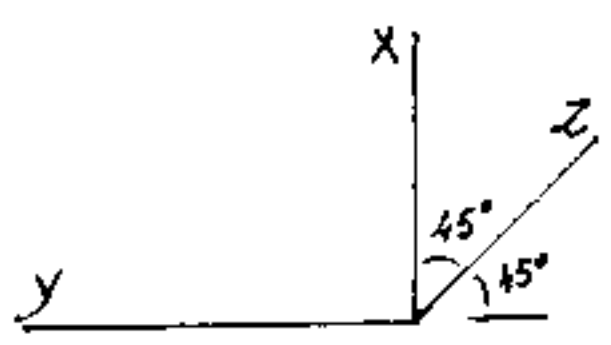
In effetti la visione complessiva di un oggetto può eseguirsi:

a) Prospettiva conica o Prospettiva centrale

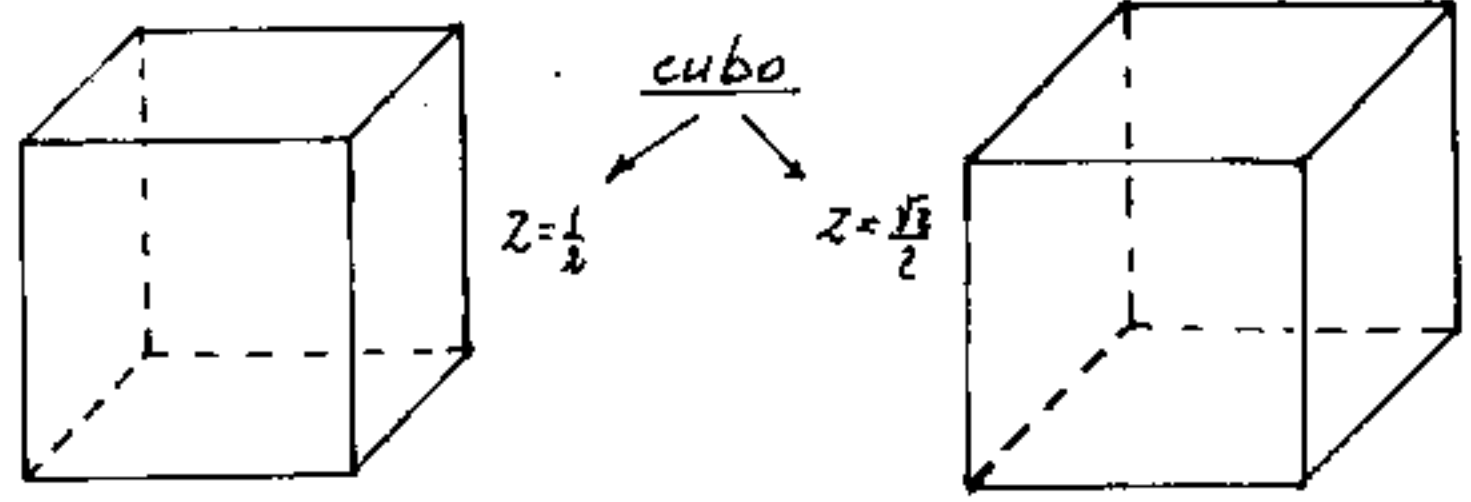


(Schema da: P. Vannelli e C. Corradi - Disegno di Macchine - ed. Zanichelli - Brescia - 1966)

Prospettiva obliqua Cavaliera

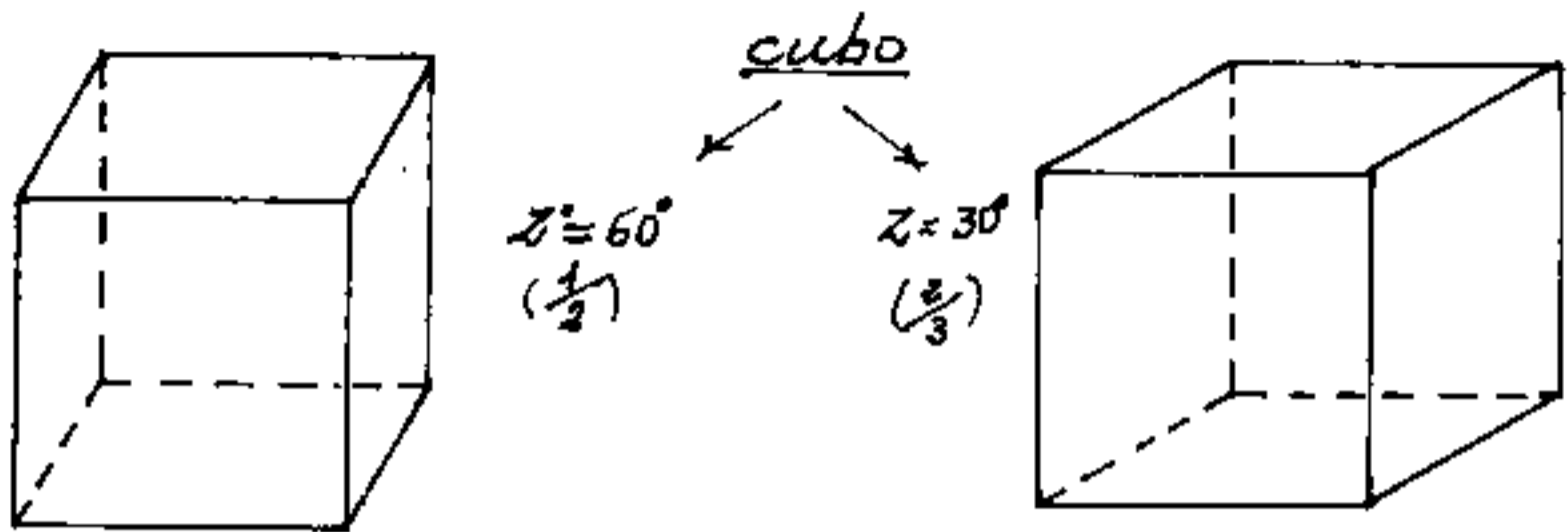


assi:  
 in x ed y veri valori, in z valori  $\frac{1}{2}$ .  
 tal volta in z valori  $(\frac{\sqrt{2}}{2})$ .





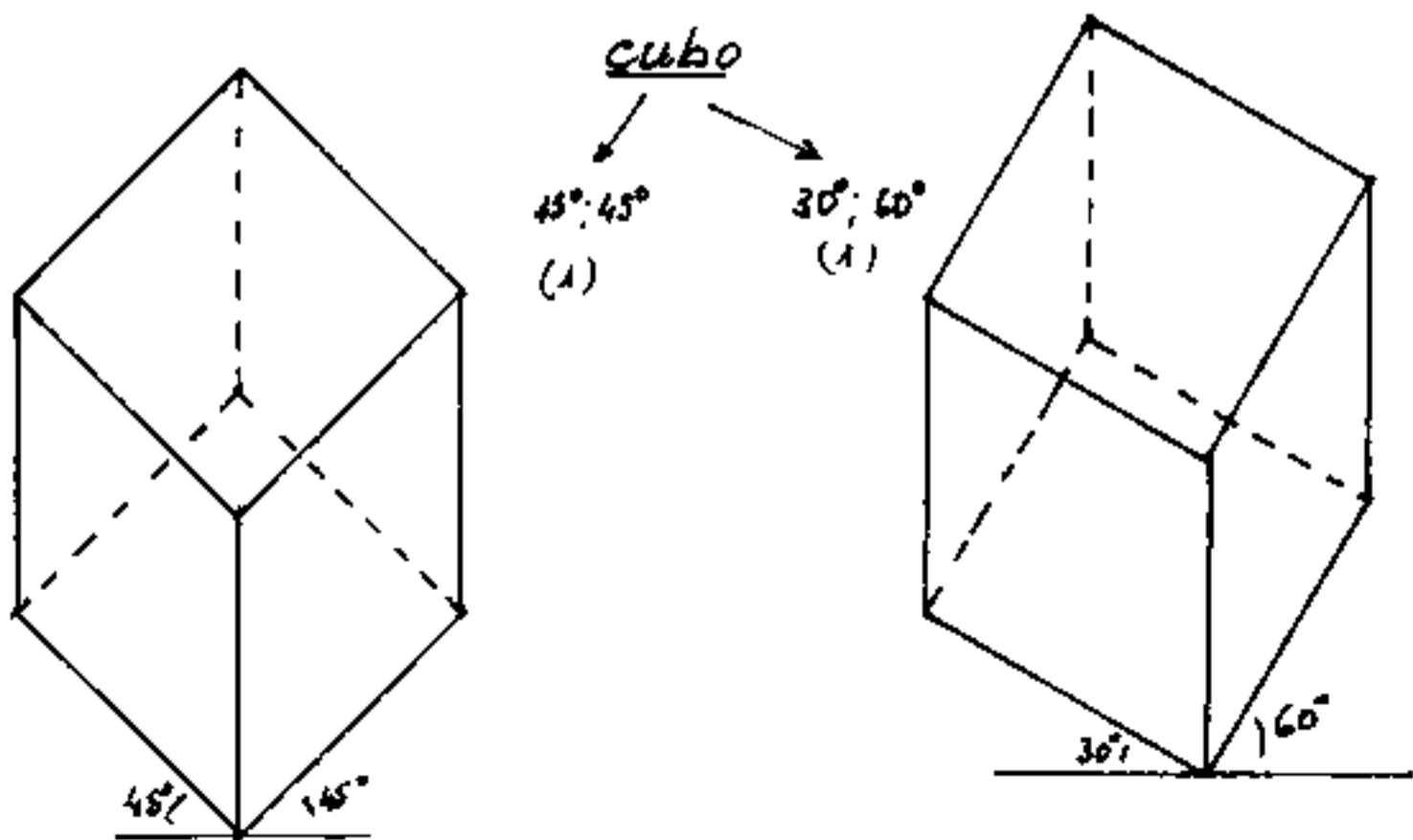
Tal volta l'asse  $z$  è inclinato di  $60^\circ$  con coeff.  $\frac{1}{2}$   
oppure l'asse  $z$  è inclinato di  $30^\circ$  con coeff.  $\frac{2}{3}$



Si noti, confrontando i quattro disegni, come sia possibile dare più o meno risalto alle facce laterali giocando sul modulo e sull'angolo.

### Prospettiva obliqua militare.

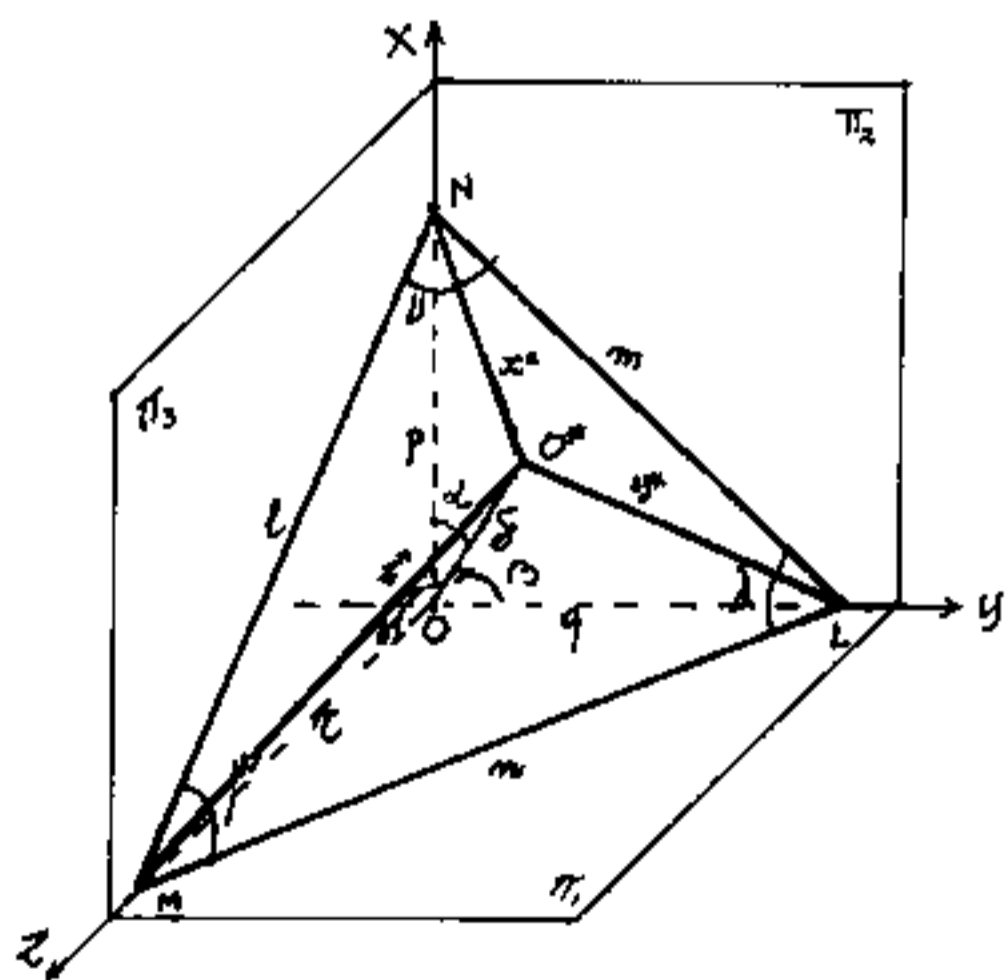
Nella prospettiva militare resta verticale solo l'asse verticale, gli altri due assi sono entrambi inclinati sull'orizzontale degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ . Spesso si pone:  $\alpha = \beta = 45^\circ$ , od anche  $\alpha = 30^\circ$  e  $\beta = 60^\circ$ , con modulo 1 (uno) in  $x, y, e z$ .



# Prospettiva parallela assonometrica (Assonometria)

L'assonometria si ottiene proiettando un solido ortogonalmente su un piano comunque inclinato. (centro di osservazione all'infinito). Per comprendere l'assonometria, (così facile ad eseguirsi), sono necessari alcuni complementi di Geometria dello Spazio, per confrontare le grandezze in assonometria con quelle, dello stesso solido, in proiezione di Monge.

Sia:  $OXYZ$  una terna oraria di assi cartesiani ortogonali, con la  $X$  disposta verticalmente, siano:  $\pi_1 =$  orizzontale,  $\pi_2 =$  verticale,  $\pi_3 =$  verticale, normale alla linea di terra comune a  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , i piani di proiezione secondo Monge. Un qualsiasi piano  $\alpha$  intercetta, con



i piani di proiezione, un triangolo  $LMN$  i cui lati:  $l, m, n$ , giacciono rispettivamente sulla  $\pi_3^*, \pi_2^*, \pi_1^*$  traccia di  $\alpha$ .

Proiettando perpendicolarmente ad  $\alpha$  gli assi cartesiani:

$x, y, z$  avremo su  $\alpha$  gli assi assonometrici:  $x'', y'', z''$ , non più ortogonali fra loro. L'origine  $O$  si proietta in  $O''$  ortocentro del triangolo  $LMN$ . (vedi Vol. III).

L'asse  $x^*$  è su  $\overline{O^*N}$ , l'asse  $y^*$  su  $\overline{O^*L}$ , l'asse  $z$  su  $\overline{O^*M}$ .  
 L'equazione generica del piano  $\alpha$  è:

$$ax + by + cz + d = 0$$

dividendo per  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  si ha:

$$(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z = \delta$$

ove:  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,  $\cos\gamma$ , sono i coseni direttori del piano, cioè i coseni degli angoli che la retta per l'origine e normale al piano (retta di giacitura) forma rispettivamente con gli assi  $x, y, z$ . Il segmento  $\overline{OO^*} = \delta$  è la distanza del piano dall'origine  $O$  degli assi.

Dividendo l'equazione per  $\delta$ , si ha in forma segmentaria:

$$\frac{x}{\delta/\cos\alpha} + \frac{y}{\delta/\cos\beta} + \frac{z}{\delta/\cos\gamma} = 1$$

ove posto:

$p = \overline{O^*N} = \delta/\cos\alpha$ ;  $q = \overline{O^*L} = \delta/\cos\beta$ ;  $r = \overline{O^*M} = \delta/\cos\gamma$  si ha:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

con  $p, q, r$  segmenti

staccati dal piano sugli assi  $x, y, z$ . Se:  $\lambda, \mu, \nu$  sono gli angoli interni del triangolo  $LMN$  di lati  $l, m, n$  e  $R =$  raggio del cerchio circoscritto, si ha:

$$x_N^* = \overline{O^*N} = n/\operatorname{tg}(\nu) = \delta \operatorname{tg}(\alpha) = p \operatorname{sen}(\alpha) = 2R \cos(\nu)$$

$$y_L^* = \overline{O^*L} = l/\operatorname{tg}(\lambda) = \delta \operatorname{tg}(\beta) = q \operatorname{sen}(\beta) = 2R \cos(\lambda)$$

$$z_M^* = \overline{O^*M} = m/\operatorname{tg}(\mu) = \delta \operatorname{tg}(\gamma) = r \operatorname{sen}(\gamma) = 2R \cos(\mu)$$

da queste relazioni calcoliamo i lati del triangolo.

$$l^2 = (p^2 + r^2) = \delta^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \gamma} \right) = \delta^2 \left( \frac{\sec^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \gamma} \right); \quad \boxed{l = \delta \frac{\sec \beta}{\cos \alpha \cos \gamma}}$$

$$m^2 = (p^2 + q^2) = \delta^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \right) = \delta^2 \left( \frac{\sec^2 \gamma}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \right); \quad \boxed{m = \delta \frac{\sec \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

$$n^2 = (q^2 + r^2) = \delta^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma} \right) = \delta^2 \left( \frac{\sec^2 \alpha}{\cos^2 \beta \cos^2 \gamma} \right); \quad \boxed{n = \delta \frac{\sec \alpha}{\cos \beta \cos \gamma}}$$

sostituendo nelle uguaglianze precedenti, abbiamo:

$$\delta \frac{\sec \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\lambda)} = \delta \operatorname{tg}(\beta)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\lambda) = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma}}$$

$$\delta \frac{\sec \gamma}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\mu)} = \delta \operatorname{tg}(\gamma)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\mu) = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

$$\delta \frac{\sec \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\nu)} = \delta \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\nu) = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma}}$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \mu}}$$

$$\boxed{\cos \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \nu}}$$

$$\boxed{\cos \gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \nu}}$$

L'equazione del piano:  $\frac{x}{\sqrt{\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \mu}} + \frac{y}{\sqrt{\operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \nu}} + \frac{z}{\sqrt{\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \nu}} = \delta$

può scriverci:  $\boxed{(\sqrt{\operatorname{tg} \nu})x + (\sqrt{\operatorname{tg} \lambda})y + (\sqrt{\operatorname{tg} \mu})z = \delta \sqrt{\operatorname{tg} \nu \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \mu}}$

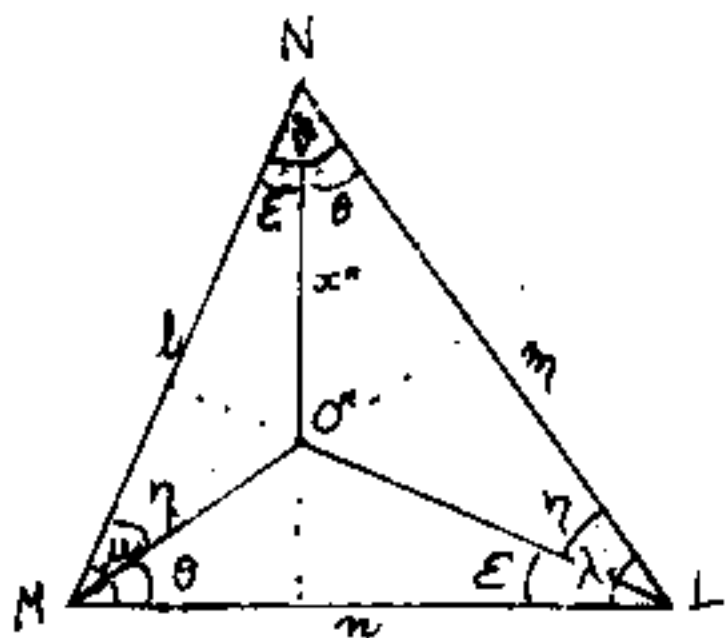
Vogliamo calcolare come gli assi assonometrici dividono gli angoli interni del triangolo LMN. Cioè gli angoli:  $\varepsilon = \widehat{OLM}$ ;  $\theta = \widehat{OHL}$ ; che gli assi  $y^* z^*$  formano con l'orizzontale. Siano:  $h_l, h_m, h_n$  le altezze rispetto ai lati:

$l, m, n$ ;  $\boxed{\cos \varepsilon = h_l/n}$ ;  $\boxed{\cos \theta = h_m/n}$  e poiché:

$$h_l = m \sec \nu; \quad h_m = l \sec \nu \quad \boxed{\cos \varepsilon = \frac{m \sec \nu}{n}}; \quad \boxed{\cos \theta = \frac{l \sec \nu}{n}}$$

$$\text{ma: } \frac{n}{\text{sen } \nu} = \frac{m}{\text{sen } \mu} = \frac{l}{\text{sen } \lambda} = 2R; \quad \boxed{\cos E = \frac{m}{2R}}; \quad \boxed{\cos \theta = \frac{l}{2R}}$$

$$\text{ed anche: } \boxed{\cos E = \text{sen } \mu}; \quad \boxed{\cos \theta = \text{sen } \lambda}; \quad \boxed{\cos \eta = \text{sen } \nu}$$



Si noti che:  $(E + \theta) = \nu$ ;  $(E + \eta) = \lambda$ ;

$$(\theta + \eta) = \mu; \quad \text{cioe': } \boxed{(E + \theta + \eta) = 90^\circ}$$

$$\boxed{\text{tg}(E) = \frac{1}{\text{tg } \mu}}; \quad \boxed{\text{tg } \theta = \frac{1}{\text{tg } \lambda}}; \quad \boxed{\text{tg } \eta = \frac{1}{\text{tg } \nu}}$$

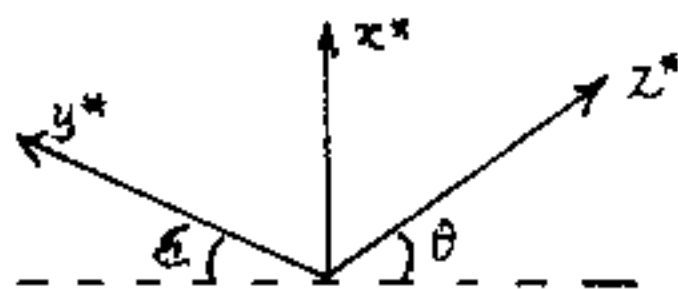
ricordando i valori trovati per

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , in funzione di  $\lambda, \mu, \nu$ , si ha:

$$\underline{\text{sen } \alpha} = \sqrt{1 - \text{tg } E \text{tg } \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{\text{tg } \mu \text{tg } \lambda}} = \frac{x^*}{p} = (\text{modulo in } x^*)$$

$$\underline{\text{sen } \beta} = \sqrt{1 - \text{tg } E \text{tg } \eta} = \sqrt{1 - \frac{1}{\text{tg } \mu \text{tg } \nu}} = \frac{y^*}{q} = (\text{modulo in } y^*)$$

$$\underline{\text{sen } \gamma} = \sqrt{1 - \text{tg } \eta \text{tg } \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{\text{tg } \nu \text{tg } \lambda}} = \frac{z^*}{r} = (\text{modulo in } z^*)$$



Queste espressioni consentono di calcolare "i moduli" cioè i coefficienti numerici, per molti

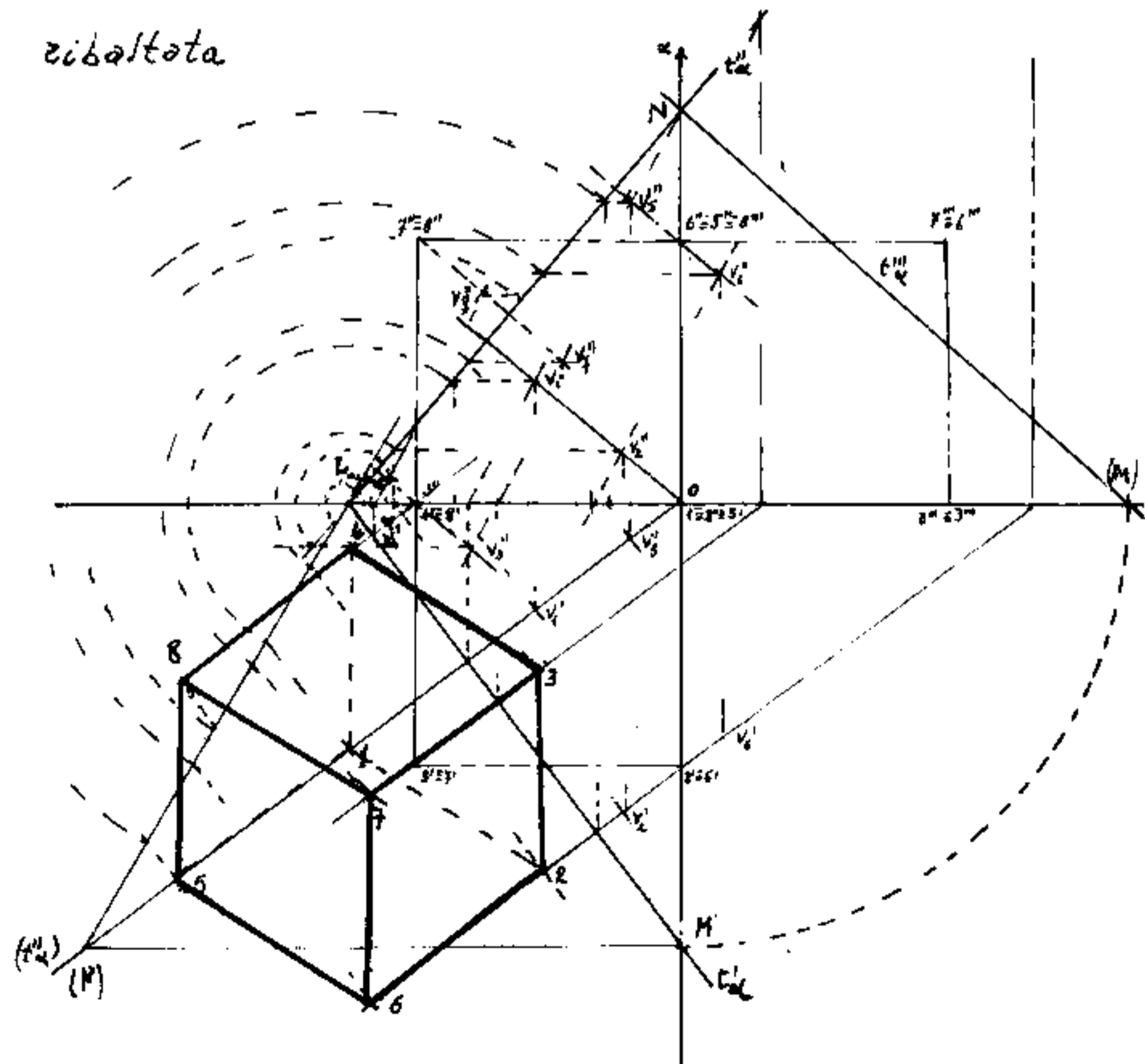
pliare le coordinate cartesiane dei punti e trasformarle in coordinate assonometriche.

Per apprezzare le semplificazioni apportate dalle convenzioni in assonometria, sviluppiamo un caso generico e ricaviamone l'assonometria con i metodi della geometria descrittiva.

Risolviamo col metodo di Monge, la proiezione di un cubo di spigolo  $u = 20/3$  su un piano  $\alpha$  che intercetta il triangolo di lati 13, 14, 15; il cubo abbia tre facce sui piani di proiezione. Tracciata LT e le tracce del terzo piano di proiezione, da LT riportiamo sulla 2<sup>a</sup> traccia di  $\Pi_3$ ;  $p = 3\sqrt{11} = \overline{ON}$  e da N la  $t''_{\alpha}$  ( $N(M) = 15$ ); e la  $t''_{\alpha} = \overline{NL} = 13$  ribaltando (M) si ha  $\overline{LM} = 14$  e si verifica:  $q = \overline{OL} = \sqrt{40}$ ;  $r = \overline{OM} = \overline{OM} = 3\sqrt{14}$ .

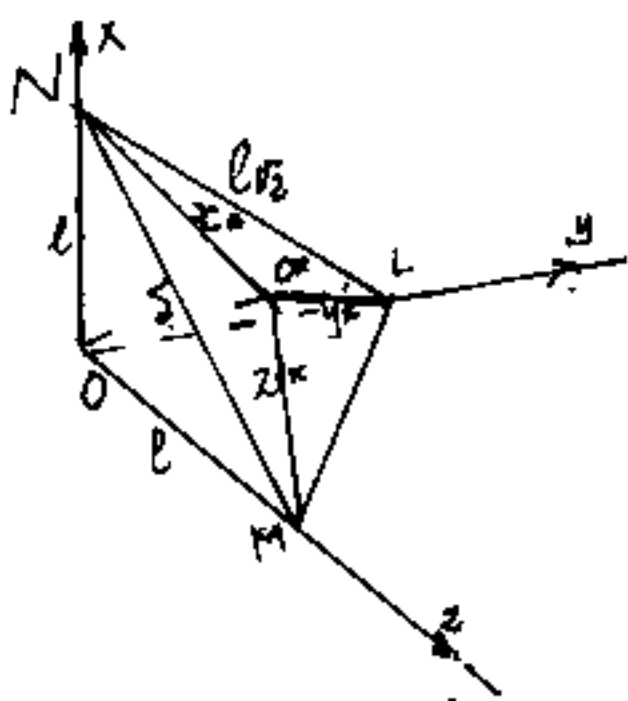
Disegniamo le proiezioni dei vertici del cubo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. e per i vertici le rette normali ad  $\alpha$  e cerchiamone i punti V di intersezione, ribaltando  $\alpha$  abbiamo l'assonometria.

ribaltata

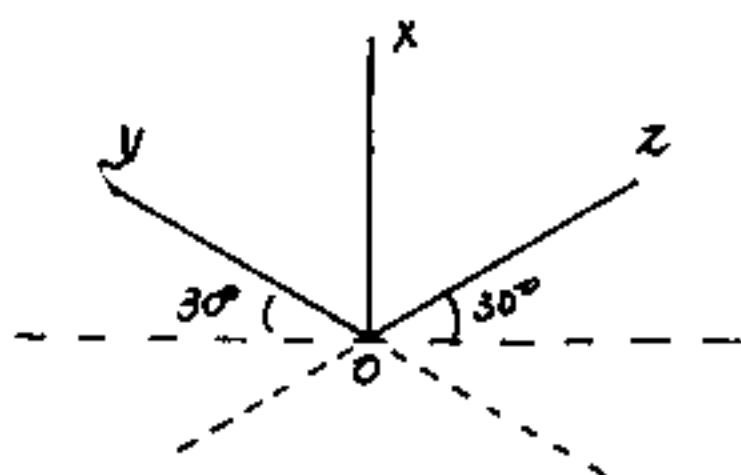
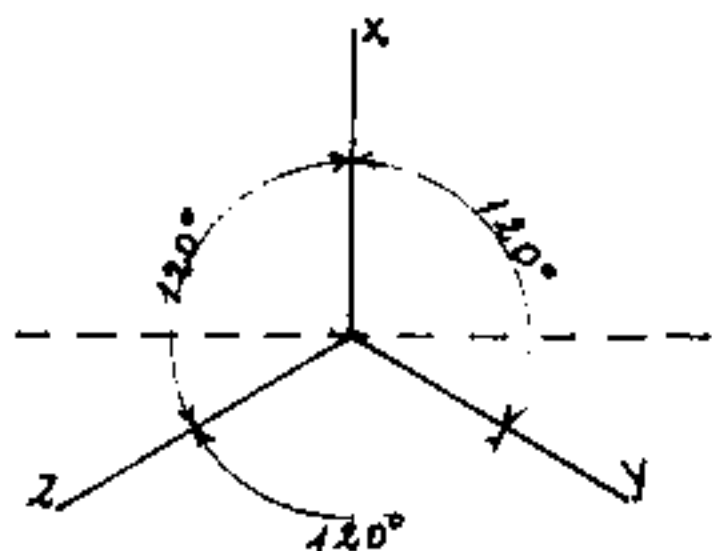


# Prospettiva assonometrica isometrica.

Se  $\overline{LM} = \overline{LN} = \overline{MN}$ , il triangolo del piano  $\alpha$  intercettato dai piani  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  è equilatero, il suo ortocentro è equidistante dai vertici, ed i tre assi  $x^*$  su  $\overline{ON}$ ;  $y^*$  su  $\overline{OL}$ ;  $z^*$  su  $\overline{OM}$ , risultano ugualmente inclinati. In assonometria isometrica:

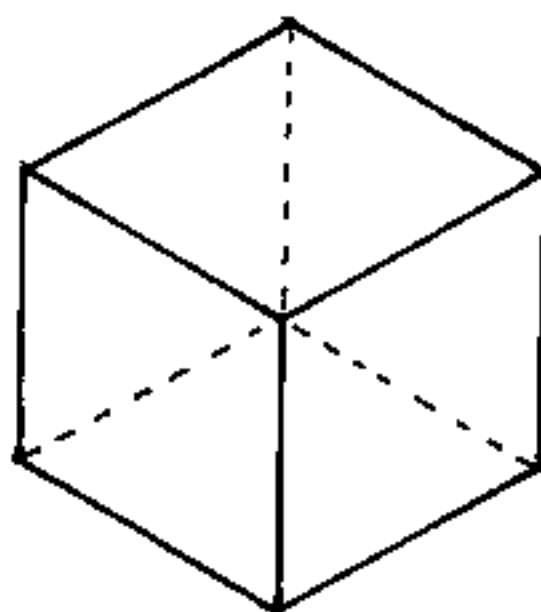


tria isometrica:  $OL = OM = ON = l$ ;  
 $\overline{LM} = \overline{LN} = \overline{MN} = l\sqrt{2}$ ;  $\overline{ON} = \overline{OM} = \overline{OL} = \frac{2}{3} \left( \frac{l\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt{3}$   
 $\overline{ON} = \overline{OM} = \overline{OL} = l\sqrt{\frac{2}{3}} = l(0,816496581..)$ .  
I testi di disegno di macchine dicono di moltiplicare i valori per lo stesso modulo: 0,816 secondo i assi.



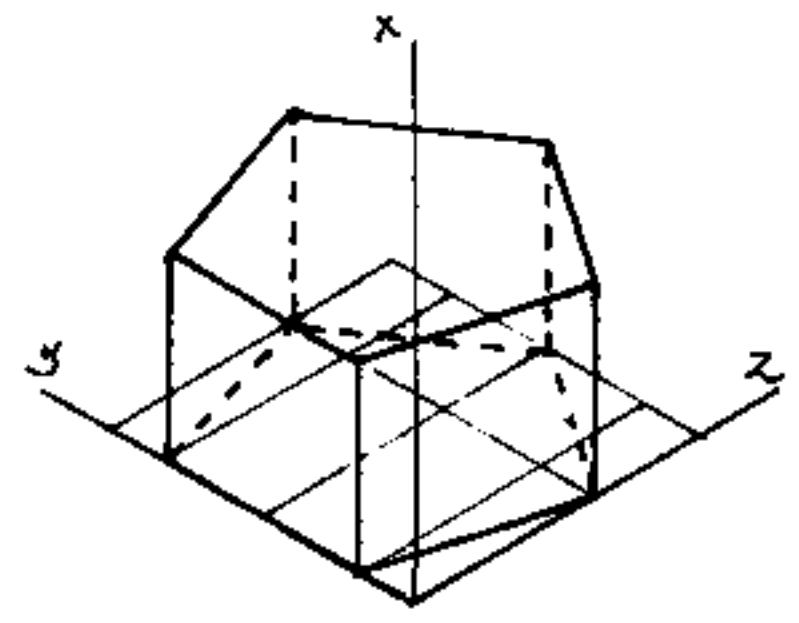
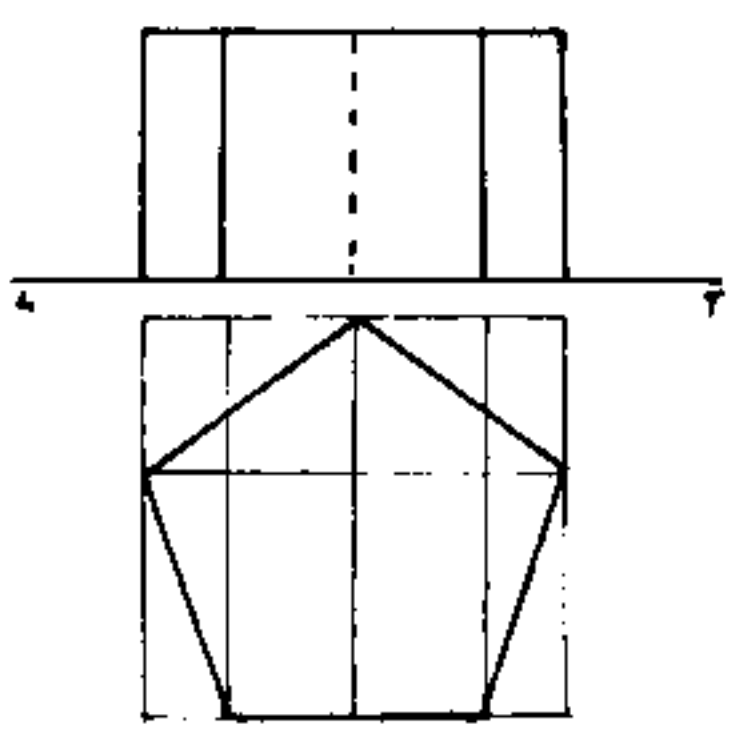
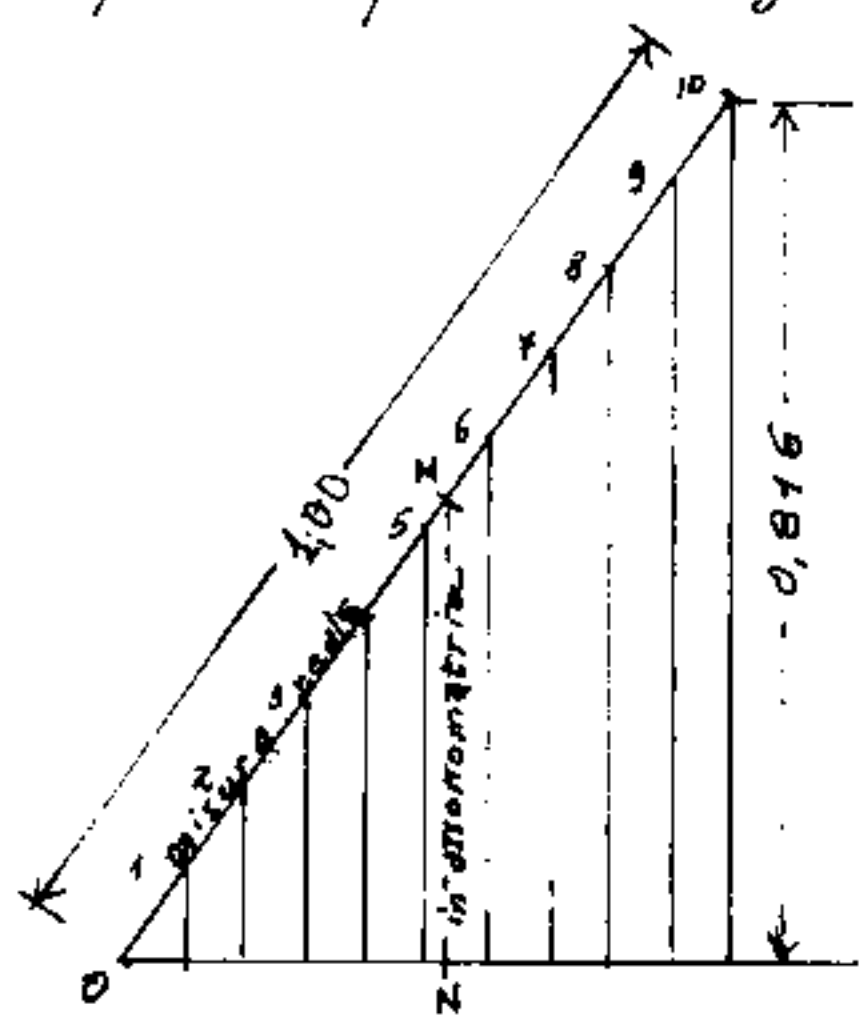
Naturalmente si possono riportare i veri valori, la proiezione sarà in scala 1:0,816; cioè noi pensiamo di proiettare un oggetto più grande:  $\frac{1}{0,816} = 1,22474$  in modo che sul disegno si leggano le vere misure.

cubo a spigoli  
paralleli agli assi in  
assonometria isometrica



Ma se sullo stesso foglio del disegno figurano la pianta e l'alzata o comunque vere grandezze in proiezione di Monge, conviene in assonometria isometrica moltiplicare i valori per 0,816 ad evitare che l'oggetto rappresentato in assonometria isometrica appaia più grande dell'oggetto in proiezione di Monge.

Per facilitare il disegno vi sono vari tipi di grafici che riportano il rapporto  $0,816496581... = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , fra i più semplici è quello di disegnare un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa = 1 ed un cateto = 0,816 (vedi figura) per ogni misura reale  $\overline{OM}$  dovremo porre in assonometria isometrica il segmento  $\overline{MN}$ .



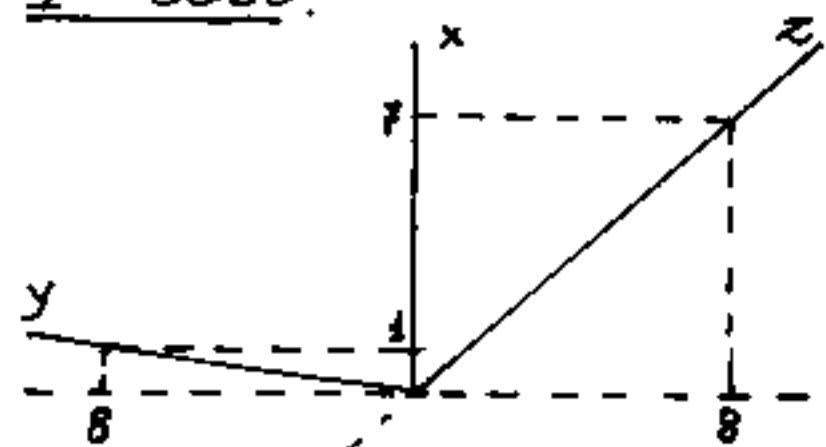
prisma pentagonale



# Prospettiva assonometrica dimetrica

Al fine di evitare l'uso del goniometro per la direzione degli assi  $y$  e  $z$  ( $x$  è verticale), sono stati standardizzati tre casi, riportando le coordinate di un punto degli assi, in numeri interi.

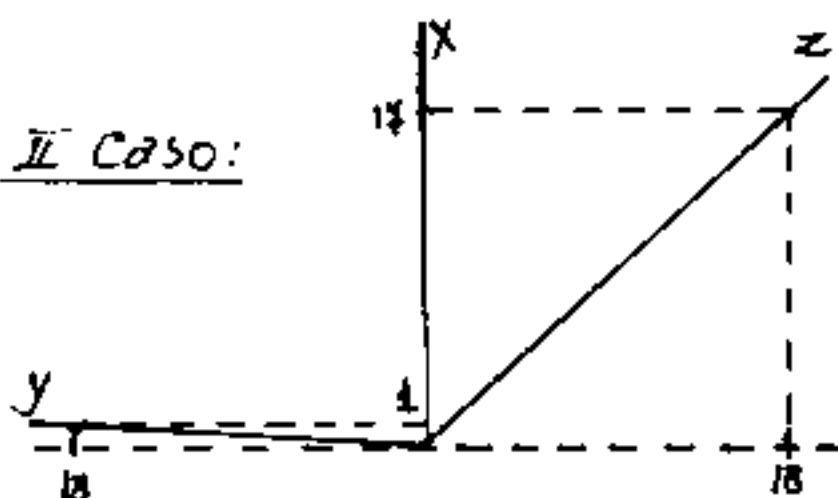
## I° caso:



riduzione della proiezione 0,942

Molto usato in disegno di macchine,  
 modulo in  $x$  ed  $y = 1$  in  $z = 1/2$ ;  
 angolo in  $z = \arctg(\frac{2}{1}) = 41^\circ 4' 9,33''$ ;  
 angolo in  $y = \arctg(\frac{1}{1}) = 45^\circ$

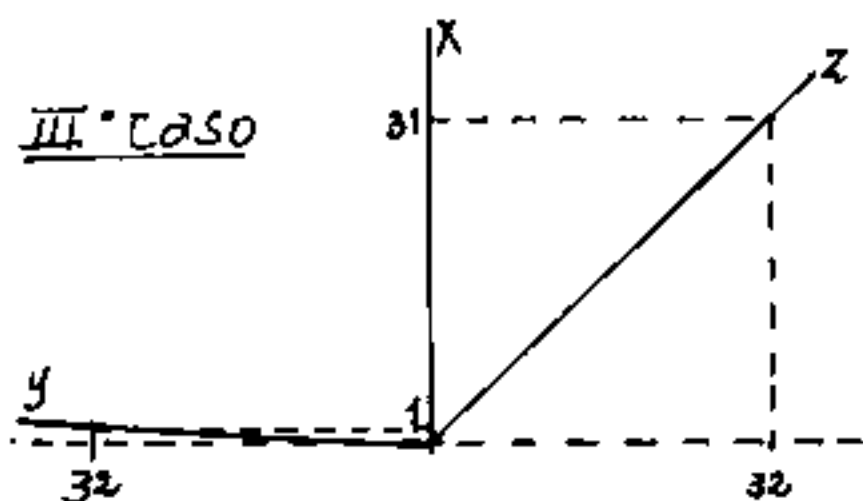
## II° caso:



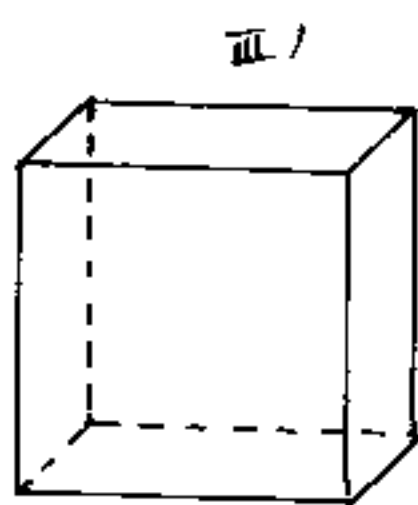
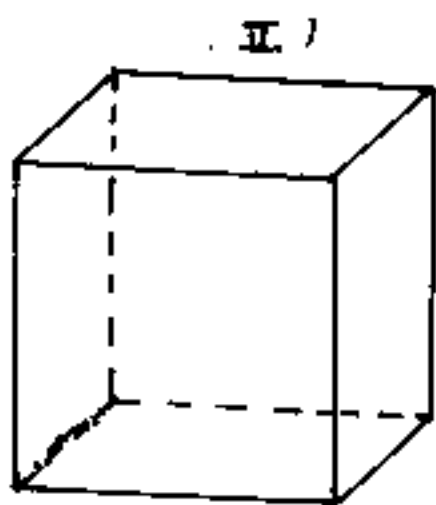
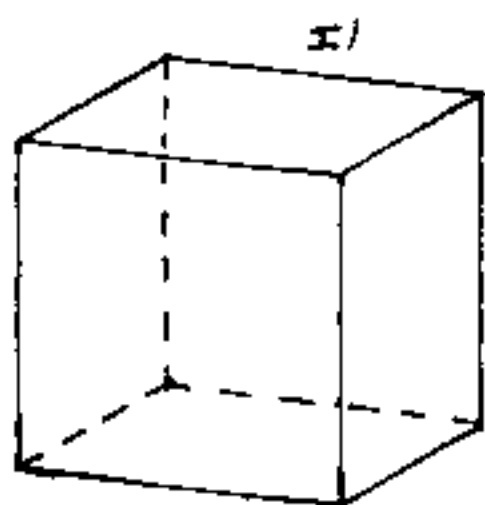
riduzione della proiezione 0,973

modulo in  $x$  ed  $y = 1$  in  $z = 1/3$   
 angolo in  $z = \arctg(\frac{3}{1}) = 43^\circ 21' 48,32''$   
 angolo in  $y = \arctg(\frac{1}{1}) = 45^\circ$

## III° caso

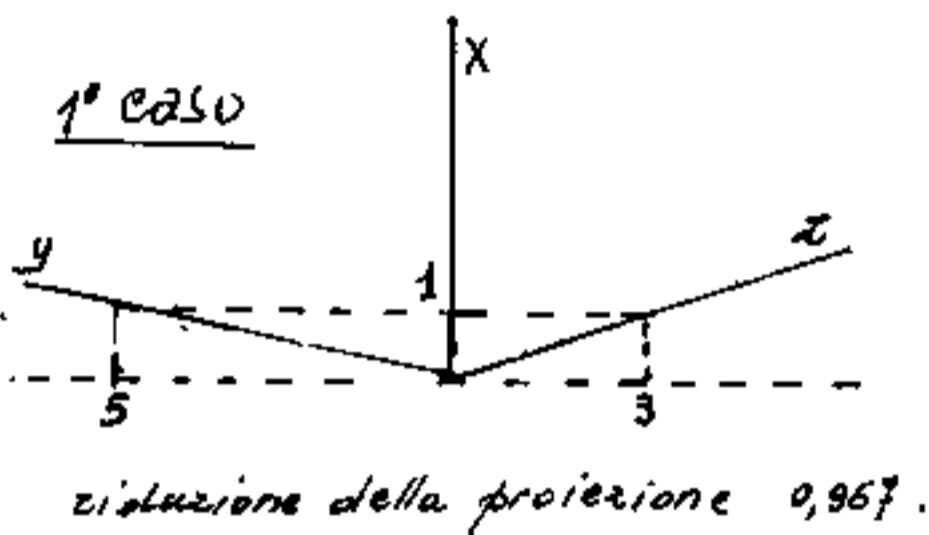


modulo in  $x$  ed  $y = 1$  in  $z = 1/4$   
 angolo in  $z = \arctg(\frac{4}{1}) = 44^\circ 5' 26,23''$   
 angolo in  $y = \arctg(\frac{1}{1}) = 45^\circ$   
 riduzione della proiezione 0,984.

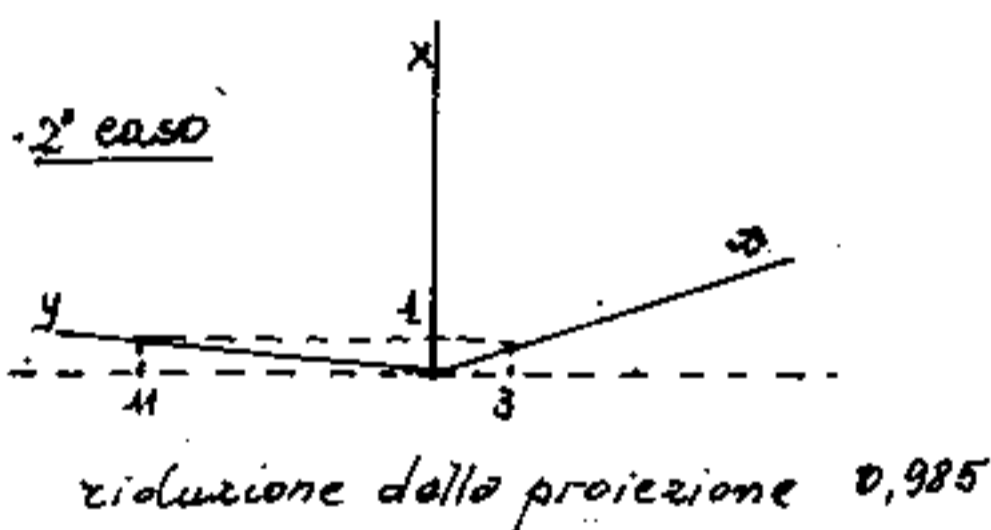


# Assonometria trimetrica

Detta anche prospettiva parallela trimetrica, anche per questa, analogamente alla dimetrica, l'inclinazione degli assi è determinata dal rapporto di numeri interi; e, praticamente i casi si riducono a due:

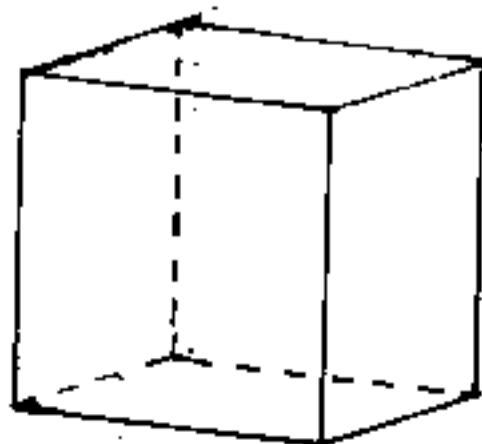
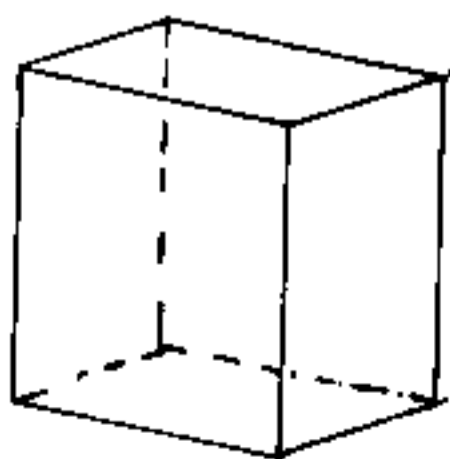


modulo in  $x = 1$   
 modulo in  $y = \frac{5}{6} = 0,83\bar{3}$   
 modulo in  $z = \frac{2}{3} = 0,6\bar{6}$   
 angolo in  $y = \arctg(\frac{1}{5}) = 11^\circ 18' 35,76$   
 angolo in  $z = \arctg(\frac{1}{3}) = 18^\circ 26' 05,82$

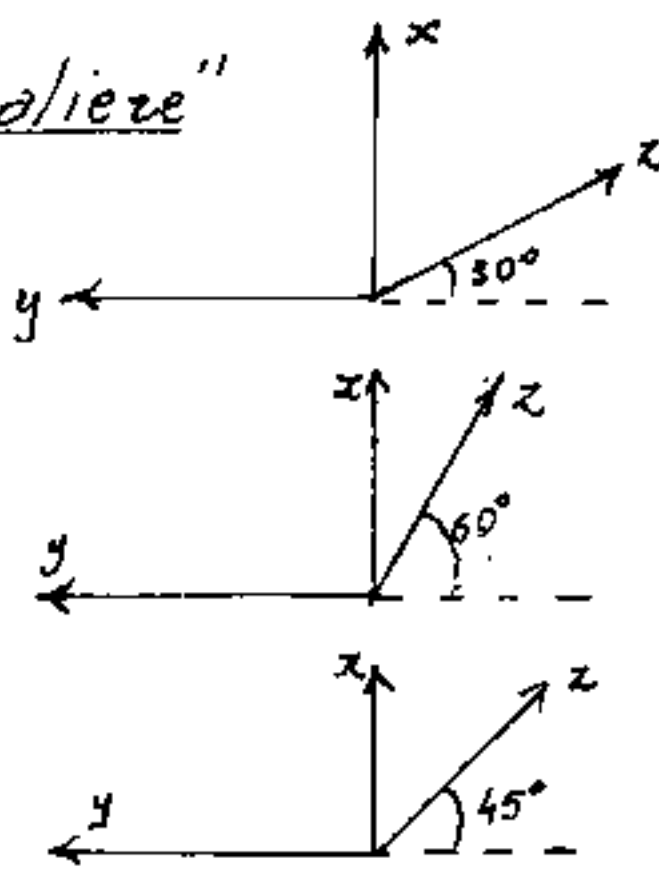
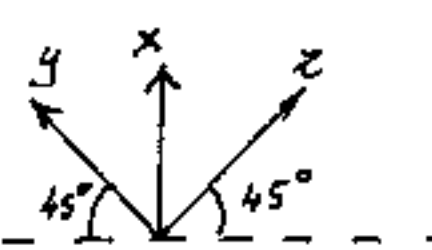

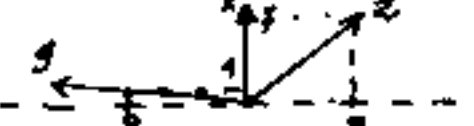
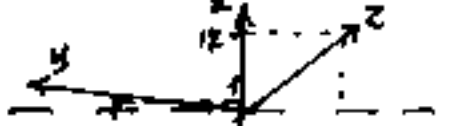





modulo in  $x = 1$   
 modulo in  $y = \frac{9}{10} = 0,9$   
 modulo in  $z = \frac{1}{2} = 0,5$   
 angolo in  $y = \arctg(\frac{1}{11}) = 5^\circ 11' 39,34$   
 angolo in  $z = \arctg(\frac{1}{3}) = 18^\circ 26' 05,82$

1° caso ← cubo → 2° caso



Cerchiamo di capire come nascono le standardizzazioni usate in assonometria che riiepiloghiamo nel seguente prospetto.

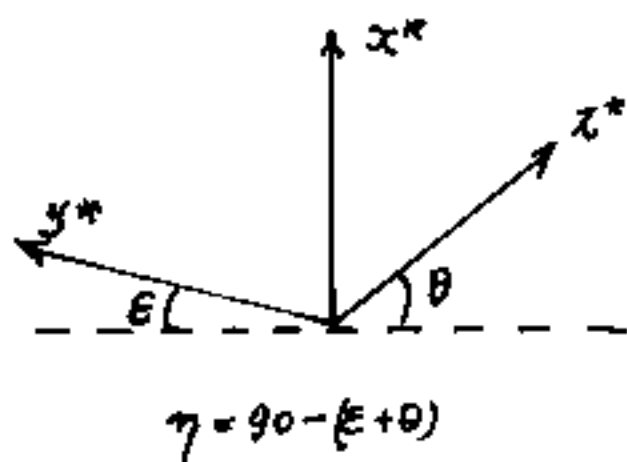
<u>Prospettiva parallela obliqua</u>		<u>scorcio o riduzione</u>		
<p>a) <u>"Cavaliera"</u></p> 		x	y	z
		1	1	$\frac{1}{2}$
		1	1	$\frac{2}{3}$
		1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
<p>b) <u>Militare</u></p> 		1	1	1
<u>Prospettiva parallela assonometrica</u>				
<p>a) <u>isometrica</u></p> 		1 (0,816)	1 (0,816)	1 (0,816)
<p>b) <u>dimetrica</u> 1)</p> 		1 (0,942)	1 (0,942)	$\frac{1}{2}$ (0,942)
<p>2)</p> 		1 (0,973)	1 (0,973)	$\frac{1}{3}$ (0,973)
<p>3)</p> 		1 (0,984)	1 (0,984)	$\frac{1}{4}$ (0,984)
<p>c) <u>trimetrica</u> 1)</p> 		1 (0,967)	$\frac{5}{6}$ (0,967)	$\frac{2}{3}$ (0,967)
<p>2)</p> 		1 (0,985)	$\frac{9}{10}$ (0,985)	$\frac{1}{2}$ (0,985)

## calcolo dei coefficienti di riduzione (moduli)

$$\text{modulo in } x^* = \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \text{tg } \varepsilon \text{ tg } \theta}$$

$$\text{" " } y^* = \text{sen } \beta = \sqrt{1 - \text{tg } \varepsilon \text{ tg } \eta}$$

$$\text{" " } z^* = \text{sen } \gamma = \sqrt{1 - \text{tg } \eta \text{ tg } \theta}$$



### Prospettiva parallela assonometrica

Isometrica:  $\alpha = \beta = \gamma = \arccos(\frac{1}{3}) = 54^\circ 44' 08,2$ ;  $\theta = \varepsilon = 30^\circ$

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta = \text{sen } \gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816496581 = \sqrt{1 - \text{tg } \varepsilon \text{ tg } \theta} \approx 0,816$$

Dimetrica: 1° caso  $\varepsilon = \arctg(\frac{1}{8})$ ;  $\theta = \arctg(\frac{5}{8})$ ;  $\text{tg } \eta = \frac{5}{64}$

$$y^* \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{8}} = 0,943729304$$

$$0,943729304 / 0,942 = 1,001 \approx 1$$

$$y^* \text{sen } \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{64}} = 0,942693945 \quad \text{posto} = 1$$

$$(0,942) \quad 1$$

$$z^* \text{sen } \gamma = \sqrt{1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{64}} = 0,469790511$$

$$0,469790511 / 0,942 = 0,4987 \approx \frac{1}{2}$$

2° caso

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{1}{8}; \quad \text{tg } \theta = \frac{15}{18}; \quad \text{tg } \eta = \frac{30}{324}$$

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{15}{18}} = 0,97341197 \approx 1$$

$$\text{sen } \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{30}{324}} = 0,97332389 \approx 1$$

$$(0,973)$$

$$\text{sen } \gamma = \sqrt{1 - \frac{15}{8} \cdot \frac{30}{324}} = 0,324206322 \rightarrow \frac{0,324206322}{0,973} = 0,3332 \approx \frac{1}{3}$$

3° caso

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{1}{32}; \quad \text{tg } \theta = \frac{31}{32}; \quad \text{tg } \eta = \frac{993}{1024};$$

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{32} \cdot \frac{31}{32}} = 0,984746953 \approx 1$$

$$\text{sen } \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{32} \cdot \frac{993}{1024}} = 0,984731458 \approx 1$$

$$(0,984)$$

$$\text{sen } \gamma = \sqrt{1 - \frac{31}{32} \cdot \frac{993}{1024}} = 0,24612475; \quad \frac{0,24612475}{0,984746953} = 0,249937 \approx 0,25 = \left(\frac{1}{4}\right)$$

# Prospettiva parallela assometrica

## trimetrica

$$\eta = 90 - (\varepsilon + \theta)$$

1° caso

$$\operatorname{tg}(\varepsilon) = \frac{1}{5} ; \operatorname{tg}(\theta) = \frac{1}{3} ; \operatorname{tg}(\eta) = \frac{14}{8}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}} = 0,966091783 \approx \underline{(0,967)}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{14}{8}} = 0,806225774 \rightarrow \frac{0,806225774}{0,966091783} = 0,8345 \approx \underline{\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$\operatorname{sen} \gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{8}} = 0,645497224 \rightarrow \frac{0,645497224}{0,966091783} = 0,6681 \approx \underline{\left(\frac{2}{3}\right)}$$

2° caso

$$\operatorname{tg}(\varepsilon) = \frac{1}{11} ; \operatorname{tg}(\theta) = \frac{1}{3} ; \operatorname{tg}(\eta) = \frac{32}{14}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3}} = 0,984731927 \rightarrow \approx \underline{0,985}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{11} \cdot \frac{32}{14}} = 0,890060555 \rightarrow \frac{0,890060555}{0,984731927} = 0,9038 \approx \underline{\left(\frac{9}{10}\right)}$$

$$\operatorname{sen} \gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{32}{14}} = 0,487950036 \rightarrow \frac{0,487950036}{0,984731927} = 0,4955 \approx \underline{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Restano così giustificati gli schemi esposti, che permettono una rapida costruzione dell'assonometria.

Vogliamo però vedere, col calcolo, l'assonometria del cubo che abbiamo proiettato con Monge su un piano che intercettava con i piani di proiezione il triangolo di lati 13, 14, 15 ove il lato 14 era sul piano orizzontale  $\Pi_1$ , 13 su  $\Pi_2$  e 15 su  $\Pi_3$ .

$$h_m = 12 \text{ per cui } \operatorname{sen}(\mu) = \frac{12}{13} ; \operatorname{sen}(\lambda) = \frac{12}{15} ; \operatorname{sen}(\nu) = \frac{14 \cdot 12}{13 \cdot 15} =$$

$$\operatorname{sen}(\nu) = \frac{56}{65} ; \cos(\varepsilon) = \operatorname{sen}(\mu) = \frac{12}{13} ; \cos(\theta) = \operatorname{sen}(\lambda) = \frac{12}{15} ; \operatorname{sen} \varepsilon = \frac{5}{13}$$

$$\sin(\theta) = \frac{3}{5}; \cos(\mu) = \frac{5}{13}; \cos(\lambda) = \frac{3}{5}; \cos(\nu) = \frac{33}{65};$$

$$\operatorname{tg}(\nu) = \frac{56}{33}; \operatorname{tg}(\lambda) = \frac{4}{3}; \operatorname{tg}(\mu) = \frac{12}{5}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\varepsilon) = \frac{5}{12}}; \boxed{\operatorname{tg}(\theta) = \frac{3}{4}}; \boxed{\operatorname{tg}(\eta) = \frac{33}{56}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \sqrt{11} = 0,829156197; \cos \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{5}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{33}{56}} = \frac{13}{4} \sqrt{\frac{1}{14}} = 0,868599036; \cos \beta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{55}{14}}$$

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{33}{56}} = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{5}{14}} = 0,74701788; \cos \gamma = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{11}{14}}$$

$$x_N^* = \overline{O^*N} = 14 \cdot \frac{33}{56} = \frac{33}{4} = 8,25; p = 3\sqrt{11}; \delta = \frac{33}{4} \sqrt{\frac{5}{11}}; 2R = \frac{65}{4}$$

$$y_L^* = \overline{O^*L} = 13 \cdot \frac{3}{4} = \frac{39}{4} = 9,75; q = 3\sqrt{14}; \delta = \frac{3}{4} \sqrt{55}; 2R = \frac{65}{4}$$

$$z_H^* = \overline{O^*M} = 15 \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{4} = 6,25; r = \sqrt{70}; \delta = \frac{3}{4} \sqrt{55}; 2R = \frac{65}{4}$$

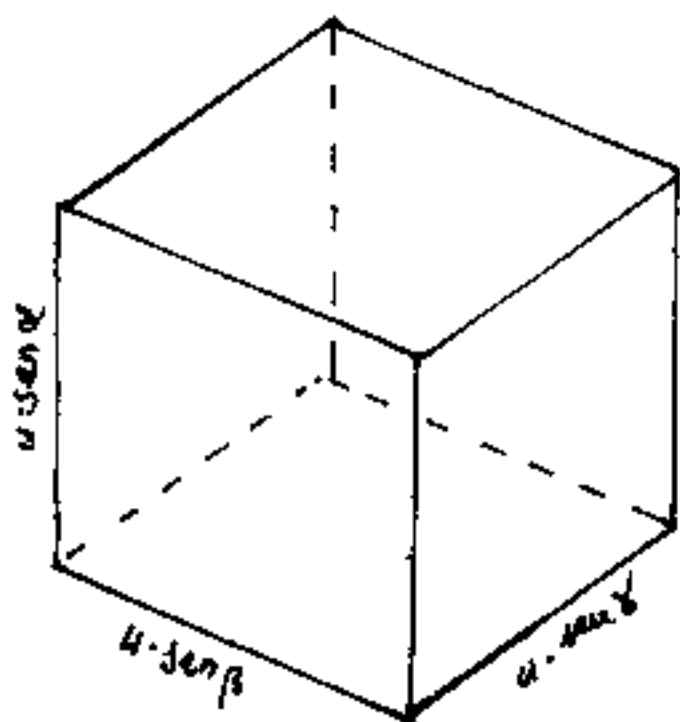
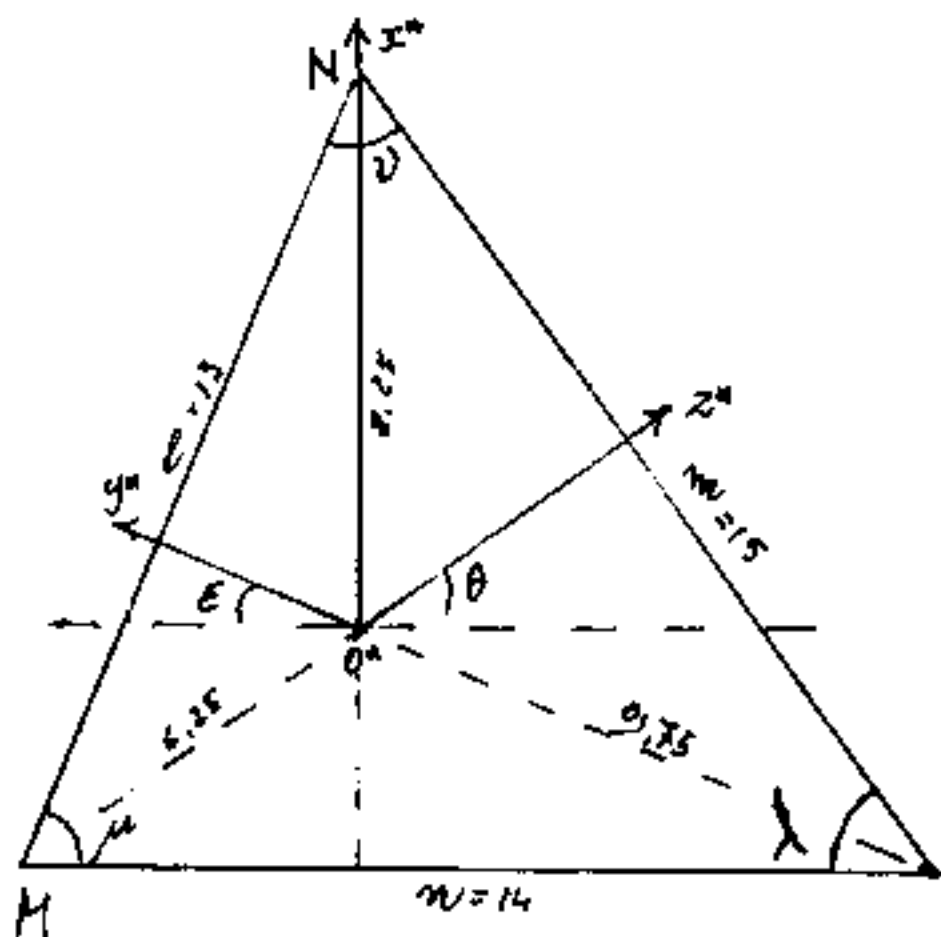
d'equazione del piano:

$$\boxed{(\sqrt{5})x + \left(\sqrt{\frac{55}{14}}\right)y + 3\sqrt{\frac{11}{14}}z = 3\sqrt{55}}$$

può scriversi anche:

$$\boxed{\frac{x}{3\sqrt{11}} + \frac{y}{3\sqrt{14}} + \frac{z}{\sqrt{70}} = 1}$$

Nella proiezione di Monge il cubo aveva lo spigolo =  $20/3 = u$  e l'unità grafica era il mezzo centimetro, basta riportare i coeff.  $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$  in scala  $20/3$ .

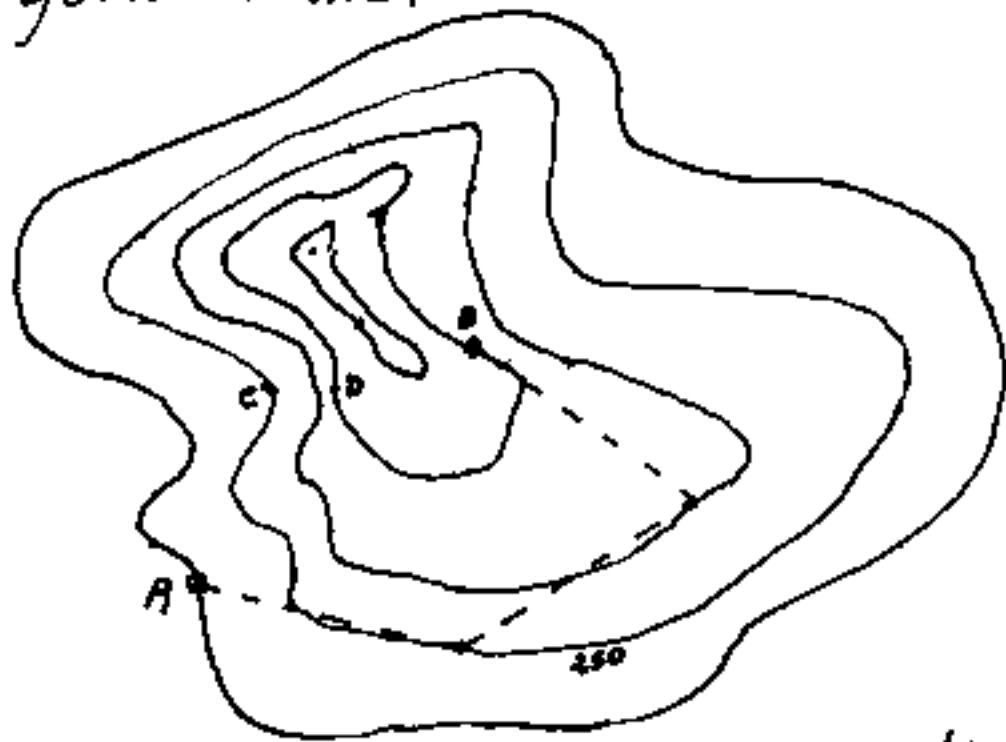


L (è sovrapponibile ribaltato)

## Le proiezioni a curve di livello

Un metodo di rappresentazione usato in topografia è quello delle proiezioni quotate detto anche a curve di livello od a isoipse, o proiezioni topografiche.

Questo metodo consiste nel sezionare l'oggetto da rappresentare, mediante piani paralleli al primo piano di proiezione (orizzontali) ed equidistanti fra loro. L'equidistanza è fondamentale e permette molte facili determinazioni geometriche.



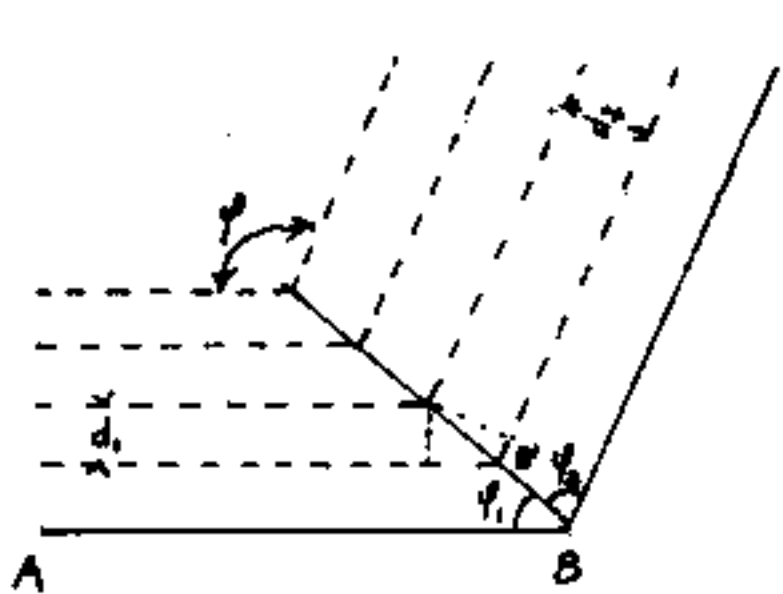
Consideriamo la proiezione a fianco; le linee (isoipse) sono le intersezioni dei piani con una collinetta. Supponiamo che il disegno sia in scala 1:25000 e che la

equidistanza delle curve di livello sia di 5 metri (piani equidistanti in quota di m.5). Si vuol costruire una strada a pendenza costante del 4,00% a partire da A. - Basta prendere una apertura di compasso di 500 m. in scala 1:25000, e con centro in A cercare l'intersezione con l'isoipsa adiacente, e da qui ripetere, facendo centro, per trovare il punto sull'isoipsa successiva, e così via. (vedi poligonale tratteggiata).

$\frac{\text{pendenza } 4,00\%}{500\text{ m}} = \frac{17}{1000}$ . La densità delle isoipse indica la maggiore o minore pendenza (o pendio) della collina. (Fra i punti C e D,

distanti orizzontalmente 130 m, vi sono 10 m. di dislivello:  $10/130 = 7,69\%$  di pendenza =  $4^\circ 23' 55,34''$ .

Consideriamo ora una isoipsa composta di due tratti rettilinei formanti un angolo  $\varphi = \widehat{ABC}$ . I due



tratti  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , sono le tracce di due piani di diversa pendenza; sia: " $e$ " l'equidistanza (in quota) delle isoipse, sia: " $d_1$ " la distanza in orizzontale delle

isoipse parallele ad  $AB$ , cioè:  $\frac{e}{d_1} =$  pendenza del piano di traccia  $AB$ ; analogamente  $\frac{e}{d_2} =$  pendenza del piano di traccia  $BC$ . Siano  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  gli angoli che la proiezione orizzontale della retta intersezione dei due piani,

forma con  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  avremo:  $\frac{d_1}{\sin \varphi_1} = \frac{d_2}{\sin \varphi_2} = \overline{BB'}$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin(\varphi - \varphi_2)}{\sin \varphi_2} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi_2 - \cos \varphi \sin \varphi_2}{\sin \varphi_2} = \frac{\sin \varphi / \operatorname{tg} \varphi_2 - \cos \varphi}{1}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{d_2 \sin \varphi}{d_1 + d_2 \cos \varphi}}$$

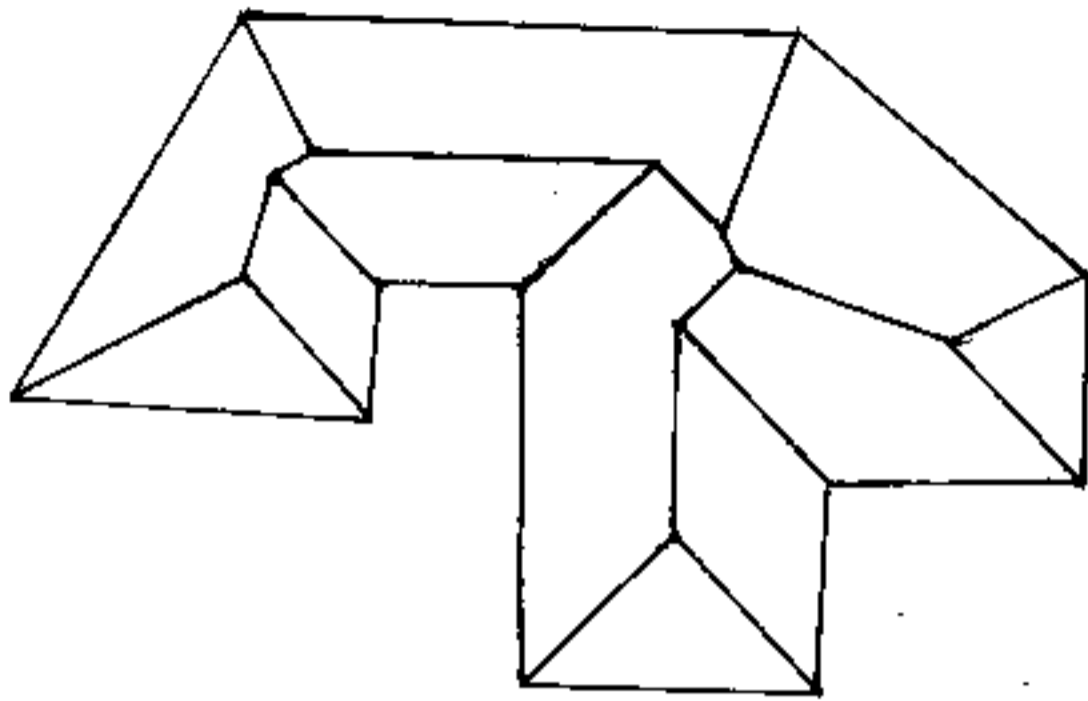
Se i due piani hanno la stessa pendenza ( $d_1 = d_2$ ) si ha:

$\operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \operatorname{tg}(\frac{\varphi}{2}) = \operatorname{tg}(\varphi_1)$ ;  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\varphi}{2}$ . La retta intersezione è la bisettrice di  $\widehat{ABC}$ .

Questa particolarità viene utilizzata per disegnare in pianta, le falde dei tetti a pendenza costante, con linea di gronda orizzontale.



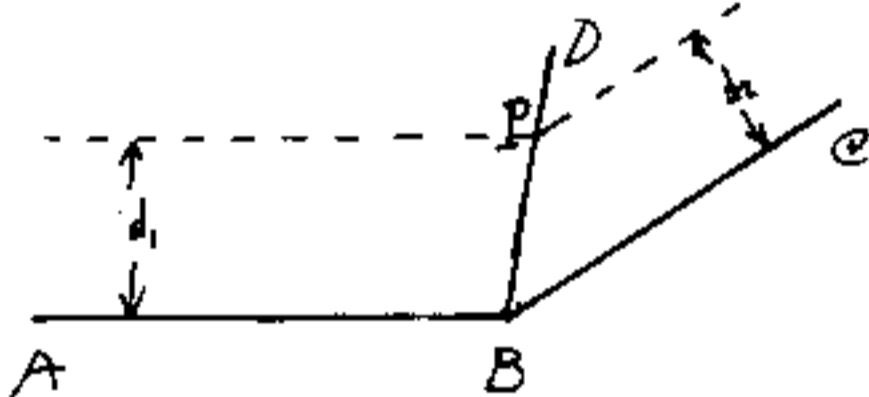
Dato il contorno del tetto, si tracciano le bisettrici, (anche se i vertici cadono fuori pianta).



Nel disegno a fianco è istruttivo rilevare da quali vertici sono partiti i singoli tratti di colmo o di conversa.

È interessante anche

il problema inverso: "Data la spezzata a livello  $\overline{ABC}$  e la linea di colmo o di conversa  $\overline{BD}$  determinare il rapporto fra le due pendenze".

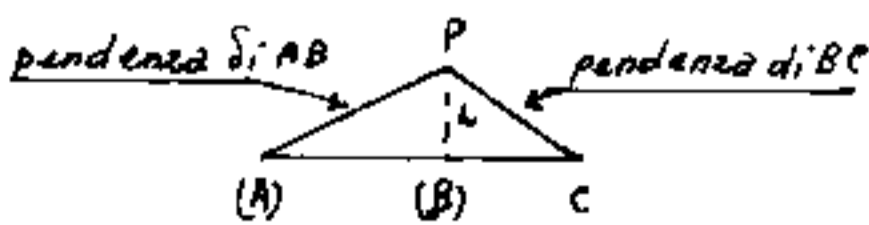


Preso su  $\overline{BD}$  un punto  $P$ , da esso tracciamo le parallele ad

$\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  determinando così  $d_1$  e  $d_2$  tali che  $d_1/d_2$  è il rapporto cercato. (Essendo  $d_1 > d_2$  la falda  $\overline{BC}$  è più inclinata.) Se

conosciamo la quota di  $P$  rispetto a  $B$  per es.  $h = \frac{h}{1}$  possiamo disegnare le pendenze delle due falde  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$

ove  $p_1$  e  $p_2$  sono rispettivamente le pendenze di  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ .



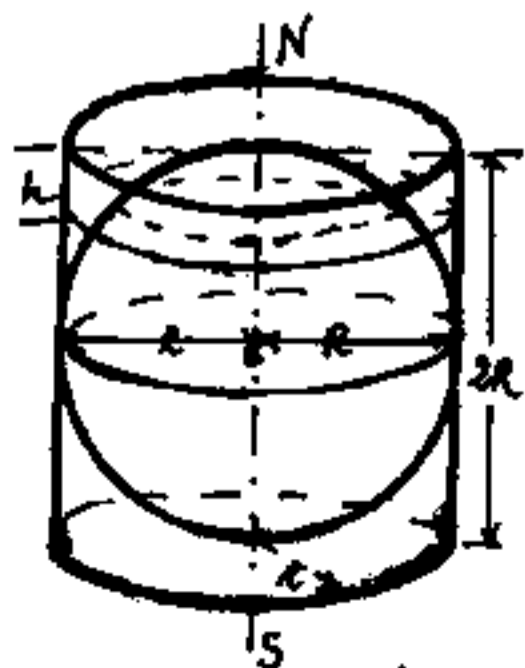
$$p_1 = \frac{h}{d_1} ; \quad p_2 = \frac{h}{d_2}$$

ove  $p_1$  e  $p_2$  sono rispettivamente le pendenze di  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ .

# Proiezioni centrali e geografiche

Si dicono "centrali" le proiezioni da un polo in campo finito. La prospettiva, (che abbiamo già trattato) è un caso di proiezione centrale.

Se ci proponiamo il problema di rappresentare, su un foglio piano, la superficie terrestre, supposta sferica, si incontrano notevoli difficoltà; perché, col foglio piano (se flessibile) è possibile involuppare un cilindro od un cono (superfici ad una curvatura), mentre non è possibile costruire una sfera o qualunque altra superficie a doppia curvatura. Quindi per rappresentare in piano una superficie sferica, dovremo venire a compromessi; cioè dobbiamo accontentarci della validità solo di qualche caratteristica. Si hanno così le proiezioni equivalenti, che mantengono la proporzionalità delle aree; le proiezioni isogoniche, che mantengono inalterati gli angoli; le proiezioni equidistanti che mantengono le distanze lungo certe linee; ecc.

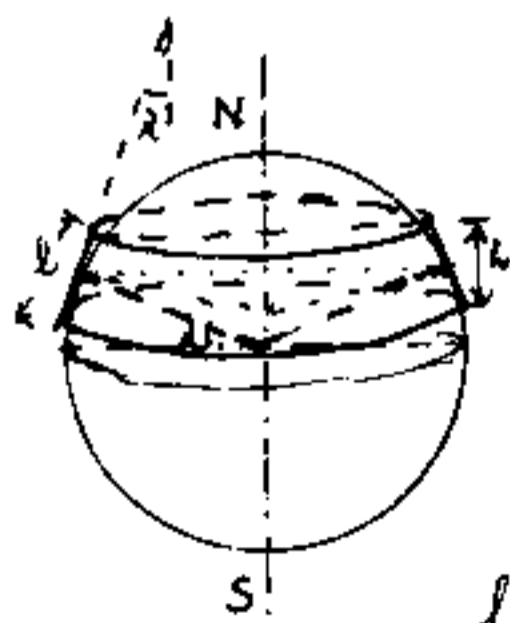


Sappiamo che l'area di una zona sferica è equivalente all'area della porzione di cilindro che la circonda:  $A = 2\pi R \cdot h$  se  $h$  è l'altezza della fascia cilindrica, per cui se proiettiamo dall'asse sul cilindro

la superficie sferica, avremo aree equivalenti, ma svolgendo

in piano la superficie cilindrica, si ha la proiezione cilindrica, ove ogni punto può essere individuato da due coordinate: "coordinate cilindriche" di cui una è un segmento sull'asse, l'altra l'angolo  $\varphi$  descritto dal raggio da una origine arbitraria. Quando svolgiamo il cilindro le coordinate cilindriche diventano cartesiane aventi in ordinate il segmento dell'asse, ed in ascisse il prodotto:  $R\varphi$  con  $R$  = raggio del cilindro e  $\varphi$  = angolo in radianti.

Questa proiezione ("equivalente") è utilizzabile solo in una stretta fascia equatoriale ove il cilindro si confonde con la superficie sferica; per zone sferiche ad altre latitudini la proiezione pur mantenendosi equivalente nell'insieme, deforma la configurazione, si pensi che l'Antartide verrebbe rappresentata come una sottile striscia molto allungata. Quindi, per zone sferiche ad altre latitudini, si considerano le proiezioni coniche



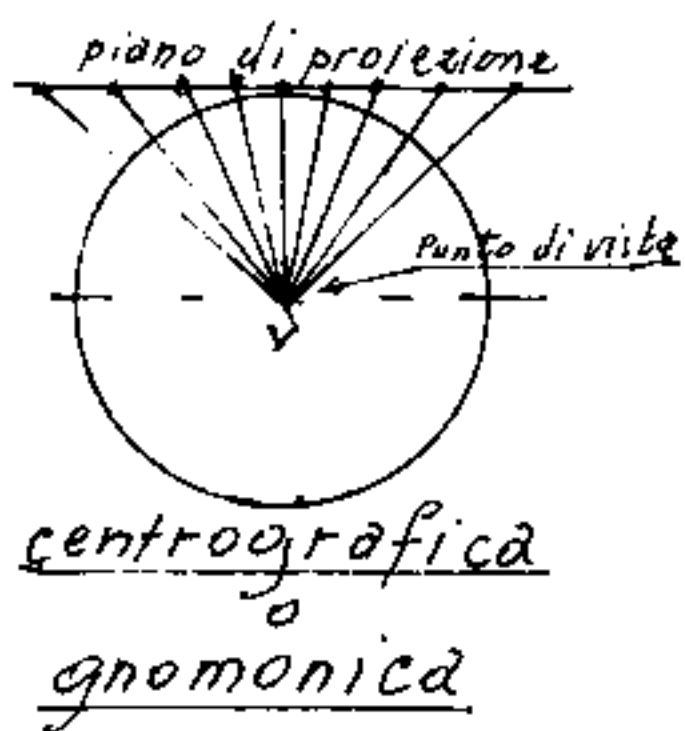
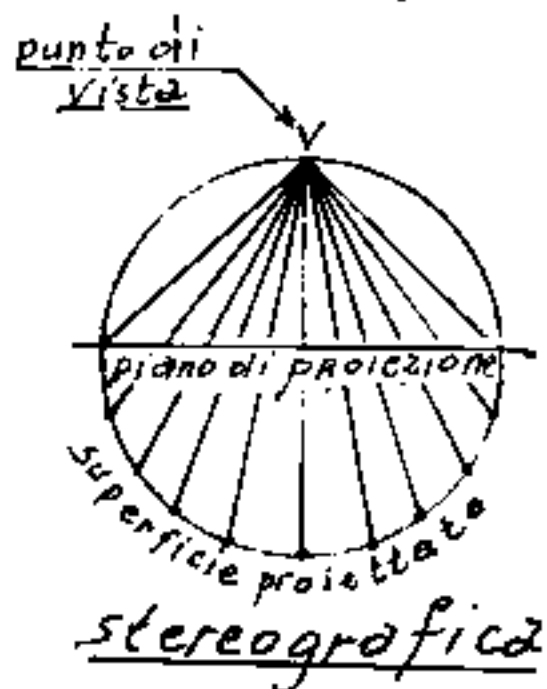
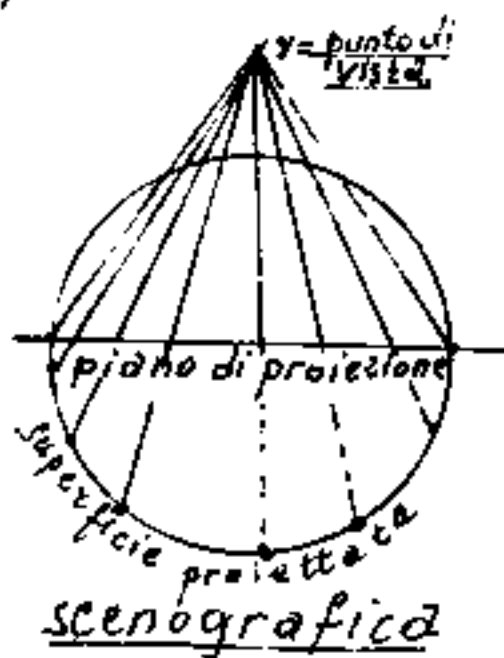
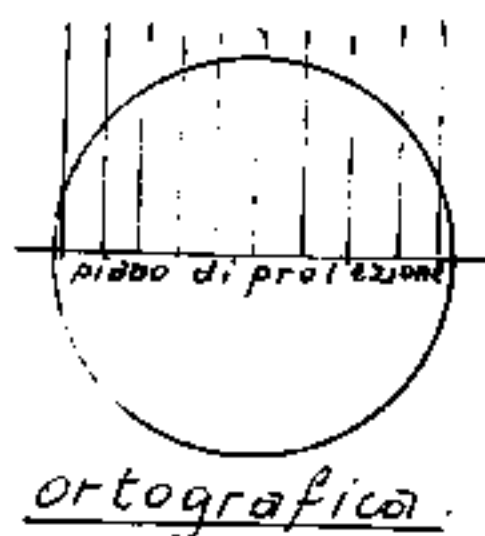
ottenute avvolgendo la zona sferica con un tronco di cono. Se  $\lambda$  è la latitudine,  $h$  sarà l'apertura del cono, il lato  $l$ , del tronco tangente la zona sferica di area:  $Rh2\pi$ ,

$l = h / \cos \lambda$ , ed il raggio:  $R \cos \lambda$  per cui l'area del

tronco di cono è  $A = \frac{h}{\cos \lambda} R \cos \lambda \cdot 2\pi = Rh2\pi$  ancora equivalente.

Se  $\lambda = 90^\circ$  (zone polari) il cono diventa un piano tangente alla sfera, e le proiezioni su piani rientrano nelle proiezioni prospettiche, che si effettuano direttamente sul piano e possono distinguersi in centrali od in parallele a seconda che il polo, o centro, o punto di vista, sia in campo finito o all'infinito. Le proiezioni prospettiche parallele si dicono ortografiche quando i raggi paralleli provenienti dal polo all'infinito sono normali al piano di proiezione detto anche quadro. Si hanno così le prospettive parallele o assonometrie. Se il polo (punto di vista) è in campo finito, si ha la prospettiva centrale detta anche prospettiva conica. Nella cartografia per la rappresentazione della superficie terrestre, le proiezioni centrali si distinguono in proiezione stereografica, se il punto di vista è sulla superficie sferica; proiezione centrografica, se il punto di vista è nel centro della sfera; proiezione scenografica se il punto di vista è esterno alla sfera. La stereografica si distingue in: polare; equatoriale; orizzontale a seconda che il punto di vista sia in un polo terrestre, o sull'equatore, oppure in un dato punto della superficie terrestre definito dalle sue coordinate geografiche. La centrografica

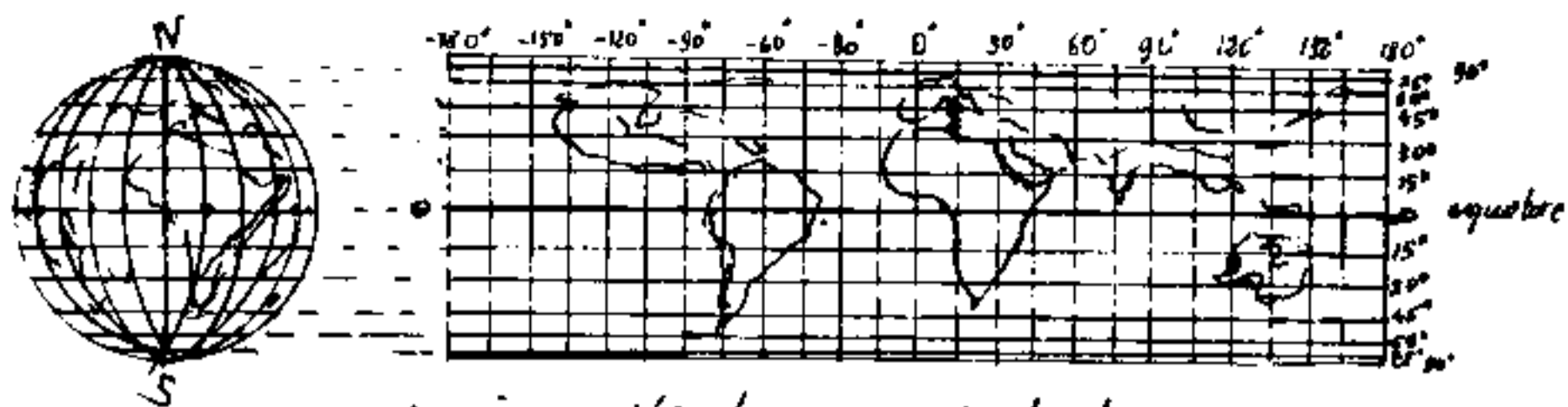
si distingue in polare od equatoriale a seconda della posizione del quadro. La proiezione centrografica



è detta anche gnomonica da gnomone che è un'asta o stilo, la cui ombra solare indica le ore. (orologio solare)

Anche le proiezioni di sviluppo sono state modificate; la cilindrica

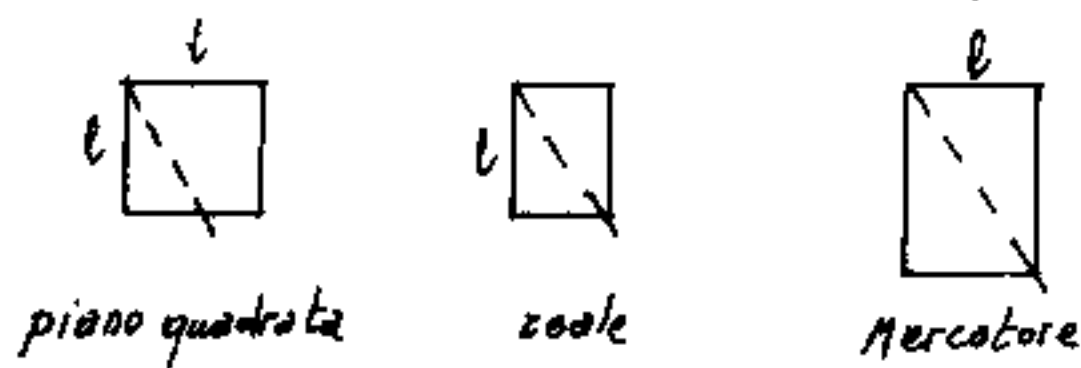
modificata da Mercatore, detta appunto proiezione di Mercatore, nelle maglie rettangolari costituite dai meridiani e dai paralleli, conserva le distanze equatoriali dei meridiani, che risultano, nella proiezione sviluppata, delle linee verticali parallele equidistanti come nella cilindrica equivalente; però mentre in quest'ultima i paralleli originariamente equidistanti, diminuiscono la distanza sempre di più nell'avvicinarsi ai poli, nella proiezione di Mercatore aumentano sempre più la distanza avvicinandosi ai poli.



proiezione cilindrica equivalente

Per capire le modifiche alla proiezione cilindrica consideriamo le maglie rettangolari formate dai meridiani e dai paralleli, se  $R$  è il raggio della sfera e  $\lambda$  l'ampiezza angolare uguale fra due successivi meridiani e due successivi paralleli; se  $l$  è la distanza all'equatore fra due successivi meridiani:  $l = R\lambda$ . Alla latitudine:  $\boxed{\kappa\lambda = \alpha}$  il raggio terrestre sul piano parallelo è  $r = R \cos(\alpha) = R \cos(\kappa\lambda)$ , per cui la distanza fra i meridiani diventa:  $l_2 = \lambda R \cos(\alpha)$   $l_2 = l \cos(\alpha)$ , mentre la distanza fra due paralleli, misurata sul meridiano terrestre è rimasta  $R\lambda = l$ . Qualora si trasformasse la proiezione cilindrica ponendo i paralleli alla stessa distanza  $l$  della distanza dei meridiani sull'equatore, si otterrebbe un reticolo di quadrati, la proiezione è detta piana quadrata; per zone presso l'equatore questa proiezione rispetta le distanze ed è pressoché conforme cioè conserva gli angoli fra due direzioni, perché ad un quadrato della proiezione corrisponde un quadrato sulla

superficie terrestre. Alla latitudine  $\alpha$  un quadrato della proiezione piana quadrata corrisponde sulla superficie terrestre ad un rettangolo avente la distanza longitudinale molto accorciata, ( $l \cos \alpha$ ), quindi gli angoli formati da una diagonale con la direzione del meridiano, sono diversi. Nella proiezione di Mercatore viene mantenuta la distanza  $l$  fra i meridiani, mentre viene accresciuta la distanza fra i paralleli:  $l_p = l / \cos \alpha$ ;



in tal modo in Mercatore le maglie sono simili a quelle reali, anche se la

scala delle misure lineari varia da maglia a maglia, però vengono mantenuti al reale gli angoli; in particolare l'angolo col meridiano e quindi utilissime in navigazione ove si viaggia orientandosi col Nord (bussola, sestante, ecc.).

La proiezione di Mercatore, detta anche cilindrico-isogonica presenta anche un'altra particolarità: Congiungendo due punti sulla carta con una retta, la retta forma lo stesso angolo coi meridiani che taglia, tale linea in navigazione è detta lossodromica, sulla superficie terrestre (nello spazio) è una spirale ed è il percorso di una nave che mantiene rotta costante.

## Proiezioni di sviluppo modificate.

Abbiamo visto le proiezioni coniche semplici, come equivalenti. Se pensiamo allo sviluppo della porzione di tronco di cono relativa ad una parte di una zona sferica, notiamo che i meridiani si sviluppano secondo rette convergenti in un punto, mentre i paralleli si proiettano sviluppati secondo archi di cerchio. Poiché alla latitudine  $\lambda$  il parallelo è lungo  $R \cos \lambda \cdot 2\pi$ , e la generatrice del cono  $\rho = R / \operatorname{tg} \lambda$ , se  $\alpha$  è l'ampiezza angolare dello sviluppo, per avere lo sviluppo dell'intero parallelo dovrà essere:  $\rho \alpha = \frac{R \cos \lambda}{\operatorname{tg} \lambda} \cdot \alpha = R \cos \lambda \cdot 2\pi$  cioè:  $\alpha = 2\pi \operatorname{sen} \lambda$ . (massimo di  $\alpha$  a quel  $\lambda$ )



La proiezione conica semplice mantiene le distanze dei meridiani sul parallelo ove il cono è tangente.

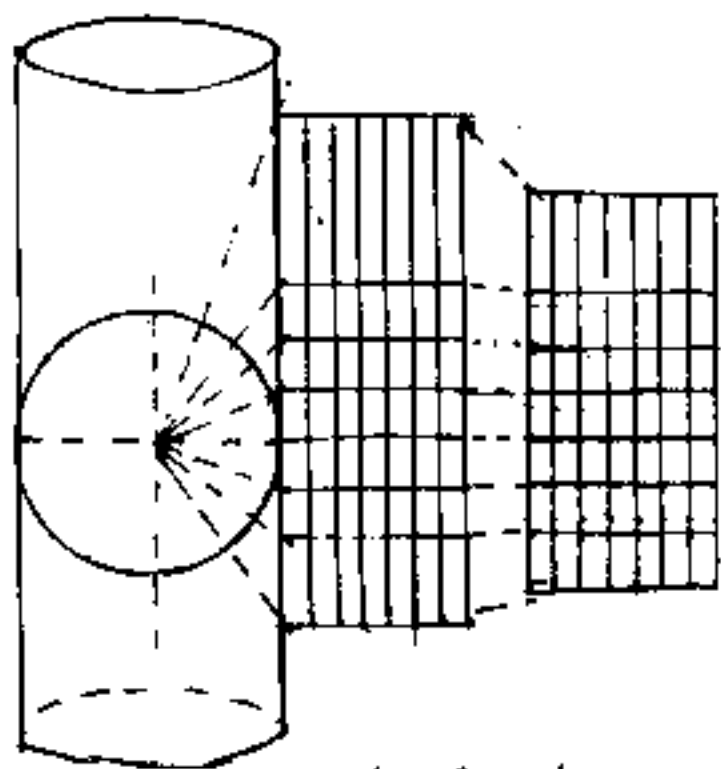
La proiezione conica di De L'Isle mantiene in scala le distanze dei meridiani su due paralleli intermedi a quello centrale, è come se il cono sezionasse la sfera su quei due meridiani queste proiezioni non sono né isogoniche, né equivalenti.

La proiezione sinusoidale ha i paralleli rettilinei equidistanti, ma i meridiani sono curve sinusoidali, salvo il centrale. (Si usa per zone equatoriali).



Nella proiezione di Bonne i paralleli sono quelli della conica semplice, i meridiani sono curvilinei e sono ottenuti assumendo come rettilineo un meridiano centrale e da esso per coordinate i punti degli altri. È una proiezione equivalente.

La proiezione cilindrica equivalente di Lambert, considera il centro di proiezione al centro della terra, ciò implica che i paralleli oltre una certa latitudine siano troppo distaccati, per cui il Lambert fa un avvicinamento dei paralleli originariamente



Proiezione di Lambert.

equidistanti e poi distanziati troppo al crescere della latitudine, ciò implica che le regioni polari risultino un po' schiacciate, la proiezione mantiene l'equivalenza delle aree.

Altre proiezioni che considerano rettilinei i segmenti delle maglie costituite da paralleli e meridiani sono le proiezioni rettangolari oppure le proiezioni trapezoidali costituite da trapezi rettilinei, e si presta molto bene per zone estese.

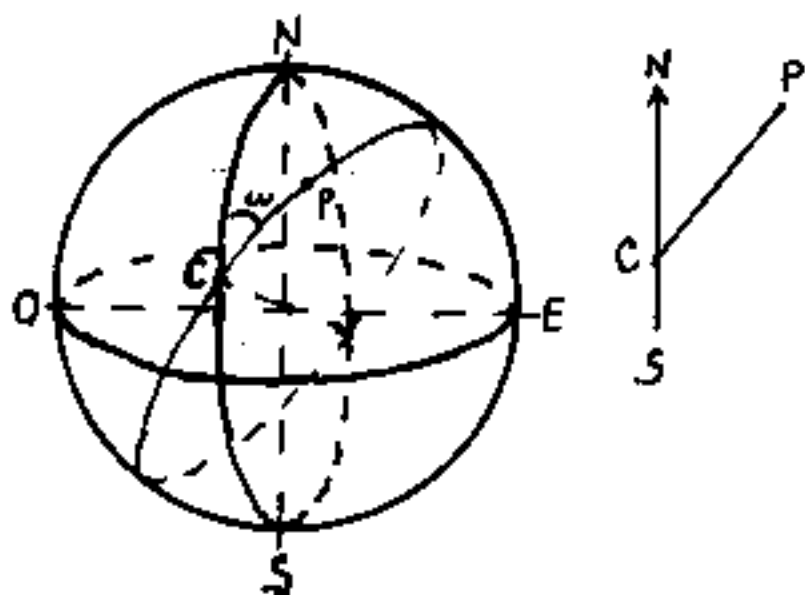
## Proiezioni azimutali

È detto "azimut" l'angolo che una direzione forma con la direzione Nord. Il rilievo mediante azimut è molto usato in topografia nella misura di poligonali, ove la differenza di due azimut in uno stesso vertice ci dà l'angolo fra i due lati della poligonale che concorrono in quel vertice.



Note le lunghezze dei lati si verifica la poligonale calcolando la distanza  $\overline{AB}$  cioè le coordinate di A e di B già determinate per esempio per triangolazione o per poligonazione di ordine superiore.

Per punti su una superficie sferica, sia "C" il punto centrale del territorio da rappresentare; "c" è detto centro di proiezione, sia SCN il meridiano passante per C, sia P il punto da rilevare,



fra le infinite circonferenze terrestri determinate dal fascio di piani passanti per CP consideriamo la massima che ha il centro, nel centro della sfera e chiameremo con "azimut" l'angolo diedro del piano meridiano col piano

della circonferenza massima che è anche l'angolo formato dalle tangenti in  $C$  al meridiano ed alla circonferenza massima per  $CP$ , e che ordinariamente (e impropriamente) viene detto l'angolo del meridiano (linea curva), con la circonferenza massima (linea curva). Anche la distanza  $\widehat{CP}$  è misurata sull'arco di circonferenza massima, ed è minima rispetto ai possibili archi di cerchio sulla superficie terrestre. Nel riportare in piano, il rilievo, l'angolo  $w$ , (azimut) deve restare immutato, mentre la distanza rettificata dell'arco  $\widehat{CP}$  può subire modifiche in modo da dare caratteri particolari a quella:

proiezione azimutale, v'è quindi la proiezione azimutale equivalente ove all'arco  $\widehat{CP}$  si sostituisce la corda  $\overline{CP}$ , gli azimut sono gli stessi, così facendo si ha l'equivalenza delle aree; mentre nella proiezione azimutale equidistante le distanze sono proporzionali all'arco  $\widehat{CP}$  raddrizzato, ma la figura risulta molto deformata e non è né equivalente, né isogonica.

Le proiezioni di planisferi, come proiezione di Mollweide, di Hammer, di Eckert, (sinusoidale ed ellittica) sono più inerenti alla cartografia e potranno essere dettagliate in casi specifici.

Riportiamo una tabella delle proiezioni.

# PROIEZIONI

di sviluppo

{ Su piani ribaltabili  
sul quadro

{ doppia ortogonale o di Monge  
- tripla ortogonale (col III piano di proiezione)  
- esa ortogonale (disegno di macchine)

{ su superfici ad  
una curvatura  
sviluppabili in  
piano sul quadro

{ - cilindriche { cilindrica semplice  
equivalente di Lambert  
modificata di Mercatore  
- sinusoidale  
- coniche { conica semplice  
conica di De Lisle  
coniche modificate } proiezione di Bonne  
" trapezoidale

Parallela  
ortografica  
con polo all'infinito e raggi  
normali al piano

polare  
se il quadro è tangente  
alla sfera in un polo (N.S.)  
equatoriale  
se il quadro è tangente  
alla sfera all'equatore.

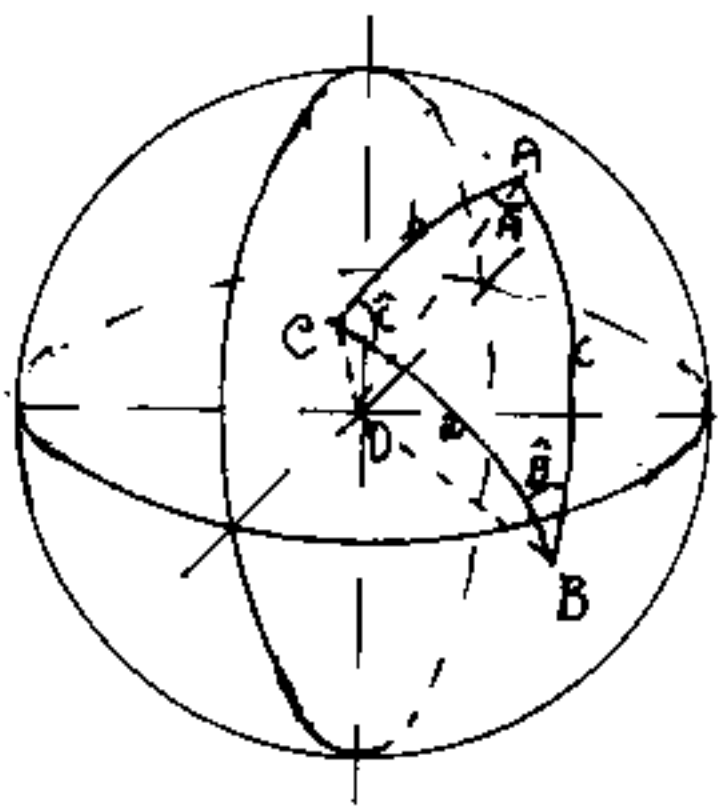
centrale  
con polo in campo  
finito

stereografica  
se il polo o centro è  
sulla superficie sferica  
centrografica  
se il polo o centro è nel  
centro della sfera  
scenografica  
se il polo o centro è  
esterno alla sfera

Polare se il polo o  
centro di proiezione è  
sui poli terrestri (N.S.)  
equatoriale se il polo  
o centro è sull'equatore  
orizzontale se il polo o  
centro è in un dato punto della  
superficie terrestre } azimutale { equidistante  
equivalente

Polare se il quadro è  
tangente sui poli terrestri (N.S.)  
equatoriale se il quadro  
è tangente all'equatore

# Cenni di trigonometria sferica.



Dati tre punti  $A, B, C$ , sulla superficie di una sfera, dite-  
mo triangolo sferico la figu-  
ra ottenuta congiungendo i  
punti  $A, B, C$  con archi di  
cerchio massimo  $\widehat{AB}; \widehat{AC}; \widehat{BC}$ ;  
che sono detti lati del trian-

golo sferico. (Sulla sfera, sono linee geodetiche)

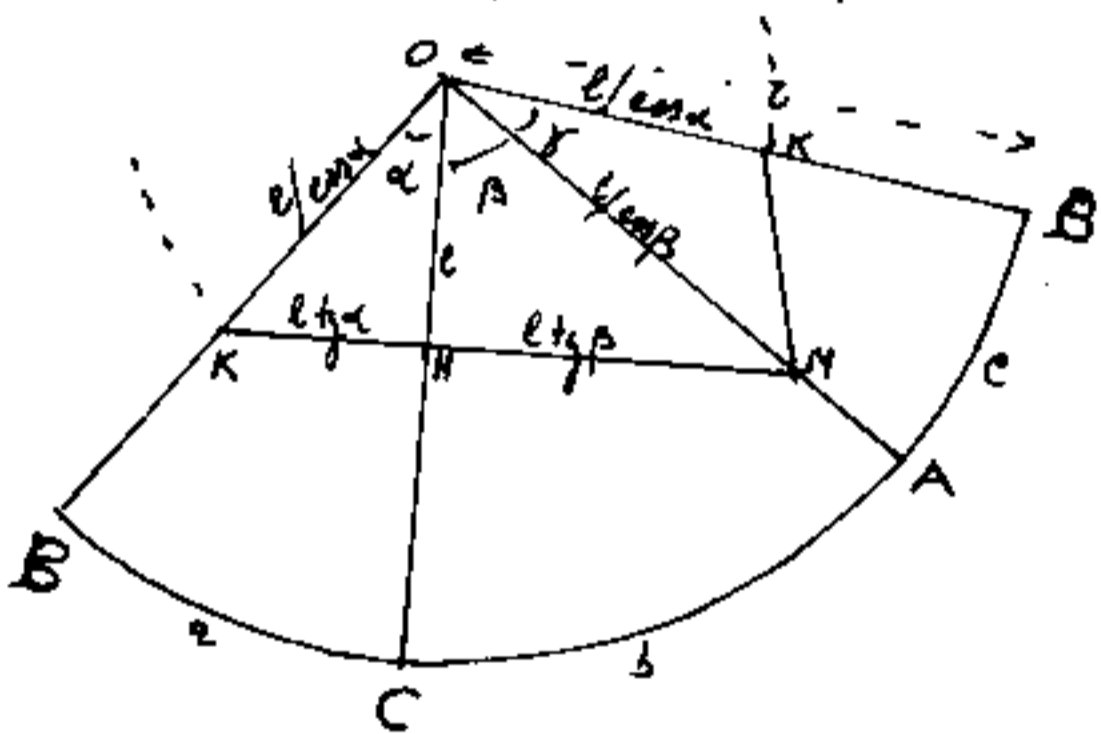
Se uniamo i punti  $A, B, C$ , col centro della sfera otte-  
niamo tre settori circolari piani, delimitati da due rag-  
gi e dal corrispondente lato del triangolo sferico. Tali  
settori piani formano un triedro di centro  $O$  ove  
gli angoli delle facce sono dati rispettivamente da:  
 $\widehat{AB}/r$ ;  $\widehat{AC}/r$ ;  $\widehat{BC}/r$ ; in radianti; con  $r =$  raggio della  
sfera. Invece gli angoli diedri fra le facce si ot-  
tengono sezionando perpendicolarmente al raggio  
comune alle due facce. L'angolo solido del trie-  
dro sarà l'area della superficie sferica deli-  
mitata dal triangolo sferico e divisa per  $r^2$ .

Mentre per determinare un triangolo piano occorre-  
no tre elementi di cui almeno una misura lineare; per  
determinare il triangolo sferico, (noto  $r$ ), gli ele-

menti possono essere tutti angoli; - d'altra parte nel triangolo sferico, si noti che ai "lati": "a, b, c," corrispondono gli angoli nelle facce del triedro; agli "angoli": "A, B, C," corrispondono gli angoli diedri formati dalle facce del triedro. Un triedro è determinato se si conoscono tre elementi (i tre angoli delle facce, oppure i tre angoli diedri.) - Siano quindi:

$$\widehat{BC}/r = a/r = \alpha; \quad \widehat{AC}/r = b/r = \beta; \quad \widehat{BA}/r = c/r = \gamma$$

gli angoli delle facce del triedro che supponiamo di sviluppare in piano. Tracciamo una perpendicolare al segmento



perpendicolare al segmento

$$\overline{OC} = r \text{ e sia } \overline{OH} = l$$

$$\overline{OK} = l/\cos \alpha; \quad \overline{OM} = l/\cos \beta;$$

$$\overline{KH} = l \tan \alpha; \quad \overline{HM} = l \tan \beta$$

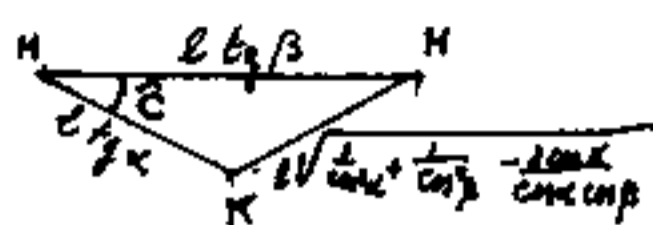
calcoliamo ora il lato

$\overline{MK}$  opposto all'angolo  $\gamma$ ,

applicando Carnot. 
$$\overline{MK}^2 = \frac{l^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{l^2}{\cos^2 \beta} - 2 \frac{l^2 \cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Supponiamo ora di rimontare il triedro sviluppato, il triangolo  $KHM$  giace su un piano perpendicolare ad  $\overline{OC} = r$  per cui l'angolo in  $H$  è anche l'angolo diedro fra le facce adiacenti  $\overline{OC}$  cioè è l'angolo in  $C$  del triangolo sferico.

Consideriamo quindi il triangolo piano MHK ottenuto per intersezione del triedro di vertice O con un piano normale ad  $\overline{OC}$  e calcoliamo l'angolo in  $H = \hat{C}$ .



Applicando ancora Carnot si ha:

$$\cos(\hat{C}) = \frac{l^2 \tan^2 \alpha + l^2 \tan^2 \beta - l^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - \frac{2 \cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta} \right)}{2 l^2 \tan \alpha \tan \beta}.$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{\frac{\sec^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sec^2 \beta - 1}{\cos^2 \beta} + \frac{2 \cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}}{2 \frac{\sec \alpha \sec \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{2 \cos \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta}{2 \frac{\sec \alpha \sec \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

ed analogamente per le altre facce si ha che gli angoli diedri in  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  sono dati da:

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sec \beta \sec \gamma} = \frac{\cos \frac{a}{c} - \cos \frac{b}{c} \cos \frac{c}{c}}{\sec \frac{b}{c} \sec \frac{c}{c}}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sec \alpha \sec \gamma} = \frac{\cos \frac{b}{c} - \cos \frac{a}{c} \cos \frac{c}{c}}{\sec \frac{a}{c} \sec \frac{c}{c}}$$

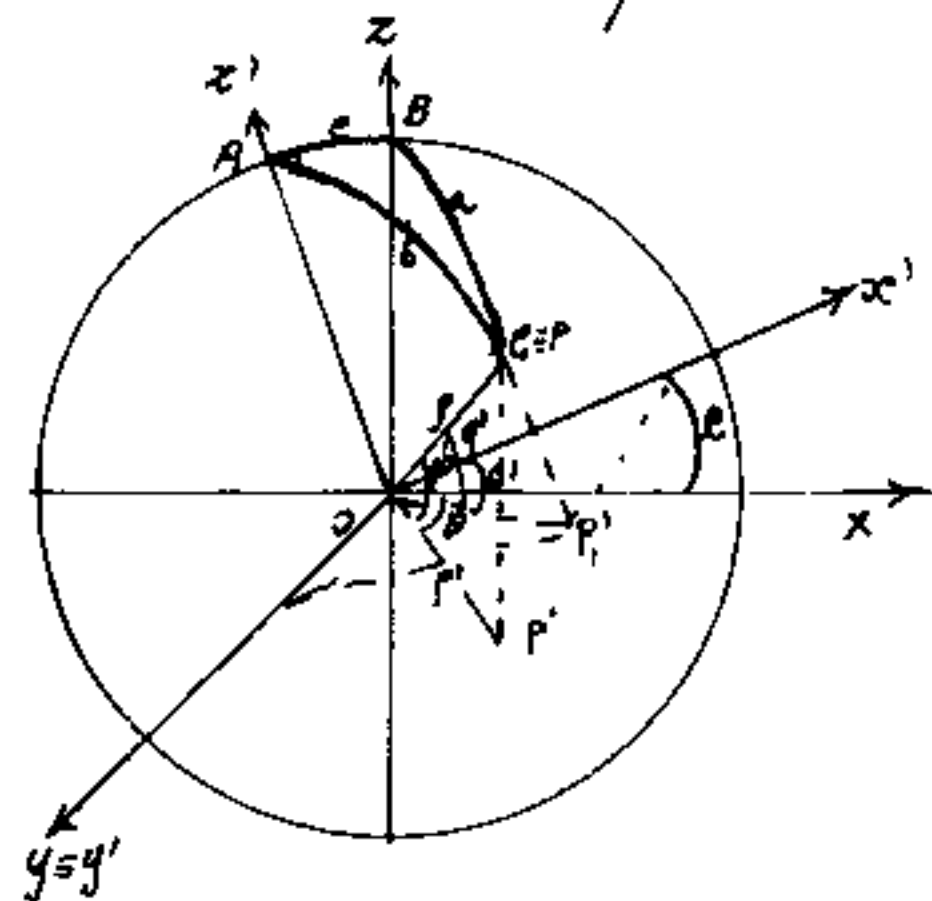
$$\cos \hat{C} = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sec \alpha \sec \beta} = \frac{\cos \frac{c}{c} - \cos \frac{a}{c} \cos \frac{b}{c}}{\sec \frac{a}{c} \sec \frac{b}{c}}$$

Se consideriamo  $t=1$ , come ordinariamente abbiamo già posto in trigonometria piana, evidenziando  $\cos(a)$ ;  $\cos(b)$ ;  $\cos(c)$ ; abbiamo:

$$\begin{cases} \cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\hat{A}) \\ \cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\hat{B}) \\ \cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\hat{C}) \end{cases} \quad \text{I}$$

Questo gruppo di formule è detto: "formule del coseno" e consentono di calcolare un lato del triangolo sferico quando sono noti gli altri due lati e l'angolo diedro sul vertice opposto al lato. Oppure noti i tre lati consentono di calcolare i tre angoli diedri nei vertici.

Ordinariamente per ricavare le formule di trigonometria sferica si parte diversamente. Consideriamo infatti con origine nel centro della nostra sfera di raggio unitario, tre diversi sistemi di riferimento dei suoi punti di superficie:



- 1°) Un sistema cartesiano  $oxyz$  ortogonale.
- 2°) Un altro sistema cartesiano ortogonale  $ox'y'z'$  avente in comune col precedente l'origine  $O$  e l'asse  $y'=y$  intorno al quale è ruotato dell'angolo  $(c)$ .



3°) Un sistema di coordinate polari:  $\rho, \theta, \varphi$  con origine  $O$  comune agli altri sistemi, ove:  $\rho = r =$  raggio della sfera (unitario),  $\theta =$  angolo sul piano  $xy$  formato dalla  $x$  e dalla proiezione di  $\rho$ ;  $\varphi =$  angolo nel piano normale ad  $xy$  formato da  $\rho$  e dalla sua proiezione su  $xy$ . Analogamente  $\theta'$  e  $\varphi'$  in riferimento ad  $x'y'z'$ .

Se facciamo in modo che l'asse  $z$  passi per  $B$  e l'asse  $z'$  per  $A$ , la rotazione ( $c$ ) del sistema:  $x'y'z'$  rispetto ad  $xyz$  è l'angolo ( $c$ ) della faccia  $AOB$  del triedro e corrisponde al lato  $c$  del triangolo sferico con  $\rho = 1$ .

Ricorriamo le formule per la rotazione di assi:

$$\begin{cases} x = x' \cos(c) - z' \sin(c) \\ z = x' \sin(c) + z' \cos(c) \\ y = y' \end{cases}$$

Consideriamo ora un generico punto  $P$  non allineato con  $A, B$ , anzi consideriamo  $P$  coincidente con  $C$  del triangolo sferico  $A, B, C$ .

Il nostro punto  $P$  sia individuato dalle coordinate polari che trasformiamo in cartesiane; avremo:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \theta \\ y = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ z = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \rho \cos \varphi' \cos \theta' \\ y' = \rho \cos \varphi' \sin \theta' \\ z' = \rho \sin \varphi' \end{cases}$$

sostituiamo questi valori nelle formule per la rotazione

zione degli assi e posto  $\rho = 1$ , abbiamo:

$$\begin{cases} \cos \varphi \cos \theta = \cos \varphi' \cos \theta' \cos(c) - \sin \varphi' \sin(c) \\ \sin \varphi = \cos \varphi' \cos \theta' \sin(c) + \sin \varphi' \cos(c) \\ \cos \varphi \sin \theta = \cos \varphi' \sin \theta' \end{cases}$$

Dalla figura notiamo:  $a = 90^\circ - \varphi$ ;  $b = 90^\circ - \varphi'$ ;  $c = c$   
e che gli angoli diedri A e B sono  $A = \theta'$ ;  $B = 180^\circ - \theta$

Sostituendo questi valori nelle formule trovate, si ha:

$$\begin{cases} -\sin a \cos B = \sin b \cos A \cos c - \cos b \sin c \\ \cos a = \sin b \sin c \cos A + \cos b \cos c \\ \sin a \sin B = \sin b \sin A \end{cases}$$

La prima di queste formule lega fra loro ben cinque elementi del nostro triangolo sferico.

La seconda è una delle formule del coseno che abbiamo già trattato.

La terza che può essere scritta nella forma:  $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}$  presenta un teorema di proporzionalità analogo al teorema dei seni in trigonometria piana.

Sostituendo nella prima:  $\sin a = \sin b \frac{\sin A}{\sin B}$ ,  
si ha:  $\sin b \frac{\sin A}{\sin B} \cos B = \sin b \cos A \cos c - \cos b \sin c$   
ed anche:

$$\sin A \cotg B = \cos A \cos(c) - \cotg(b) \sin(c)$$

scambiando ciclicamente gli elementi si hanno i seguenti gruppi di formule:

$$\left. \begin{aligned} \cotg(a) \operatorname{sen}(b) &= \cos(b) \cos C + \operatorname{sen} C \cotg A \\ \cotg(b) \operatorname{sen}(c) &= \cos(c) \cos A + \operatorname{sen} A \cotg B \\ \cotg(c) \operatorname{sen}(a) &= \cos(a) \cos B + \operatorname{sen} B \cotg C \\ \cotg(a) \operatorname{sen}(c) &= \cos(c) \cos B + \operatorname{sen} B \cotg A \\ \cotg(b) \operatorname{sen}(a) &= \cos(a) \cos C + \operatorname{sen} C \cotg B \\ \cotg(c) \operatorname{sen}(b) &= \cos(b) \cos A + \operatorname{sen} A \cotg C \end{aligned} \right\} \text{III}$$

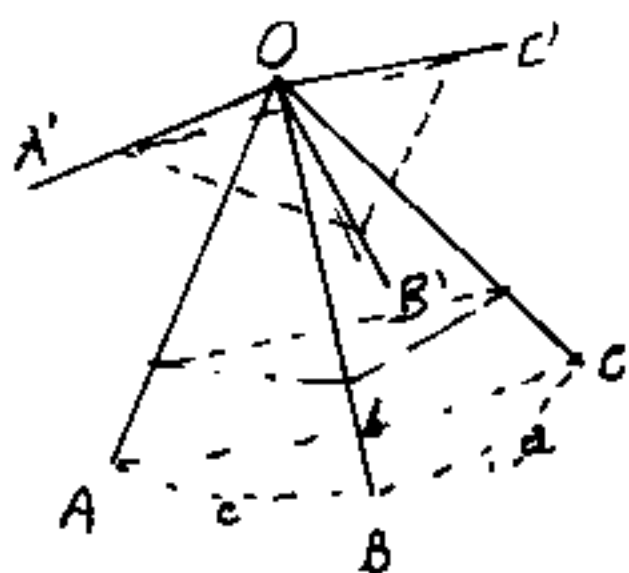
$$\left\{ \frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen} C} \right\} \text{II}$$

### Triangoli sferici polari

Premesso che due triangoli sferici si dicono: Polari quando le facce di uno sono supplementari degli angoli dell'altro se applichiamo i gruppi di formule I, II, III al triangolo polare, le formule del coseno (I) diventano:

$$\left. \begin{aligned} \cos(A) &= \operatorname{sen}(B) \operatorname{sen}(C) \cos(a) - \cos(B) \cos(C) \\ \cos(B) &= \operatorname{sen}(C) \operatorname{sen}(A) \cos(b) - \cos(C) \cos(A) \\ \cos(C) &= \operatorname{sen}(A) \operatorname{sen}(B) \cos(c) - \cos(A) \cos(B) \end{aligned} \right\} \text{IV}$$

mentre le II e III restano invariate.



tato il triedro OABC se da O tracciamo le perpendicolari alle facce di lato omonimo cioè:  $\overline{OA'} \perp$  alla faccia (a) si costruisce il triedro polare

## Il Teorema di Legendre e l'eccesso sferico

Il teorema di Legendre riduce a trigonometria piana triangoli sferici, rettificandone i lati, ed è valido con buona approssimazione per lati di triangoli molto piccoli, al più qualche decima di primi sessagesimali. (E' quanto si verifica in Geodesia). Il teorema può esprimersi:

"Un triangolo sferico in cui sia piccolo il rapporto fra i lati ed il raggio, può, a meno di termini del quarto ordine in tal rapporto, essere calcolato come un triangolo piano i cui lati siano corrispondenti ai lati sferici rettificati, ed i cui angoli equivalgano i corrispondenti angoli sferici diminuiti di un terzo dell'eccesso sferico." (eccesso sferico =  $\epsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ )

Omettiamo la dimostrazione del teorema che, avvalendosi della formula del coseno, esplicita  $\cos(A)$  e sviluppa in serie le funzioni trigonometriche che uguagliano  $\cos(A)$ , limitando i termini all'approssimazione prefissata; quindi confrontando  $\cos(\alpha)$  esplicitata dal teorema di Carnot:  $\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  e sostituendone i valori arriva all'espressione:

$$\cos(A) = \cos(\alpha) - \frac{bc \sin^2 \alpha}{6R^2}$$

Posto:  $A = \alpha + \epsilon$  cioè:  $\alpha = A - \epsilon$  (con  $\epsilon$  piccolissimo):

$$\cos(A) = \cos \alpha - \epsilon \sin \alpha \quad (\cos \epsilon \approx 1)$$

cioè:  $\boxed{\epsilon = \frac{bc \sin^2 \alpha}{6R^2}}$  ; ma:  $\boxed{\frac{1}{2} bc \sin \alpha = S}$  = area

del triangolo piano per cui:

$$\epsilon = \frac{S}{3R^2}$$

dato la piccolezza di  $\epsilon$  si può scrivere:

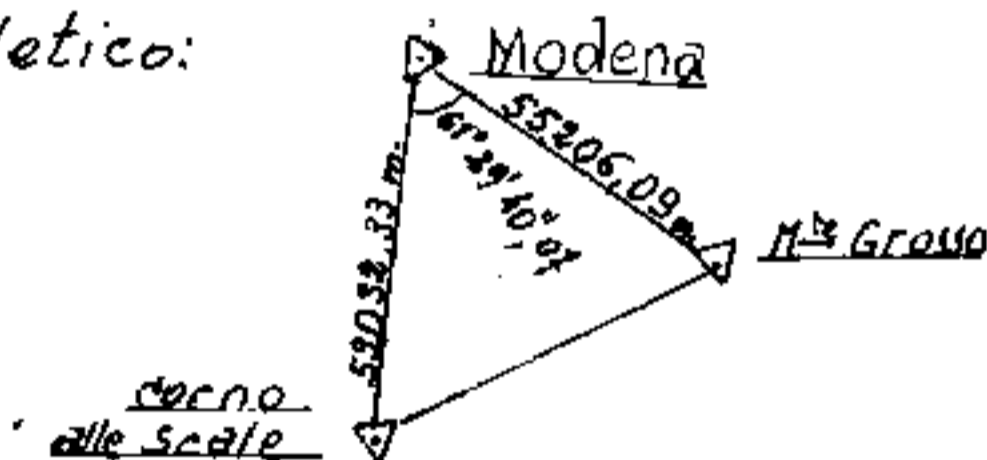
$$\epsilon'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{R^2 (\text{mci})}$$

ove:

$$\frac{S}{R^2} = \frac{\text{area triangolo piano}}{\text{quadrato del raggio}} = \underline{\underline{\text{Eccesso Sferico}}}$$

Quindi è detto: Eccesso Sferico il rapporto fra l'area del triangolo piano ed il quadrato del raggio.

Esempio: Calcolo dell'eccesso sferico del triangolo geodetico:



con le misure poste in figura.

consideriamo:

$$\underline{R = 6378309,29}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma; S = (55206,09 \times 59032,33) \sin(61^\circ 29' 40,04'') \frac{1}{2} = 1431932799 \text{ m}^2$$

$$\underline{\text{Eccesso sferico}} = \frac{S}{R^2} = \frac{1431932799}{(6378309,29)^2} = (3,519747324) \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$3,519747324 \frac{(180 \times 3600'')}{\pi} = \underline{7,26''} = \underline{\text{eccesso sferico}}$$

Questi brevi cenni di proiezioni geografiche saranno ampliati trattando le curve geodetiche ed i problemi inerenti la geodesia.

## La Sferica e la trigonometria sferica.

Abbiamo già considerato il solido "sfera" (vedi Vol. III).

La distinzione fra "sferica" e "trigonometria sferica" risale ad autori tedeschi del XIX secolo, fra cui CH.

Guderman; V.K.F. Schulz; H.F. Mobius; ecc.

Per "sferica" si intende lo studio delle proprietà delle figure tracciate su una sfera.

Per trigonometria sferica si intende lo studio delle correlazioni (metriche) che intercedono fra gli elementi delle figure tracciate sulla superficie sferica.

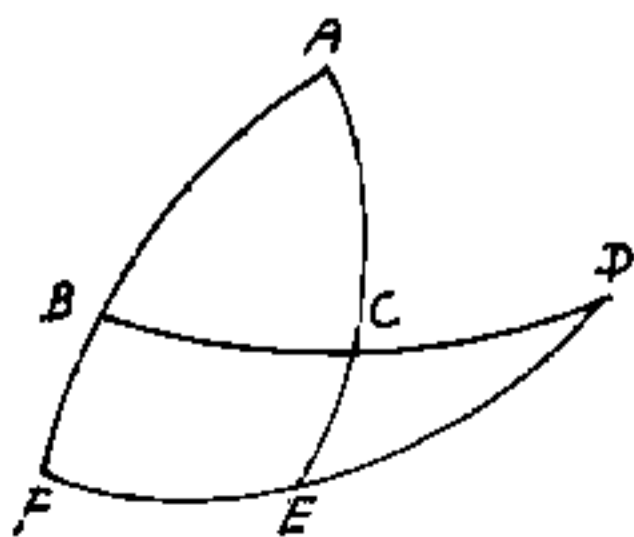
Lo studio della sfera risale agli antichi Caldei e Babilonesi che cercarono di inquadrare i fenomeni astronomici come appaiono nella volta celeste.

Un trattato sulla sfera di Autolico da Pitone, contemporaneo di Euclide; scritti di Teodosio (II sec. a.c.); Un importantissimo testo di Menelao, il cui originale è andato perduto, ma la versione in arabo, ritradotta dall'arabo da Maurolico da Messina è pervenuta fino a noi. Tolomeo usava un

teorema detto di Menelao, che esprime:

$$\frac{\text{sen } \widehat{AC} \text{ sen } \widehat{FE}}{\text{sen } \widehat{AE} \text{ sen } \widehat{FD}} = \frac{\text{sen } \widehat{BC}}{\text{sen } \widehat{BD}}$$

Si è scritto "sen" in effetti Tolomeo usava le "corde" di cui aveva calcolato una tavola.

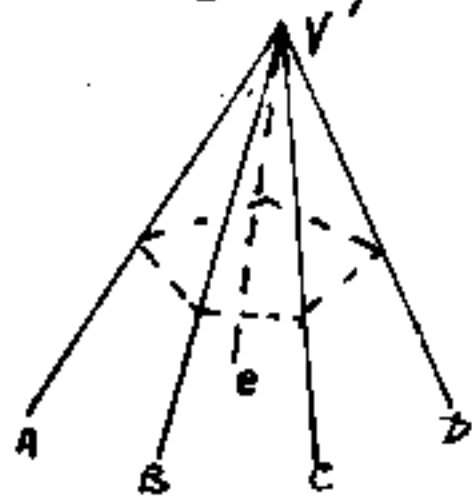


# I solidi geometrici

Prima di entrare nel vivo della questione è bene definire certe denominazioni nella geometria dello spazio.

## Angoli solidi

È detto angolo solido, o angoloide, o angolo poliedro, lo spazio compreso fra le facce di una piramide di altezza indefinita. (Il termine "poliedro" è limitato all'angoloide piramidale, non conico di qualsiasi sezione a linea continua, che si diranno semplicemente "angolo solido"). Avremo anche qui un angolo solido concavo, ed un angolo solido convesso, a seconda che si consideri lo spazio interno o lo spazio esterno alla superficie delimitante l'angolo solido. Tal volta l'angolo solido è visto come un insieme di angoli piani, ove ciascuna semiretta uscente dal vertice formerà un angolo piano infinitesimo con le semirette del suo intorno. Anche la superficie angolare che delimita l'angolo solido nella piramide ove le singole facce (indefinite) sono costituite dall'angolo piano come spazio compreso fra due semirette (spigoli), uscenti da un punto comune (vertice)  $V$ . È ovvio che la somma degli angoli delle facce nell'angoloide convesso non può superare l'angolo



giro; se la somma degli angoli delle facce fosse esattamente un giro ( $360^\circ = 2\pi$ ) la piramide (angoloide) degenererebbe in un piano.

Gli angoloidei si classificano in base al numero delle facce, avremo così angoloidei triedri, tetraedri, pentaedri, ecc.

Se le facce sono solo due, manca il vertice, si hanno due semipiani uscenti da una retta comune. Lo spazio



compreso fra due semipiani è detto angolo diedro e di norma viene misurato dall'angolo formato da due semirette determinate

dall'intersezione dei due semipiani con un piano normale alla retta comune. In effetti l'angolo diedro sarebbe formato dall'angolo delle due semirette che trasla lungo la retta comune ai due semipiani.

Il limite opposto si ha quando l'angolo solido è costituito da un'angoloide ad infinite facce; cioè quando la nostra piramide diventa un cono, che può essere circolare, ellittico, o con qualsiasi curva chiusa come sezione ortogonale all'asse.



# La misura degli angoli solidi

Ricordando che la misura degli angoli piani in radianti è l'arco di cerchio di raggio unitario sotteso angolo piano; analogamente nello spazio: "La misura dell'angolo solido è l'area della superficie sferica di raggio unitario sottesa all'angolo solido". (in "stereoradianti").

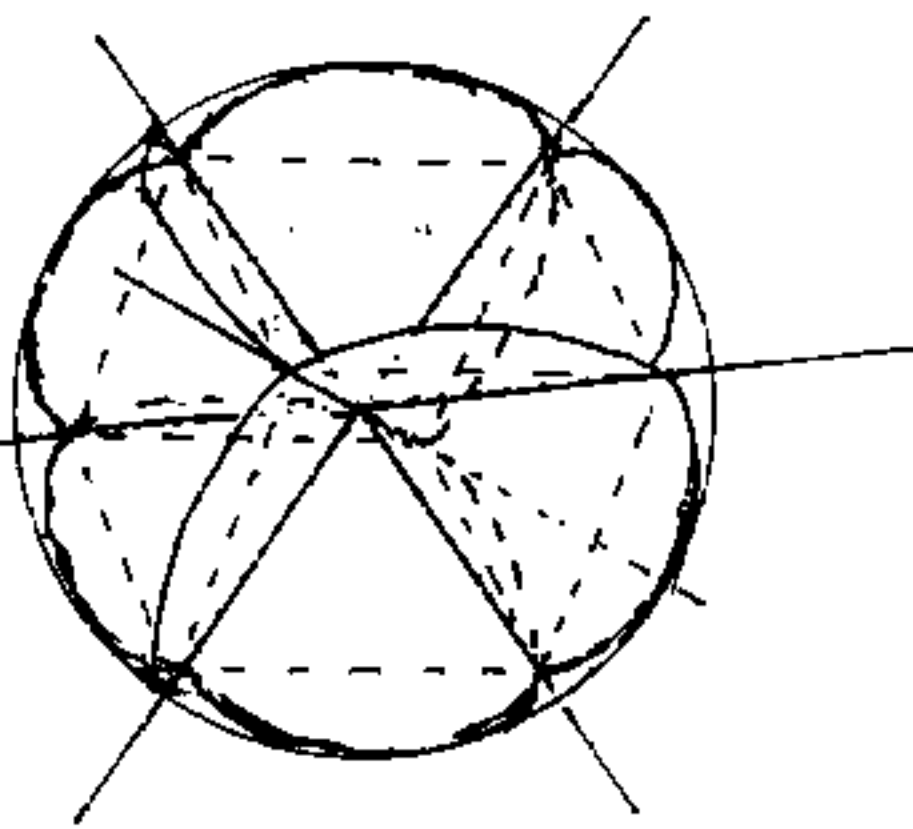
Poiché l'area della superficie dell'intera sfera è  $4R^2\pi$ , l'angolo solido sferico è  $4\pi$  stereoradianti (l'analogo dell'angolo giro  $2\pi$  rad)

Se consideriamo un cubo inserito o circoscritto alla sfera, le semidiagonali del cubo uscenti dal centro della sfera (o centro del cubo) delimitano, come spigoli di piramidi indefinite a base quadrata, angoloidi tetraedri, cioè di

vidono la superficie sferica in 6 parti uguali, perciò l'ampiezza di tali angoloidi tetraedri è  $\frac{1}{6} 4\pi = \frac{2}{3}\pi$  stereoradianti.

Per l'ottaedro avremo  $\frac{1}{8} 4\pi = \frac{\pi}{2}$  stereoradianti.

Per il dodecaedro regolare, l'angoloide pentaedrico avrà un'ampiezza di  $\frac{1}{12} 4\pi = \frac{\pi}{3}$  stereorad. Per un solido di n facce uguali inserito in una sfera l'angoloide sarà di:  $\frac{4\pi}{n}$  rad.



## La direzione media.

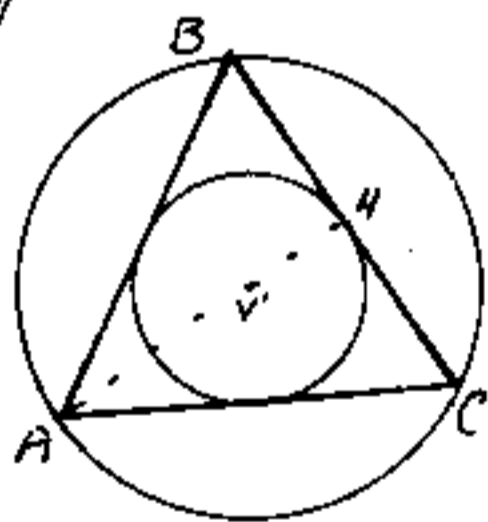
Ogni semiretta uscente da un punto (vertice) implica una direzione in modo univoco da quel punto.

Nell'angolo piano, costituito dall'insieme piano delle semirette di quell'angolo, diremo: direzione media la direzione della bisettrice.

Ci domandiamo come definire direzione media dello spazio angolare di un angolo solido.

Se l'angolo solido è un angoloide conico a base circolare, resta evidente che la direzione media passerà per il centro dei cerchi base.

Se l'angolo solido è un angoloide poliedrico con base un poligono regolare inscritto e circoscritto a un confessione, la direzione media passerà per i centri

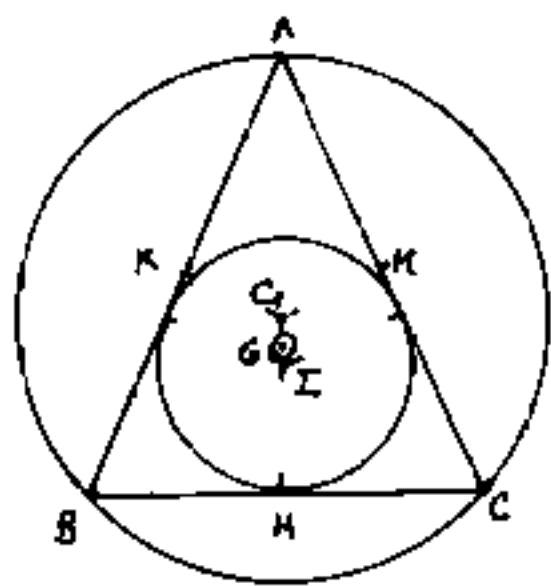


delle circonferenze, in quanto le tre parti, di triangolo, esterne al cerchio inscritto, [o di poligono], sono simmetriche rispetto al centro, come

lo sono le tre semirette che uscenti dal vertice  $V$  del poliedro passano per i vertici  $A, B, C$  del triangolo, [o del poligono]. Prese due a due tali semirette ammettono come direzione media la bisettrice dell'angolo della faccia dell'angoloide triedro (o poliedro), che è

anche mediana della faccia; però se consideriamo tale mediana ( $VH$ ) e la semiretta opposta ( $VA$ ), la direzione media dell'angoloide ( $VV'$ ), non è più la bisettrice dell'angolo ( $\widehat{AVH}$ ) delle due semirette.

Consideriamo quindi un triangolo isoscele, inscrittibile e circoscrittibile ad una circonferenza, ove però



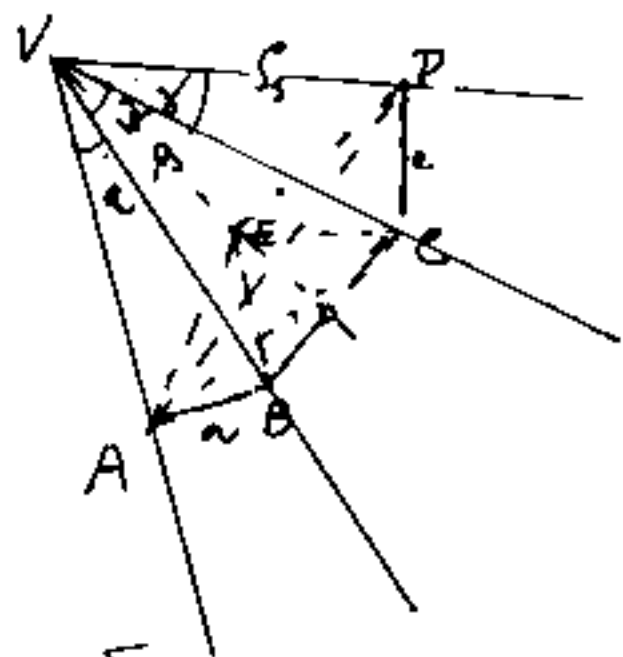
incentro ( $I$ ) e circocentro ( $C$ ), non coincidono pur essendo su una stessa mediana. Le bisettrici, direzioni medie degli angoli di faccia ( $VH$ ), ( $VK$ ), ( $VM$ ) incontrano i lati del triangolo  $ABC$  nei

punti medi ( $H, K, M$ ) il che farebbe presumere che la direzione media sia  $\overline{VG}$  ove  $G$  = baricentro del triangolo, estendibile al baricentro di tutte le figure. Sarebbe più proprio pensare al baricentro della porzione di superficie sferica intercettata dalle facce dell'angoloide poliedro. Consideriamo quindi il problema in generale.

Se a partire dal vertice  $V$  dell'angoloide riportiamo su ciascuna semiretta, uscente da  $V$ , un segmento di lunghezza  $\rho_s$  delimitiamo una parte di sfera.

Consideriamo le semirette uscenti da  $V$  che sono spigoli dell'angoloide poliedrico, unendo le estremità dei segmenti lunghi  $\rho_s$  si tracciano i lati e le dia-

gonali di base, se la base è piana tali segmenti sono anche complanari. (nessun problema per basi triangolari).



Se:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$  sono gli angoli dei piani delle facce dell'angoloide, detti  $a, b, c, d, \dots$  gli opposti lati di base a distanza  $\rho_s$  avremo:

$$a = 2\rho_s \sin \frac{\alpha}{2}; \quad b = 2\rho_s \sin \frac{\beta}{2}; \quad c = 2\rho_s \sin \frac{\gamma}{2}; \dots$$

$$d = 2\rho_s \sin \frac{\delta}{2}; \dots$$

Il quadrilatero ABCD è piano se è inscrittibile in una circonferenza sezione della sfera, con il piano di base ABCD. (cio' vale anche se gli spigoli  $\rho_s$  sono più di 4 in generale  $n$ ) (non inversamente).

Sia " $r$ " il raggio della circonferenza di base e sia " $O$ " il suo centro; la distanza  $\overline{VO}$  del piano di base dal centro " $V$ " della sfera è:  $\overline{VO} = \sqrt{\rho_s^2 - r^2}$ ;  $\rho_s = \overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = \overline{VD} = \dots$

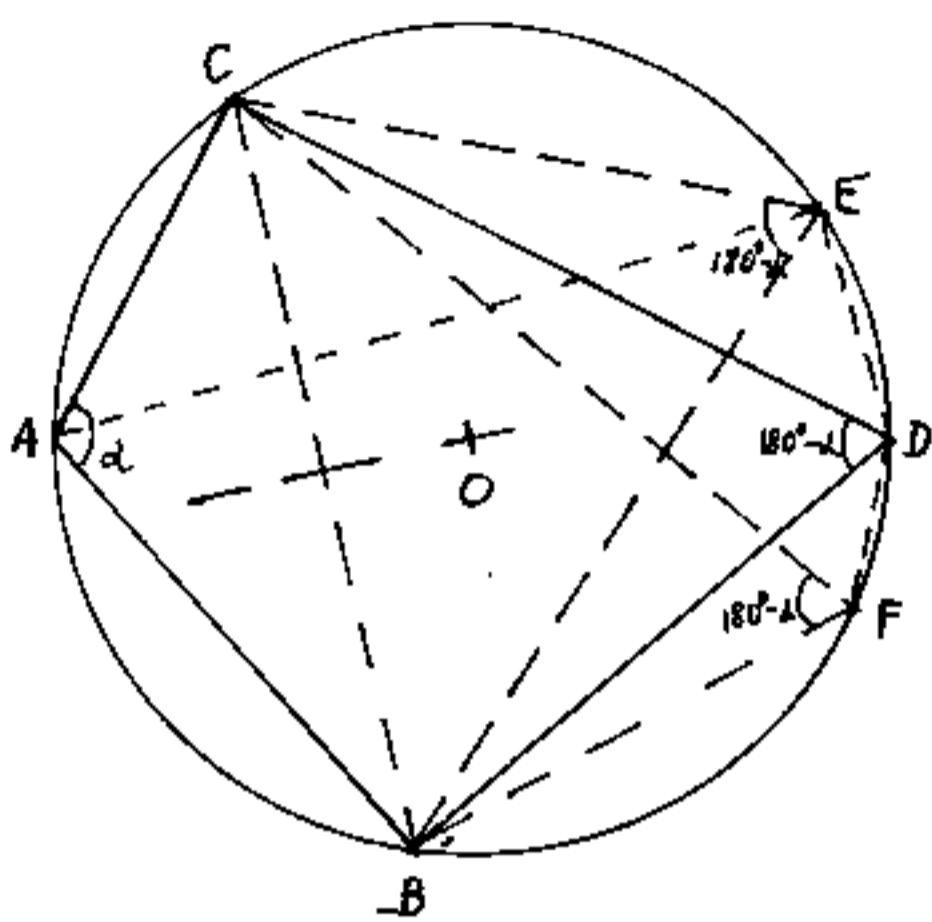
$r = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = \dots$  Notare che per un triangolo ottusangolo il circocentro (qui indicato con  $O$ ) è esterno al triangolo.

Condizione per cui un quadrilatero ed in generale un poligono è inscrittibile in una circonferenza.

1) Se in un quadrilatero due angoli interni opposti sono supplementari;

(notare che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è un

angolo giro = due angoli piatti, perciò se due angoli opposti in un quadrilatero sono supplementari, necessariamente anche gli altri due angoli interni sono opposti e supplementari.)



il quadrilatero è inscritto in una circonferenza.

Infatti considerata una diagonale come corda di una circonferenza, se un vertice opposto passa per tale circonferenza, necessariamente vi appartiene anche l'altro

vertice opposto alla corda che ha l'angolo supplementare.

Se la diagonale  $\overline{CB}$  è considerata corda di tutte le circonferenze che hanno il centro (o) sull'asse di  $\overline{AB}$  e fra esse scegliamo la circonferenza che passa per A (vertice con angolo  $\alpha$ ), poiché l'arco di circonferenza  $\widehat{BC}$  opposto all'arco di circonferenza  $\widehat{BAC}$ , è il luogo dei vertici di triangoli di base  $\overline{BC}$  aventi l'angolo alla circonferenza supplementare di  $\alpha$ , necessariamente tale circonferenza passa per il vertice opposto ad A.

Poiché non può esistere un triangolo di base  $\overline{BC}$  che abbia l'angolo opposto ad A ( $\alpha$ ) cioè  $(180-\alpha)$  il cui vertice opposto (D oppure E, oppure F...) che cada fuori della circonferenza

che passa per A, B, C ed avente in A l'angolo  $\alpha$ . La condizione è anche sufficiente oltreché necessaria.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero piano sia inscrittibile in una circonferenza è che abbia due angoli interni opposti supplementari.

Si noti che un pentagono, ABDEC, (v. figura), ove tracciata la diagonale  $\overline{BC}$  e fatta passare per A, B, C, una circonferenza, essa passerà anche per D ed E se gli angoli  $\hat{BEC}$  e  $\hat{BDC}$  sono supplementari ad  $\alpha$ .

In generale:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un poligono sia inscrittibile in una circonferenza è che tracciata una diagonale che separi un solo vertice, tutti i triangoli che hanno per base tale diagonale e per vertice un altro vertice del poligono, abbiano l'angolo opposto alla base supplementare all'angolo del vertice separato.

Ogni poligono piano inscrittibile in una circonferenza ammette infinite sfere le cui superfici contengano i vertici del poligono, tali sfere avranno tutte il centro sulla normale al piano del poligono e passante per il centro della circonferenza circoscritta.

Se il poligono piano non è inscrittibile in una circonferenza, non esiste alcuna superficie sferica che

contenga tutti i vertici del poligono.

Se il poligono è un quadrilatero non piano, esiste una sola sfera, la cui superficie contenga i vertici del poligono quadrilatero.

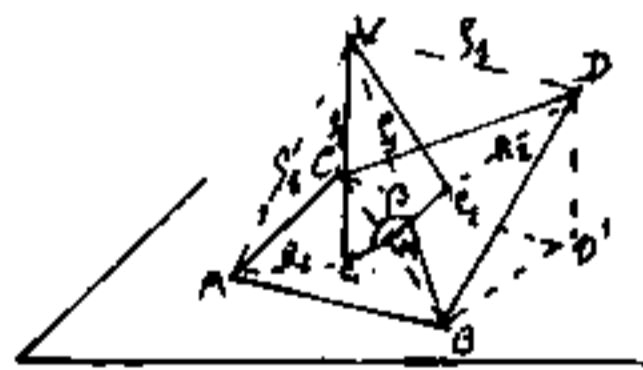
Un quadrilatero non piano è composto di due triangoli (sempre piani) che hanno ruotato intorno alla diagonale comune del quadrilatero e poiché il piano normale a tale diagonale e passante per i circocentri contiene anche le normali ai piani dei due triangoli passanti per i circocentri, tali normali essendo complanari si incontrano nel punto che è il centro della sfera circoscritta al quadrilatero non piano. Se l'angolo fra i piani dei due triangoli diventasse piatto ed il quadrilatero non fosse inscrittibile in una circonferenza, il punto comune alle due normali divergerebbe all'infinito, e non vi sarebbe nessuna sfera di raggio finito per circoscriverlo.

Se il quadrilatero è inscrittibile in una circonferenza di centro  $O$ , il centro  $O$  è circocentro comune dei triangoli a due a due ottenuti tracciando una diagonale.

Se il poligono non piano ha più di 4 vertici, la condizione che esista una superficie sferica che contenga tutti i vertici è che presi i vertici 4 a 4 e calcolato il raggio della sfera, ammettano lo stesso raggio.

Di un angoloide comunque poliedrico è sempre possibile staccare dal vertice sugli spigoli segmenti uguali a  $\rho_1$  (qualsiasi  $\rho_1$ ), perciò gli estremi dei segmenti  $\rho_1$  costituiscono una base poligonale sulla superficie della sfera di raggio  $\rho_1$ . Tale base può essere piana o non piana, se piana ammette un cerchio circoscritto, delimitante la calotta sferica di un angoloide conico; mentre per determinare la misura del nostro angoloide occorrerà calcolare l'area della porzione di tale calotta delimitata dai piani delle facce dell'angoloide.

Poiché tre punti determinano sempre un piano, di un quadrilatero non piano consideriamo fuori del piano ABC, il punto D cioè consideriamo il triangolo BCD come se avesse ruotato intorno a BC. Se  $C_1$  e  $C_2$  sono i circocentri dei due triangoli ed M il punto medio



di  $\overline{BC}$ , se  $R_1$  ed  $R_2$  sono i raggi dei cerchi circoscritti ai triangoli ABC e BCD e sia  $\beta = \widehat{C_1 M C_2} = 90^\circ + \alpha$ ;  $\rho_1 =$  raggio della

sfera:  $\rho_1 = \sqrt{(C_1 V)^2 + R_1^2} = \sqrt{(C_2 V)^2 + R_2^2}$ ;  $\overline{C_1 M} = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{CB}{2}\right)^2}$ ;  $\overline{C_2 M} = \sqrt{R_2^2 - \left(\frac{CB}{2}\right)^2}$ ;



$$\overline{C_1 V} = \overline{C_2 M} \cos \alpha + \overline{C_2 K} \sin \alpha$$

$$\overline{C_1 V} = \overline{C_2 M} \cos \alpha + \overline{C_2 M} \sin^2 \alpha + \overline{C_1 M} \sin \alpha$$

$$\overline{C_1 V} = \overline{C_2 M} (\cos \alpha + \sin^2 \alpha) + \overline{C_1 M} \sin \alpha \quad \text{che}$$

sostituita nella  $\rho_1 = \sqrt{\overline{C_1 V}^2 + R_1^2}$  risolvere il problema.



## Lo spazio angolare solido

Lo spazio angolare solido è di eccezionale importanza. Noi siamo stati abituati a considerare uno spazio  $n$ -dimensionale, attribuendo ad unità dimensionali valori di confronto arbitrariamente posti per convenzione umana.

L'angolo ha in se l'unità, cioè, se è piano, l'angolo giro è l'unità; se è solido l'angolo sferico è l'unità.

Abbiamo già definito l'angolo piano una variazione di direzione, lo spazio angolare piano sarà lo spazio piano percorso dalla semiretta (direzione) origine, per raggiungere la semiretta finale (nuova direzione). Nello spazio tridimensionale (geometrico), data la semiretta (direzione) origine, se  $\alpha$  era l'ampiezza angolare piana vediamo tale semiretta origine come l'asse di un cono ove la semiretta (direzione piana) variata di  $\alpha$  può essere una qualsiasi delle generatrici della superficie conica. Lo spazio angolare solido è costituito da tutte le semirette interne al cono ove l'asse è la direzione media.

Nell'angolo piano vediamo la semiretta che torna all'origine ad ogni giro, nell'angolo solido, vediamo le semirette del cono dilatarsi, aprirsi come un fiore raggiungere il massimo sferico e riavvicinarsi per tornare alla direzione origine.

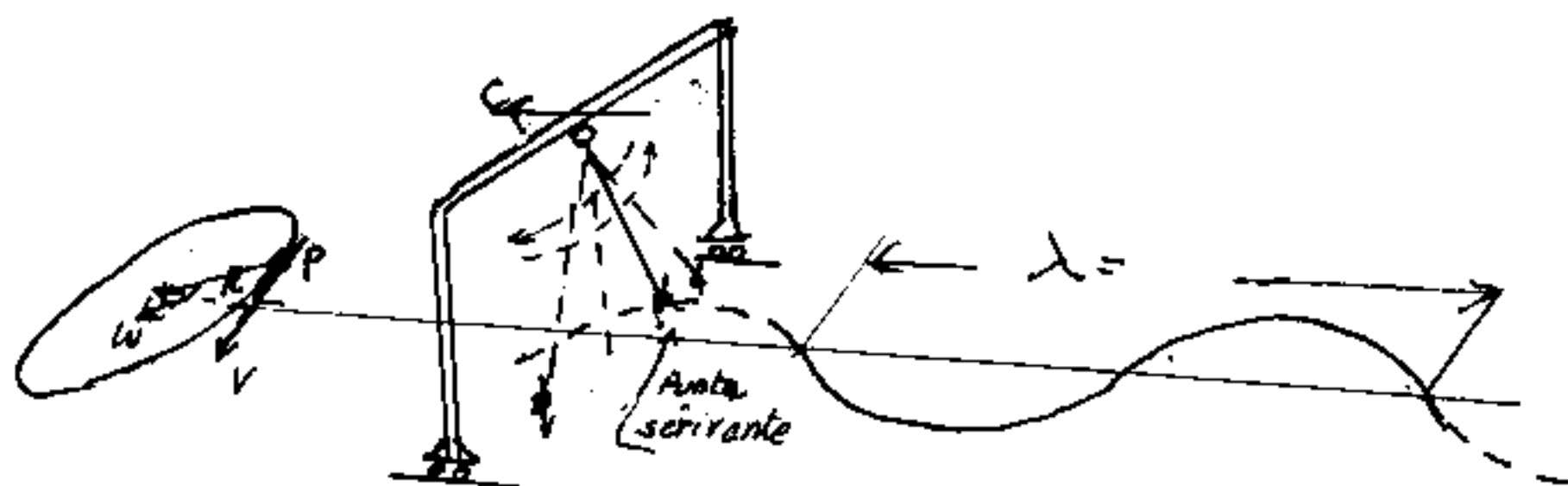
Come si vede nello spazio angolare che ritorna in se stesso all'origine dopo aver compiuto la sua unità è implicito il concetto del "pulsare", "pulsazione"; e, indipendentemente da qualsiasi dimensione lineare, possiamo pensare puntiforme qualsiasi sorgente raggiante.

Poiché un punto è aperto a tutte le direzioni, la sua pulsazione sarà in un angolo solido sferico (unitario), ma in una delle infinite direzioni vi può essere un altro punto, sorgente di radiazioni le due superfici sferiche si intersecano secondo una circonferenza piana che è base dei due angoloidi conici aventi i vertici nei centri emissivi.

Ma nulla vieta di pensare ad un terzo centro emissivo, o meglio ad un insieme di centri emissivi ove i piani delle circonferenze di intersezione, delimiteranno gli angoloidi conici fino a renderli angoloidi poliedrici. Il gioco è fatto per costituire i cristalli.

Il "pulsore" è una frequenza; solo per fissare le idee, pensiamo il nostro punto come una carica elettrica che inverte la sua polarità, esso darebbe un campo elettrico alternato, però sappiamo che le onde elettromagnetiche implicano dipoli, cioè due punti la cui distanza è connessa con la frequenza, e, tenuto conto di una velocità finita di trasmissione, si ha la lunghezza d'onda.

Il modellino che semplifica il concetto di frequenza e la sua connessione con la lunghezza d'onda, potrebbe essere il seguente: Consideriamo un punto che si muove su una circonferenza con velocità periferica (tangenziale)  $V =$  costante, il raggio  $R$  che congiunge il punto col centro della circonferenza si muoverà con velocità angolare  $\omega = \frac{V}{R}$  pure costante. Detto  $T =$  periodo, il tempo impiegato per compiere un giro (angolarmente  $2\pi$  rad) avremo:  $\frac{2\pi}{T} = \omega$ , mentre il numero di giri compiuti nell'unità di tempo è la frequenza  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ ;  $\omega = 2\pi f$ ; cioè la frequenza  $f$  è l'inverso del periodo  $T$ . Supponiamo che, in sincronismo col punto, si abbia un pendolo di periodo  $T$ , che è connesso ad un carrello che si muove di moto rettilineo perpendicolare al piano del pendolo e sia  $C$  la sua velocità finita, se il pendolo è munito di penna scrivente, sul piano trucerà una sinusoide la cui lunghezza  $\lambda$  è detta lunghezza d'onda ove:

$$\lambda = \frac{f}{C} = \frac{(\text{cicli/sec})}{(\text{m/sec})} = \lambda = \text{m/ciclo}.$$


Passiamo considerare il vertice di un angolo solido come un centro emissivo e vedremo che l'emissione può non essere la stessa in tutte le direzioni (Per esempio l'energia luminosa emessa dalla fiamma di una candela). Ciò implica il costituirsi di punti differenziati, di piani, di superfici. In fotometria si studiano le indicatrici fotometriche come luogo degli estremi di vettori uscenti dal centro e di intensità pari all'intensità di emissione in quella direzione.

L'energia raggianti è costituita da onde elettromagnetiche; questa generalizzazione, cui è pervenuta la fisica moderna, implica la variazione nel tempo di polarità; se il mezzo in cui si irraggia non è isotropo, si ha anche una diversa velocità di trasmissione nelle varie direzioni. In cristallografia, la definizione più generale di cristallo è che un certo materiale presenti una qualche anisotropia. Non solo, ma evidenzia che i cosiddetti "mezzi isotropi", cioè quei mezzi nei quali i fenomeni fisici avvengono identici in tutte le direzioni, sono costituiti da minutissimi micro-cristalli mescolati, cioè senza alcun ordine disposto; mentre il fatto di presentare anisotropia, cioè fenomeni che avvengono diversamente in due diverse direzioni, implica che il materiale presenti internamente un ordine cioè presenti orientazioni privilegiate dei suoi elementi. Esasperando al limite le definizioni

della cristallografia potremmo dire che un pezzo di ferro non è un cristallo, ma se lo magnetizziamo, cioè se ordiniamo in una certa direzione i suoi magnetini elementari (magnetini di Barkhausen) diventa un cristallo.

Gli esperimenti di Barkhausen (1919) sulla magnetizzazione sono avvenuti prevalentemente su cristalli, perciò l'ordinamento interno dei materiali può avvenire in molteplici modi. Quindi in un "cristallo" vi può essere più o meno ordine e un po' di confusione.

Ogni direzione rilevabile in un materiale implica un ordine cioè una caratteristica per essere classificato non isotropo = anisotropo, e potersi chiamare cristallo.

L'ordinamento del materiale può avvenire sotto vari aspetti, per esempio ai fini della coesione, i piani di sfaldatura - definiti dalla direzione della retta di giacitura. Ai fini della trasparenza ai colori nelle varie direzioni; Ai fini magnetici, elettrici ecc. ecc.

Quello che comunemente chiamiamo cristallo è un solido geometricamente squadrato, la cui geometria è connessa alla costituzione chimica del materiale, e si è formata naturalmente. La "squadratura" geometrica può essere anche molto frastagliata come certe geminazioni, ma troveremo la costanza degli angoli

diedri su facce più piccole. La costanza dell'angolo diedro fra due determinate facce, (piani), implica la costanza delle loro giaciture, infatti per quanto possa svolgarsi anche diversamente di una faccia rispetto all'altra permangono l'angolo diedro in quanto permangono le direzioni delle rette di giacitura.

Torneremo su questo argomento che abbiamo sintetizzato allo scopo di introdurre lo studio dei solidi. Una volta note certe caratteristiche dei solidi, soprattutto sulla loro formazione, potremo riprendere il discorso.

Un solido può considerarsi l'intersezione di più angoloidi, ma può considerarsi anche generato da un centro emissivo che trasmette secondo determinate direzioni. Le direzioni possono essere le giaciture dei piani facciali, gli intervalli di stratificazione come battimenti di due frequenze sovrapposte. Se in un solido qualsiasi, consideriamo un centro interno e lo colleghiamo con i vertici delimitanti le facce; gli angoloidi aventi per vertice questo centro, e per spigoli le rette che uniscono il centro

con i vertici delle facce, possono riguardarsi come un flusso uscente dal centro che si dilata nello spazio angolare dei singoli angoloioi. Questo modo di riguardare i solidi ci servirà.

Ogni solido è delimitato da punti detti vertici, da segmenti che uniscono vertici adiacenti, e sono detti spigoli, porzioni di piano delimitate da spigoli, non interne al solido, sono dette facce.  
Unione di vertici non adiacenti sono le diagonali (di faccia, o interne al solido).

Notiamo che per delimitare una faccia occorrono almeno tre spigoli e quindi almeno tre vertici, ogni vertice deve avere almeno tre spigoli non complanari e quindi almeno tre facce che vi concorrono. Ogni spigolo è comune a due sole facce. Ordinariamente considereremo angoloioi costitutivi di un solido, le piramidi aventi il vertice comune in un punto interno al solido, aventi per base le facce del solido, e per spigoli i segmenti che uniscono il centro con i vertici del solido. Ma possiamo anche considerare il solido come intersezione degli angoloioi aventi i vertici coincidenti con i vertici del solido e per piani delimitanti, le facce

che concorrono nei singoli vertici, e per spigoli gli spigoli del solido che concorrono in quel vertice.

In ogni vertice del solido concorra lo stesso numero di spigoli e di facce (ciò non sempre è possibile). Sia  $n$  tale numero. Se sezioniamo con un piano un angoloide di  $n$  spigoli si ha una piramide avente:  $(n+1)$  vertici (cioè i vertici intersezione del piano con gli  $n$  spigoli dell'angoloide più il vertice dell'angoloide stesso);  $(2n)$  spigoli (cioè gli spigoli dell'angoloide più gli spigoli intersezione del piano base con le facce dell'angoloide);  $(n+1)$  facce (cioè le facce dell'angoloide più la faccia del piano base.)

Abbiamo che la quantità di vertici  $V = (n+1)$  più la quantità di facce  $F = (n+1)$  ci dà  $(F+V) = (2n+2)$  che confrontata con  $2n$  spigoli  $S$ , ritorna la famosa relazione di Eulero:  $(F+V) = S+2$  In un solido "La somma delle facce e dei vertici supera di due il numero degli spigoli."



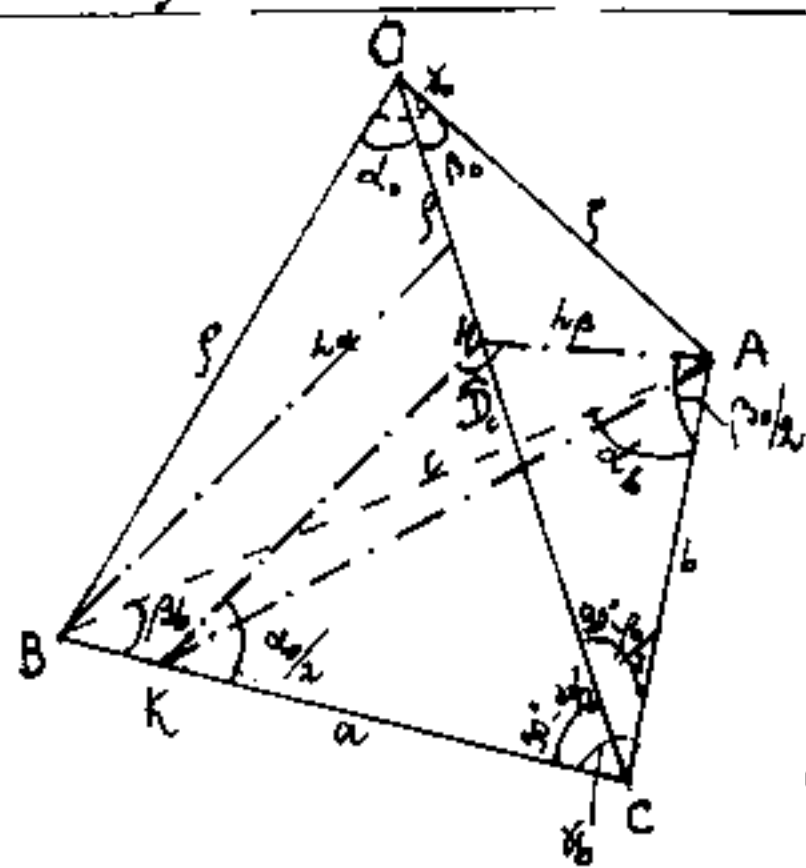
# Angoli diedri ed angoli delle facce

Consideriamo la piramide a base triangolare, che ha per vertice il centro "O" della sfera di raggio  $\rho$ , e per base il piano intercettato dalla superficie sferica sezionando gli spigoli dell'angoloide che genera la piramide. Gli spigoli di tale piramide sono tutti uguali a " $\rho$ ".

Sia ABC la base della piramide, rispettivamente di lati  $a, b, c$  e di angoli:  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Le facce di tale piramide sono triangoli isosceli, rispettivamente di lati  $\rho$  e di basi:  $a, b, c$  cui corrispondono gli angoli al vertice  $\hat{BOC} = \alpha_0$ ;  $\hat{BOA} = \beta_0$ ;  $\hat{AOC} = \gamma_0$ .

Noi supporremo noti gli angoli delle facce dell'angoloide triedro e vogliamo trovare gli angoli diedri formati da tali facce.



$$a = 2\rho \sin(\alpha_0/2)$$

$$b = 2\rho \sin(\beta_0/2)$$

$$c = 2\rho \sin(\gamma_0/2)$$

$$\cos(\alpha_0) = \cos(\hat{BOC}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos(\beta_0) = \cos(\hat{BOA}) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos(\gamma_0) = \cos(\hat{AOC}) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Sezioniamo con un piano perpendicolare ad  $\overline{OC} = \rho$ .

$$\cos \alpha_b = \frac{x^2 (\sec^2 \beta/2 + \sec^2 \delta/2 - \sec^2 \alpha/2)}{x^2 (2 \sec \beta/2 \sec \delta/2)}$$

$$\cos \beta_b = \frac{(\sec^2 \alpha/2 + \sec^2 \delta/2 - \sec^2 \beta/2)}{(2 \sec \alpha/2 \sec \delta/2)}$$

$$\cos \delta_b = \frac{(\sec^2 \alpha/2 + \sec^2 \beta/2 - \sec^2 \delta/2)}{(2 \sec \alpha/2 \sec \beta/2)}$$

Si noti che se gli spigoli  $P$  sono uguali, gli angoli del triangolo di base sono indipendenti dalle misure lineari.

Per calcolare l'angolo diedro fra due facce occorre sezionare con un piano perpendicolare allo spigolo comune alle due facce; le tracce di tale piano su due facce della piramide sono parallele alle altezze di tali facce, relative allo spigolo comune. Ma se  $\alpha \neq \beta \neq \delta$  le altezze relative allo spigolo comune non si incontrano nello stesso punto, per cui noi prenderemo il piano passante per una altezza e determineremo le tracce sull'altra faccia e sulla base.

(Vedi figura ove il piano passa per  $KHA$ ). (sia  $\hat{D}$  = diedro)

$$\cos(\hat{D}_c) = \cos(KHA) = \frac{KH^2 + HA^2 - KA^2}{2 KH \cdot HA}; \quad (\hat{KHC} = \hat{CHA} = 90^\circ)$$

$$\cos(\hat{D}_c) = \frac{\overline{HC}^2 / \tan^2(\alpha/2) + \overline{HC}^2 / \tan^2(\beta/2) - [KC^2 + CA^2 - 2KC \cdot CA \cos \delta_b]}{2 \overline{HC} / \tan(\alpha/2) \cdot \overline{HC} / \tan(\beta/2)}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = \frac{\frac{\cos^2(\alpha/2)}{\sec^2(\alpha/2)} + \frac{\cos^2(\beta/2)}{\sec^2(\beta/2)} - \left[ \frac{1}{\tan^2(\alpha/2)} + \frac{1}{\tan^2(\beta/2)} - \frac{2 \cos \delta_b}{\tan(\alpha/2) \tan(\beta/2)} \right]}{2 \frac{\cos(\alpha/2) \cos(\beta/2)}{\sec(\alpha/2) \sec(\beta/2)}}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = \frac{\frac{\cos^2 \alpha/2 \operatorname{sen}^2 \beta/2 + \cos^2 \beta/2 \operatorname{sen}^2 \alpha/2}{\operatorname{sen}^2 \alpha/2 \operatorname{sen}^2 \beta/2} - \left[ \frac{\operatorname{sen}^2 \beta/2 + \operatorname{sen}^2 \alpha/2 - 2 \operatorname{sen} \beta/2 \operatorname{sen} \alpha/2 (\cos \delta_0)}{\operatorname{sen}^2 \alpha/2 \operatorname{sen}^2 \beta/2} \right]}{2 \frac{\cos \alpha/2 \cos \beta/2}{\operatorname{sen} \alpha/2 \operatorname{sen} \beta/2}}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = \frac{(\cos^2 \alpha/2 - 1) \operatorname{sen}^2 \beta/2 + (\cos^2 \beta/2 - 1) \operatorname{sen}^2 \alpha/2 + 2 \operatorname{sen} \beta/2 \operatorname{sen} \alpha/2 (\cos \delta_0)}{2 \cos \alpha/2 \cos \beta/2 \operatorname{sen} \alpha/2 \operatorname{sen} \beta/2}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = \frac{2 \left[ -\operatorname{sen}^2 \alpha/2 \operatorname{sen}^2 \beta/2 - \operatorname{sen}^2 \alpha/2 \operatorname{sen}^2 \beta/2 + 2 \operatorname{sen} \alpha/2 \operatorname{sen} \beta/2 (\cos \delta_0) \right]}{\operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = 2 \frac{-2 \operatorname{sen}^2 \alpha/2 \operatorname{sen}^2 \beta/2 + 2 \operatorname{sen} \alpha/2 \operatorname{sen} \beta/2 \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha/2 + \operatorname{sen}^2 \beta/2 - \operatorname{sen}^2 \gamma/2}{2 \operatorname{sen} \alpha/2 \operatorname{sen} \beta/2} \right)}{\operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = 2 \frac{+ \operatorname{sen}^2 \alpha/2 (1 - \operatorname{sen}^2 \beta/2) + \operatorname{sen}^2 \beta/2 (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha/2) - \operatorname{sen}^2 \gamma/2}{\operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = 2 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha/2 \cos^2 \beta/2 + \operatorname{sen}^2 \beta/2 \cos^2 \alpha/2 - \operatorname{sen}^2 \gamma/2}{\operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = 2 \frac{\left( \frac{1 - \cos \alpha}{2} \right) \left( \frac{1 + \cos \beta}{2} \right) + \left( \frac{1 - \cos \beta}{2} \right) \left( \frac{\cos \alpha + 1}{2} \right) - \frac{1 - \cos \delta_0}{2}}{\operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = 2 \frac{\left( \frac{1}{4} - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{4} - \frac{\cos \alpha}{4} + \frac{\cos \beta}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{4} - \frac{\cos \beta}{4} + \frac{\cos \alpha}{4} \right) - \frac{1}{2} + \frac{\cos \delta_0}{2}}{\operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = \frac{\cos \delta_0 - \cos \alpha_0 \cos \beta_0}{\operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0}$$

che è l'importantissima  
formula detta del coseno  
(vedi trigonometria sferica)

Abbiamo così gli angoli diedri fra le facce dell'angoloide triedro in funzione degli angoli al vertice delle facce.

$$\hat{D}_{OA} = \arccos \left( \frac{\cos \alpha_0 - \cos \beta_0 \cos \gamma_0}{\sin \beta_0 \sin \gamma_0} \right)$$

$$\hat{D}_{OB} = \arccos \left( \frac{\cos \beta_0 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_0}{\sin \alpha_0 \sin \gamma_0} \right)$$

$$\hat{D}_{OC} = \arccos \left( \frac{\cos \gamma_0 - \cos \alpha_0 \cos \beta_0}{\sin \alpha_0 \sin \beta_0} \right)$$

se  $\alpha = \beta = \gamma = \varphi$   
 si hanno tre diedri  
 uguali:

$$\hat{D} = 2 \arcsin \frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}$$

Queste stesse formule si possono applicare per calcolare gli angoli diedri formati dalla base con le facce della piramide.

Infatti i tre angoli nel vertice C della base sono:

$$\gamma_b ; \quad (90^\circ - \alpha_0/2) ; \quad (90^\circ - \beta_0/2)$$

ed avremo:

$$\cos \hat{D}_{CB} = \frac{\cos(90^\circ - \beta_0/2) - \cos(\gamma_b) \cos(90^\circ - \alpha_0/2)}{\sin(\gamma_b) \sin(90^\circ - \alpha_0/2)}$$

$$\cos \hat{D}_{CB} = \frac{\sin \beta_0/2 - \cos(\gamma_b) \cos \alpha_0/2}{\sin(\gamma_b) \cos \alpha_0/2} ; \quad \left( \cos(\gamma_b) = \frac{\sin^2 \alpha_0/2 + \sin^2 \beta_0/2 - \sin^2 \gamma_0/2}{2 \sin \alpha_0/2 \sin \beta_0/2} \right)$$

$$\cos \hat{D}_{CB} = \frac{2 \sin^2 \beta_0/2 - \sin^2 \alpha_0/2 - \sin^2 \beta_0/2 + \sin^2 \gamma_0/2}{2 \sin \beta_0/2 \cos \alpha_0/2 \sin(\gamma_b)}$$

$$\cos \hat{D}_{CB} = \frac{-\sin^2 \alpha_0/2 + \sin^2 \beta_0/2 + \sin^2 \gamma_0/2}{2 \cos \alpha_0/2 \sin \beta_0/2 (\sin \gamma_b)} = \frac{\cos \alpha_0 - \cos \beta_0 - \cos \gamma_0 + 1}{2 \sin(\gamma_b) \sqrt{(1 - \cos \alpha_0)(1 - \cos \beta_0)}}$$

$$\cos \hat{D}_{CO} = \frac{\cos(\gamma_b) - \operatorname{sen} \beta_0/2 \operatorname{sen} \alpha_0/2}{\cos \alpha_0/2 \cos \beta_0/2} \quad ; \text{ sostituendo } \cos(\gamma_b)$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}^2 \alpha_0/2 + \operatorname{sen}^2 \beta_0/2 - \operatorname{sen}^2 \gamma_0/2) - 2 \operatorname{sen} \alpha_0/2 \operatorname{sen} \beta_0/2}{\frac{\operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0}{2}}$$

$$= \frac{(\cancel{1} - \cos \alpha_0 + \cancel{1} - \cos \beta_0 - \cancel{1} + \cos \gamma_0) - (1 - \cos \alpha_0)(1 - \cos \beta_0)}{\operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0}$$

$$= \frac{\cos \gamma_0 - \cos \alpha_0 - \cos \beta_0 + \cos \alpha_0 + \cos \beta_0 - \cos \alpha_0 \cos \beta_0}{\operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0}$$

$$\cos \hat{D}_{CO} = \frac{\cos \gamma_0 - \cos \alpha_0 \cos \beta_0}{\operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0}$$

Diidro su  $\bar{CO}$   
ritorna il valore calcolato  
nel vertice  $O$ ; ( $\hat{D}_{CO}$ )

Analogamente:

$$\cos \hat{D}_{CA} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_0/2 - \operatorname{sen} \beta_0/2 \cos(\gamma_b)}{\operatorname{sen} \gamma_b \cos \beta_0/2}$$

ove  $\cos(\gamma_b) = \dots$

E' così possibile calcolare gli angoli diedri nei vertici  $O$ ; ed  $A, B, C$  della base per angoloidi triedri.

Infatti un triangolo è determinato quando si conoscono tre elementi di cui almeno un lato; ed è sempre piano. cio' non vale se l'angoloide poliedro ha un numero di facce maggiore di 3, (in generale "n" facce).

Consideriamo, per esempio, l'angoloide tetraedro di vertice "O" e si conoscano gli angoli  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ ; delle quattro facce che vi convergono.

questi elementi non sono sufficienti per determinare l'angoloide tetraedro, infatti fermi restando  $\alpha_0, \beta_0, \delta_0, \gamma_0$  l'angolo  $\hat{AOC} = \varepsilon_0$  resta indeterminato. Al più si può affermare che  $\varepsilon_0$  sarà minore della minor somma dei due angoli adiacenti da una stessa parte:

$$: (\alpha_0 + \beta_0) > (\delta_0 + \gamma_0) > \varepsilon_0 \quad \text{oppure} \quad : ((\delta_0 + \gamma_0) > (\alpha_0 + \beta_0) > \varepsilon_0)$$

Consideriamo "O" al centro di una sfera di raggio "r"; l'angoloide tetraedro intercetterà sulla superficie sferica quattro punti: A, B, C, D.

Il quadrilatero ABCD pur essendo coi vertici su una superficie sferica può non essere inscrittibile in una circonferenza, cioè può non essere piano.

Esiste un solo valore di  $\varepsilon_0$  che rende piano il quadrilatero, però l'essere piano è condizione necessaria, ma non sufficiente perché sia anche inscrittibile in una circonferenza. In altre parole, un quadrilatero è sempre inscrittibile in una sfera (vedi sfera per 4 punti), per essere inscritto in una circonferenza deve essere piano, ma non basta, deve anche avere gli angoli interni opposti supplementari. Se è piano ed è iscritto in una sfera è anche inscrittibile in una circonferenza, se però gli angoli interni opposti non sono supplementari la sfera diventa di raggio infinito, (cioè piano non inscrittibile).

## Angoli diedri dell'angoloide tetraedro

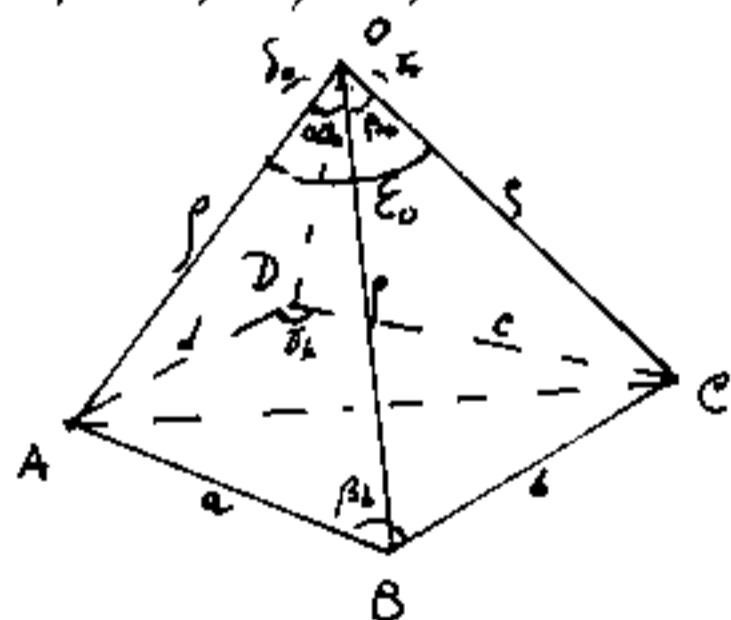
$$\hat{D}_{OA} = \arccos\left(\frac{\cos\beta_0 - \cos\delta_0 \cos\epsilon_0}{\sin\delta_0 \sin\epsilon_0}\right) + \arccos\left(\frac{\cos\delta_0 - \cos\gamma_0 \cos\epsilon_0}{\sin\delta_0 \sin\epsilon_0}\right)$$

$$\hat{D}_{OB} = \arccos\left(\frac{\cos\epsilon_0 - \cos\delta_0 \cos\beta_0}{\sin\delta_0 \sin\beta_0}\right)$$

$$\hat{D}_{OC} = \arccos\left(\frac{\cos\delta_0 - \cos\beta_0 \cos\epsilon_0}{\sin\beta_0 \sin\epsilon_0}\right) + \arccos\left(\frac{\cos\delta_0 - \cos\gamma_0 \cos\epsilon_0}{\sin\gamma_0 \sin\epsilon_0}\right)$$

$$\hat{D}_{OD} = \arccos\left(\frac{\cos\epsilon_0 - \cos\delta_0 \cos\delta_0}{\sin\delta_0 \sin\delta_0}\right)$$

Per il calcolo degli angoli interni alla base, mediante i quali, sarà possibile decidere se il quadrilatero è piano, si applicano le stesse formule ai vertici di base della piramide di spigoli "p". Abbiamo: indicando con:



$$a = 2p \sin\delta_0/2 = \overline{AB}$$

$$b = 2p \sin\beta_0/2 = \overline{BC}$$

$$c = 2p \sin\gamma_0/2 = \overline{CD}$$

$$d = 2p \sin\delta_0/2 = \overline{DA}$$

$$\overline{AC} = 2p \sin\epsilon_0/2$$

Indichiamo con  $\hat{\alpha}_b, \hat{\beta}_b, \hat{\gamma}_b, \hat{\delta}_b$  gli angoli alla base, osservando che  $\hat{\beta}_b$  e  $\hat{\delta}_b$  si risolvono dai triangoli piani, mentre  $\hat{\alpha}_b$  e  $\hat{\gamma}_b$  hanno significato solo se gli angoli diedri  $\hat{D}_{AC}$  dei due triangoli sommano un angolo piatto, cioè se

il quadrilatero ABCD è piano.

Consideriamo inizialmente il triangolo di base ABC sono noti i tre lati e possiamo calcolare i tre angoli interni:

$$\cos(\widehat{CAB}) = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{AC} \cdot \overline{AB}} = \frac{\cancel{4\rho^2} (\sin^2 \alpha_0/2 + \sin^2 \epsilon_0/2 - \sin^2 \beta_0/2)}{\cancel{4\rho^2} (\sin \epsilon_0/2 \sin \beta_0/2)}$$

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{(\sin^2 \epsilon_0/2 + \sin^2 \beta_0/2 - \sin^2 \alpha_0/2)}{(\sin \epsilon_0/2 \sin \beta_0/2)}$$

$$\cos \beta_0 = \frac{(\sin^2 \alpha_0/2 + \sin^2 \beta_0/2 - \sin^2 \epsilon_0/2)}{(\sin \alpha_0/2 \sin \beta_0/2)}$$

Analogamente per il triangolo ADC:

$$\cos \delta_0 = \frac{(\sin^2 \gamma_0/2 + \sin^2 \delta_0/2 - \sin^2 \epsilon_0/2)}{(\sin \gamma_0/2 \sin \delta_0/2)}$$

$$\cos(\widehat{ACD}) = \frac{\sin^2 \gamma_0/2 + \sin^2 \epsilon_0/2 - \sin^2 \delta_0/2}{\sin \gamma_0/2 \sin \epsilon_0/2}$$

$$\cos(\widehat{CAD}) = \frac{\sin^2 \delta_0/2 + \sin^2 \epsilon_0/2 - \sin^2 \gamma_0/2}{\sin \delta_0/2 \sin \epsilon_0/2}$$

Verificare coi simboli indicati in figura. Consideriamo C = vertice:

$$\widehat{OCB} = (90^\circ - \beta_0/2); \quad \widehat{OCA} = (90^\circ - \epsilon_0/2); \quad \widehat{OCD} = (90^\circ - \delta_0/2)$$

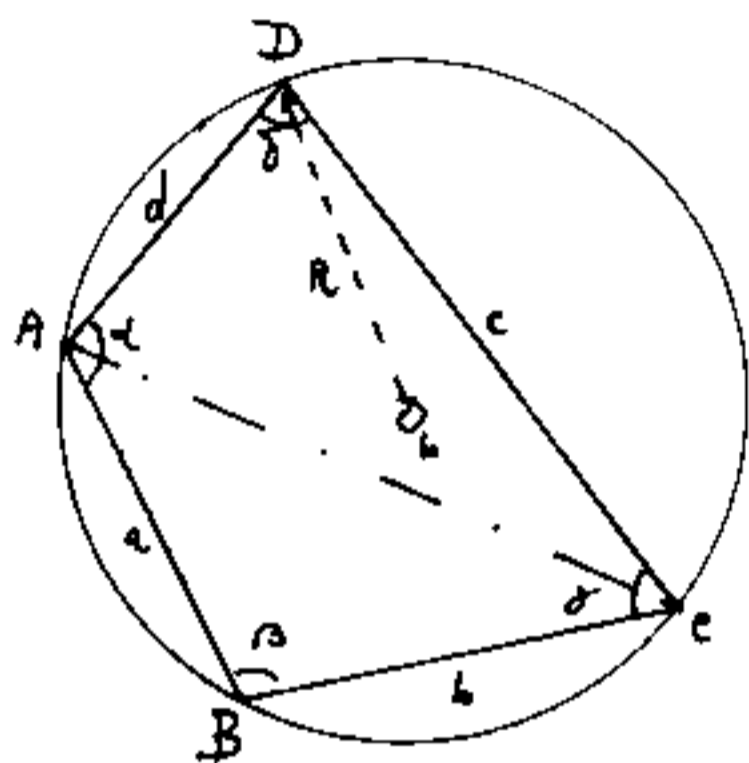
e calcoliamo i due diedri  $\widehat{D}_{\frac{AC}{B}}$ ;  $\widehat{D}_{\frac{AC}{D}}$ .

$$\cos(\widehat{D}_{\frac{AC}{B}}) = \left( \frac{\cos(90^\circ - \beta_0/2) - \cos(90^\circ - \epsilon_0/2) \cos(\widehat{ACB})}{\sin(90^\circ - \epsilon_0/2) \sin(\widehat{ACB})} \right) = \frac{\sin \beta_0/2 - \sin \epsilon_0/2 \cos(\widehat{ACB})}{\sin \epsilon_0/2 \sin(\widehat{ACB})}$$

$$\cos(\widehat{D}_{\frac{AC}{D}}) = \left( \frac{\cos(90^\circ - \delta_0/2) - \cos(90^\circ - \epsilon_0/2) \cos(\widehat{ACD})}{\sin(90^\circ - \epsilon_0/2) \sin(\widehat{ACD})} \right) = \frac{\sin \delta_0/2 - \sin \epsilon_0/2 \cos(\widehat{ACD})}{\sin \epsilon_0/2 \sin(\widehat{ACD})}$$



Anziché considerare l'uguaglianza:  $\cos(\hat{\angle}_{AC}) = -\cos(\hat{\angle}_{BD})$   
 per ricavare il valore dell'angolo  $\epsilon_0$  che rende piano  
 il quadrilatero  $ABCD$ , notiamo che  $ABCD$  essendo in-  
 scritto in una sfera, se piano, deve essere inscritto in  
 una circonferenza, cioè:  $\cos(\beta_b) = -\cos(\delta_b)$ .



Con i simboli in figura si ha:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 + 2cd \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} =$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)ab + (a^2 + b^2)cd - (a^2 + b^2)ab + (c^2 + d^2)ab}{(ab + cd)}$$

$$\overline{AC}^2 = \frac{(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab}{(ab + cd)}$$

Attenzione, nello spazio, date le 5 misure di:  $a, b, c, d, \overline{AC}$   
 non è affatto determinato il quadrilatero, occorre  
 anche che:

$$\overline{BD}^2 = \frac{(a^2 + d^2)cb + (c^2 + b^2)ad}{(ad + cb)}$$

Cioè per determinare un tetraedro nello spazio occorrono  
 le sei misure dei suoi spigoli, che a loro volta  
 sono condizionate dall'esistenza dei triangoli facc.

$$\overline{AC}^2 = 4\rho^2 \operatorname{sen}^2 \frac{E_0}{2} = \frac{(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab}{(ab + cd)}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{E_0}{2} = \frac{(\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_0}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\beta_0}{2}) \operatorname{sen} \frac{\delta_0}{2} \operatorname{sen} \frac{\delta_0}{2} + (\operatorname{sen}^2 \frac{\beta_0}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\delta_0}{2}) \operatorname{sen} \frac{\alpha_0}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha_0}{2}}{(\operatorname{sen} \frac{\alpha_0}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta_0}{2} + \operatorname{sen} \frac{\delta_0}{2} \operatorname{sen} \frac{\delta_0}{2})}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{E_0}{2} = \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha_0}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\beta_0}{2}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta_0}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha_0}{2}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{\gamma_0}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\delta_0}{2}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{\delta_0}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\gamma_0}{2}} \right) \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha_0}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta_0}{2}} + \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\gamma_0}{2} \operatorname{sen} \frac{\delta_0}{2}} \right)$$

è la condizione per cui la sezione della superficie sferica sugli spigoli dell'angoloide tetraedro, corrisponda ad una sezione piana. (con  $\rho = \text{cost}$ )

Dati  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ , ogni valore di  $E_0$  diverso dalla espressione di cui sopra, nei limiti di esistenza di un angoloide tetraedro, determina quadrilateri non piani inscritti in una sfera, se l'angoloide è sezionato con un piano, la sfera circoscritta al quadrilatero piano ha raggio  $= \infty$ , infatti la condizione di  $E_0$  soprascritta vale solo per quell' $E_0$  e per quella determinata giacitura di piani distanti da "0"  $\overline{OQ_b} = \sqrt{\rho^2 - r^2}$  ove  $r =$  raggio della circonferenza:  $r = \frac{\overline{AC}}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta_0}{2}} = \frac{\overline{AC}}{2 \operatorname{sen}(\hat{A} \hat{Q}_b)}$  ed  $O_b =$  centro della circonferenza.

Abbiamo visto che: "Condizioni affinché una sfera di raggio finito non passi per quattro punti  $A, B, C, D$ ; sono: che il quadrilatero  $ABCD$  sia piano; e che il valore dell'angolo  $\epsilon_0$  in funzione di  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$  sia diverso da quello della relazione trovata; cioè che  $\rho$  diventi infinito.

Per comprendere meglio, facciamo un:

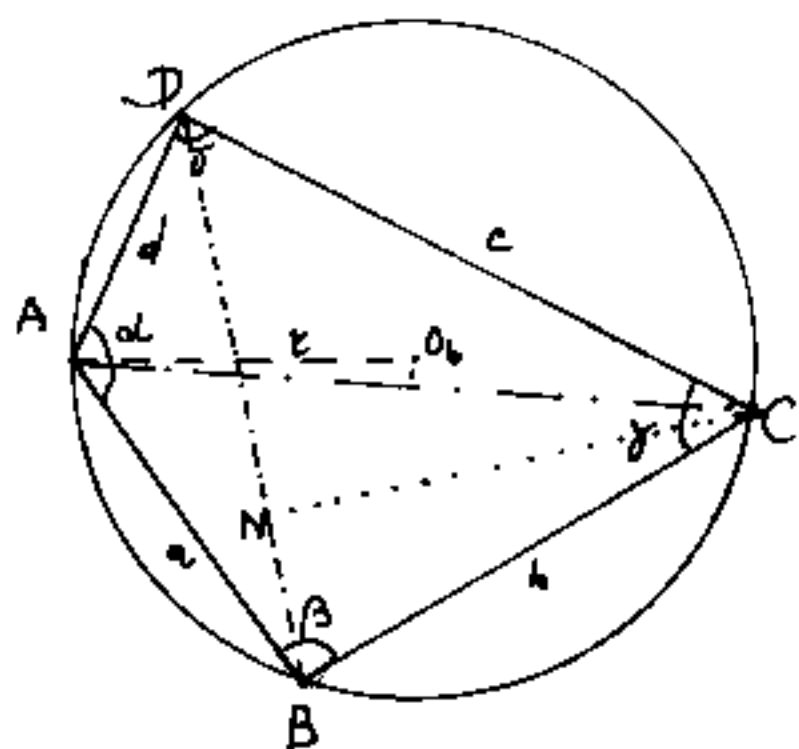
### Esempio numerico

I lati del quadrilatero  $A, B, C, D$  siano:

$$a = 6, \quad b = 8, \quad c = 10, \quad d = 4$$

se i quattro vertici sono su una superficie sferica

$$\text{di raggio } \rho = \overline{OA} = \frac{3}{4 \sin \frac{\alpha_0}{2}} = \overline{OB} = \frac{4}{\sin \frac{\beta_0}{2}} = \overline{OC} = \frac{5}{\sin \frac{\gamma_0}{2}} = \overline{OD} = \frac{2}{\sin \frac{\delta_0}{2}}$$



condizione che il quadrilatero (piano) sia inscrittibile in una circonferenza  $\bar{e}$ :

$$\cos \beta = -\cos \delta$$

$$\text{cioè } (\beta + \delta) = 180^\circ = \pi \text{ rad.}$$

quindi dai triangoli  $ACB$  e  $ACD$ ,

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 + 2cd \cos \beta$$

da cui:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = -\frac{1}{11}; \quad \cos \delta = +\frac{1}{11}$$

$$\beta = 95^\circ 12' 57'', 28$$

$$\delta = 84^\circ 47' 02'', 73$$

$$\overline{AC} = \sqrt{36 + 64 - 2(6 \cdot 8) \left(-\frac{1}{11}\right)} = 10,42723706$$

$$\rho = \frac{\overline{AC}}{2 \sin \delta} = 5,235296871 \quad (\text{raggio base})$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\epsilon_d}{2}\right) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{2}{5}}{\frac{p}{3} + \frac{p}{4} + \frac{p}{5} + \frac{p}{2}} = \frac{(AC)^2/p^2}{p^2}$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\epsilon_d}{2}\right) = \frac{1}{p^2} \left( \frac{95/12 + 29/10}{1/12 + 1/10} \right) = \frac{1}{p^2} \frac{299}{11} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\epsilon_d}{2}\right) = \frac{1}{p} (5,2136)$$

Si noti che possiamo avere infinite sfere aventi il centro "O" sulla verticale al piano di ABCD passante per  $O_b$ . Se  $h$  è l'altezza della piramide:  $f^2 = h^2 + r^2$ .

Quindi per definire quale sfera, occorre definire  $f$ , che non potrà mai essere inferiore ad  $r$  perché se  $f = r$  i quattro punti stanno sul cerchio massimo della sfera e la piramide degenera in un piano ( $h=0$ ).

Esistono quindi infinite sfere che circoscrivono un quadrilatero piano inscritto in una circonferenza.

Consideriamo ora il nostro quadrilatero deformabile, prima però calcoliamone tutti gli elementi

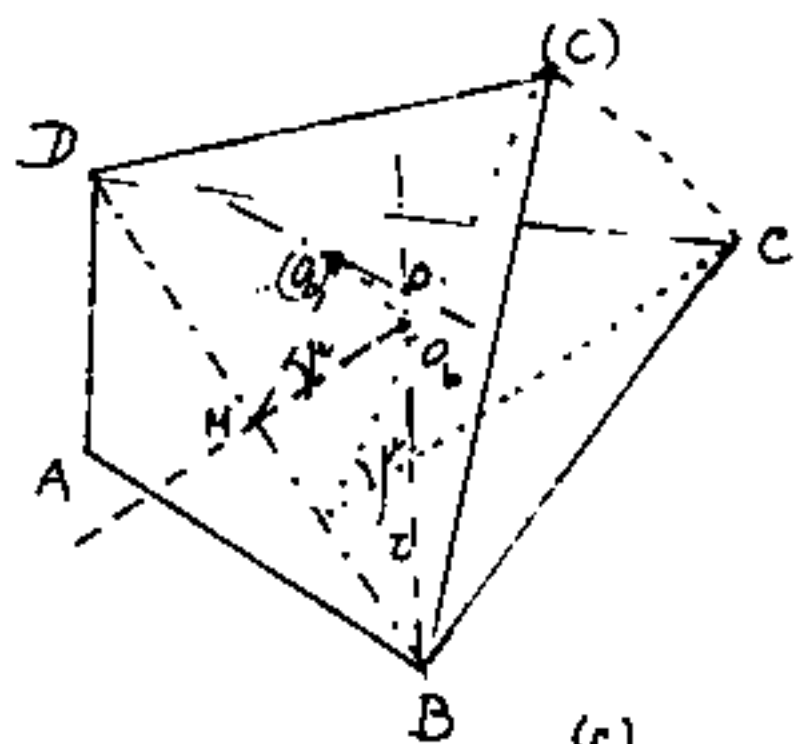
$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - c^2 - b^2}{2(ad + cb)} = -\frac{7}{13}; \quad \cos \beta = +\frac{7}{13}; \quad \begin{cases} \alpha = 122^\circ 34' 44,29'' \\ \beta = 57^\circ 25' 15,71'' \end{cases}$$

$$\overline{DB} = \sqrt{36 + 16 - 2(6 \cdot 4)\left(-\frac{7}{13}\right)} = 8,823046744; \quad \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta = \frac{2}{13}\sqrt{30};$$

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{13}\sqrt{30}; \quad \text{Area: } S_{ABE} = 23,90062069; \quad S_{ACD} = 19,91718391$$

$$S = 43,8178046 = (4\sqrt{70}); \quad S_{ABD} = 10,11180106; \quad S_{BDE} = 33,70600354;$$

Supponiamo che il triangolo ABD resti nel suo piano, mentre il triangolo BCD ruota intorno a  $\overline{BD}$  dell'angolo  $\mu$ . Prima della rotazione i due triangoli avevano circocentro in comune, in  $O_b$ , (condizione perché il quadrilatero sia inscritto in una circonferenza), dopo la rotazione, mentre il circocentro di ABD, resta in  $O_b$  il circocentro di BCD segue il piano nella rotazione descrivendo una circonferenza nel piano che biseca ortogonalmente  $\overline{BD}$  ed ha per traccia sul piano del quadrilatero iniziale l'asse di  $\overline{BD}$  comune ai due triangoli.



Calcoliamo la distanza di  $O_b$  dalla retta BD cioè:  $\overline{O_bM} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)^2}$

$$\overline{O_bM} = \sqrt{\left(\frac{DB}{2 \sin \gamma}\right)^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)^2} = r \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}$$

$$\overline{O_bM} = r \cos \gamma = 2,795708437$$

Sezioniamo col piano per M normale a  $\overline{BD}$  ed avremo:

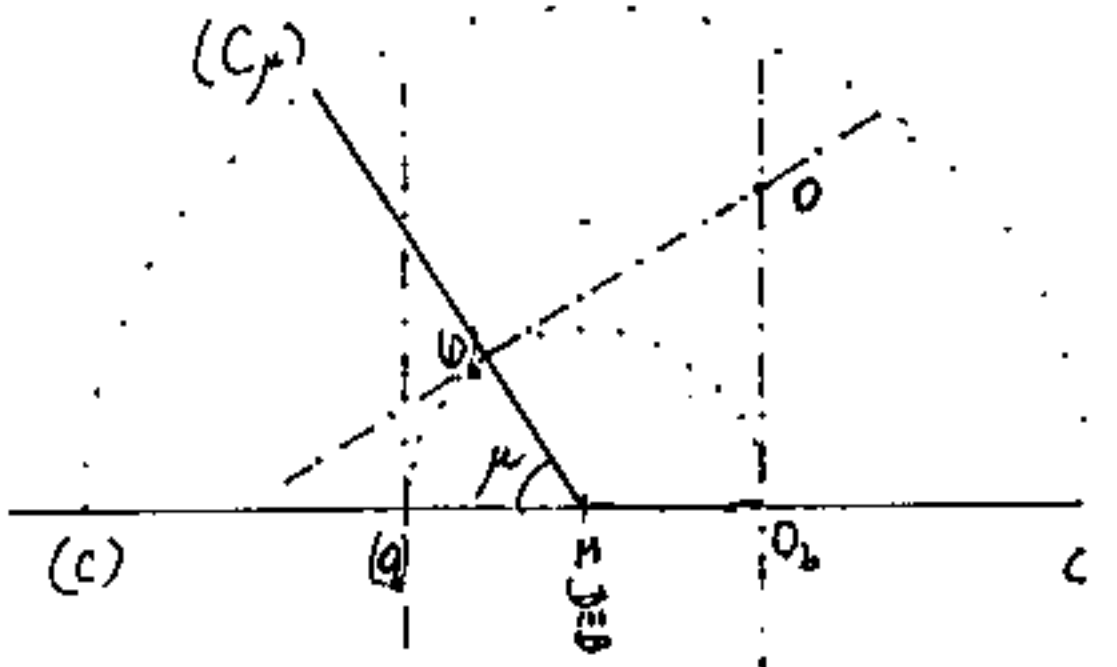
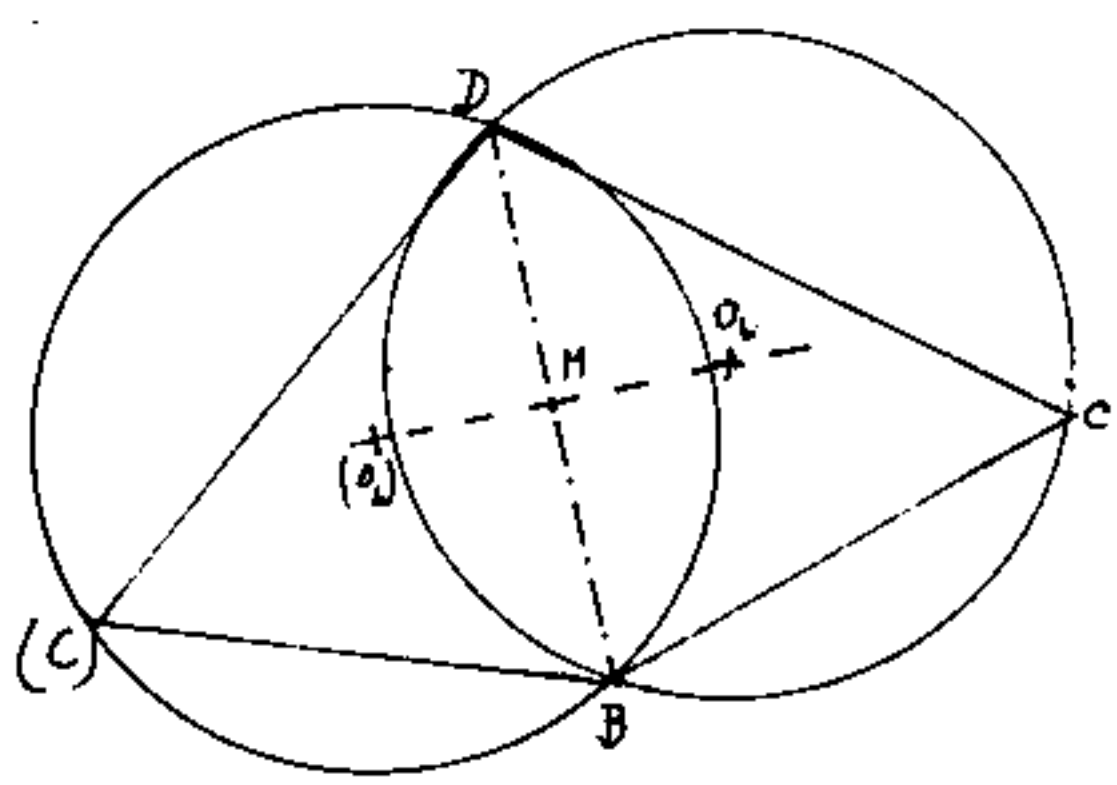
I triangoli rettangoli  $MO_bO$  ed  $M(O_b)O$  sono uguali avendo uguale ipotenusa ( $\overline{MO}$ ) e cateto  $\overline{MO_b} = \overline{M(O_b)}$

perciò:  $(\overline{OO_b}) = \overline{MO_b} \operatorname{tg}(\mu/2)$ .

$$\rho^2 = r^2 + (\overline{OO_b})^2 = r^2 \cos^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{2} + r^2$$

$$\rho = r \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{2}}{\cos^2 \frac{\mu}{2}}} \quad \text{per } \mu = 90^\circ \rightarrow \frac{\mu}{2} = 45^\circ \rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{2} = 1 \rightarrow \rho = \frac{2}{3} \sqrt{218}$$

Passiamo ora considerare un quadrilatero qualsiasi non inscrittibile in una circonferenza per esempio composto da due triangoli  $DBC$  ribaltati intorno a  $\overline{DB}$  comune. I due



$\overline{DB}$  comune. I due triangoli hanno i circocentri distinti uno: è  $O_1$ , l'altro  $(O_2)$ . Le perpendicolari da  $O_1$  e da  $(O_2)$  sul piano del quadrilatero sono il luogo dei centri delle sfere circoscritte a ciascuno dei due triangoli.

Se un triangolo è ruotato dell'angolo  $\mu$  rispetto al piano dell'altro cioè:  $(c)\hat{M}C = (180^\circ - \mu)$  le due perpendicolari originariamente parallele hanno un punto "O" comune centro della sfera circoscritta ai due triangoli, cioè circoscritta al quadrilatero non piano (sghembo):  $(C_1)BCD$ . —  $(OO_1)^2 + r^2 = R^2$ . Le distanze  $\overline{O_1H}$  sono in generale diverse, le indichiamo con  $\overline{O_1H}$  ed  $\overline{O_2H}$  ed avremo che i due triangoli aventi in comune  $\overline{DB}$  hanno  $\alpha$  diversi:  $\alpha_1, \alpha_2$ ;

ruotato dell'angolo  $\mu$  rispetto al piano dell'altro cioè:  $(c)\hat{M}C = (180^\circ - \mu)$  le due perpendicolari originariamente parallele hanno un punto "O" comune centro della sfera circoscritta ai due triangoli, cioè circoscritta al quadrilatero non piano (sghembo):  $(C_1)BCD$ . —  $(OO_1)^2 + r^2 = R^2$ . Le distanze  $\overline{O_1H}$  sono in generale diverse, le indichiamo con  $\overline{O_1H}$  ed  $\overline{O_2H}$  ed avremo che i due triangoli aventi in comune  $\overline{DB}$  hanno  $\alpha$  diversi:  $\alpha_1, \alpha_2$ ;



indipendentemente dall'angolo  $\mu$ , dai quattro punti del quadrilatero sghembo ABCD.

Occorre ora calcolare in funzione di  $\mu$  tale distanza che è il raggio della sfera.

Dati i lati  $a, b, c, d$  e la distanza  $\overline{BD}$  è facile calcolare i raggi dei cerchi circoscritti  $r_1$  e  $r_2$  ed è facile trovare la distanza dei circocentri dalla distanza comune  $\overline{BD}$  ove M è il punto medio:

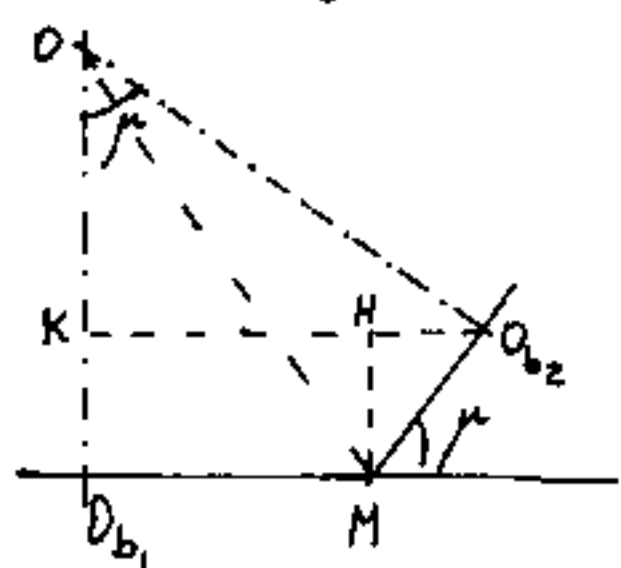
$$\overline{O_{b_1}M}^2 = r_1^2 - \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2; \quad \overline{O_{b_2}M}^2 = r_2^2 - \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2; \quad \overline{MO_{b_2}} \sin \mu = \overline{MH};$$

$$\overline{MO_{b_2}} \cos \mu = \overline{O_{b_2}H}; \quad \overline{O_{b_1}M} = \overline{KH};$$

$$(\overline{OM} + \overline{MO_{b_2}} \cos \mu) = \overline{KO_{b_2}};$$

$$\overline{KO_{b_2}} / \sin \mu = \overline{OO_{b_2}};$$

$$\overline{OO_{b_2}}^2 + \overline{MO_{b_2}}^2 = \overline{OM}^2; \quad (\text{sostituendo})$$



$$\overline{OM}^2 = \frac{(\overline{O_{b_1}M}^2 + \overline{MO_{b_2}}^2 \cos^2 \mu + 2\overline{MO_{b_1}}\overline{MO_{b_2}} \cos \mu)}{\sin^2 \mu} + \overline{MO_{b_2}}^2$$

$$\overline{OM}^2 = \frac{\overline{O_{b_1}M}^2 + \overline{MO_{b_2}}^2 (\cos^2 \mu + \sin^2 \mu) + 2\overline{MO_{b_1}}\overline{MO_{b_2}} \cos \mu}{\sin^2 \mu}$$

$$\boxed{\overline{OM}^2 = \frac{\overline{O_{b_1}M}^2 + \overline{O_{b_2}M}^2 + 2\overline{O_{b_1}M}\overline{O_{b_2}M} \cos \mu}{\sin^2 \mu}}$$

$$\boxed{\rho^2 = \overline{OM}^2 + \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2} \quad \text{Si noti che per: } \mu = 0 \rightarrow \rho = \infty.$$

Quindi nel capitolo della sfera per 4 punti, si ha che se il determinante dei coefficienti è nullo o si hanno  $\infty$  soluzioni reali (quadrilatero circoscrittibile piano) o non si hanno soluzioni reali (quadrilatero piano non circoscrittibile).



Un angoloide tetraedro determina sulla superficie della sfera che ha il centro nel vertice dell'angoloide, quattro punti in genere non appartenenti allo stesso piano, inversamente dati quattro punti non complanari si determina univocamente il raggio della sfera. Se invece sono dati quattro punti complanari sono dati due casi:

- 1) Il quadrilatero è circoscrittibile con una circonferenza, allora esistono infinite sfere la cui superficie passa per i quattro punti.
- 2) Il quadrilatero non è circoscrittibile con una circonferenza, allora solo la superficie della sfera di raggio infinito passa per i quattro punti.

Nel caso di angoloidi poliedri

occorre verificare: se il poligono è piano e circoscrittibile, esistono infinite sfere; se non circoscrittibile vale solo la sfera di raggio infinito.

Se il poligono non è piano, fatta passare la sfera per 4 punti non complanari, occorre verificare se i restanti punti soddisfano l'equazione e quindi se appartengono o meno alla sfera.

## I solidi geometrici

Gli elementi caratteristici di un solido sono: gli spigoli, i vertici, le facce.

Le facce sono porzioni finite di piani delimitate dagli spigoli e gli spigoli sono delimitati dai vertici.

Vale la relazione di Eulero:  $F + V = S + 2$  cioè:

"La somma delle facce e dei vertici equivale il numero degli spigoli più due"

Ciò vale per tutti i solidi geometrici regolari o irregolari.

## I Solidi regolari (Poliedri regolari)

"Un poliedro si dice regolare se tutte le facce sono poligoni regolari e gli angoli di vertice sono uguali fra loro."

I poliedri regolari sono solo cinque e non possono essere più di cinque.

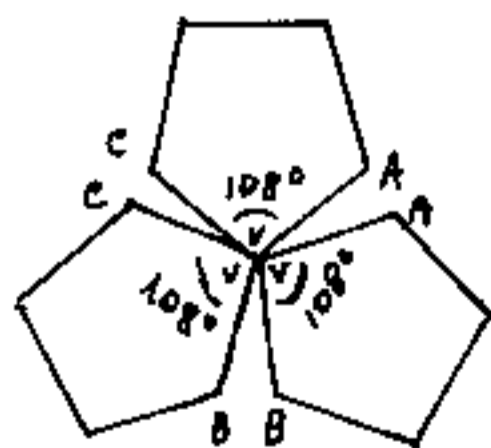
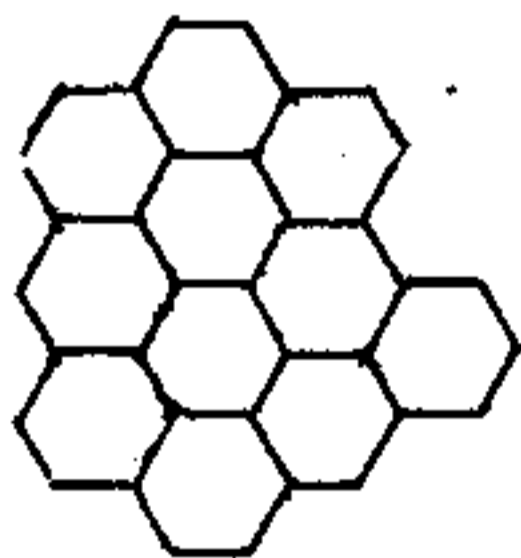
Infatti se le facce sono triangoli equilateri (angolo al vertice  $60^\circ$ ) poiché la somma degli angoli delle facce di un angoloide deve essere minore di  $360^\circ$ , le facce triangolari equilateri che convergono in un vertice debbono essere meno di sei ( $6 \times 60^\circ = 360^\circ$ ); cioè possono essere tre dando luogo al tetraedro;

possono essere quattro e formeranno l'ottaedro ;  
possono essere cinque ed avremo l'icosaedro .

Se le facce sono quadrati (angolo  $90^\circ$ )  
debbono essere meno di quattro ( $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ ) perciò  
le facce che convergono in un vertice non possono  
essere che tre si ha così il eubo o esaedro

Se le facce sono pentagoni regolari (angolo  $108^\circ$ )  
anche in questo caso le facce che convergono in  
un vertice possono essere solo tre ( $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$ )  
e con tre abbiamo il dodecaedro (regolare).

È impossibile fare un solido di sole facce  
esagonali (regolari) perché l'angolo di  $120^\circ$   
( $120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$ ) porta a costituire un piano.



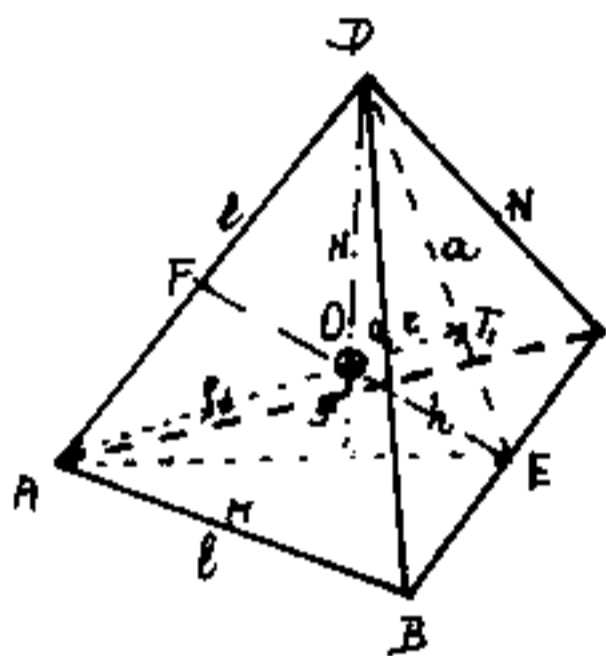
Se invece ritagliamo i pentago-  
ni in figura ed uniamo i lati  
 $\overline{VA}$  fra loro,  $\overline{VB}$  fra loro,  $\overline{VC}$  fra loro  
si ottiene un vertice del dodecae-  
dro.

Resta così dimostrato che i solidi  
regolari sono solo cinque :

tetraedro , esaedro (eubo) ,  
ottaedro , dodecaedro , icosaedro .

# Il tetraedro

Il tetraedro regolare è costituito da quattro facce triangolari equilateri, quattro vertici e sei spigoli, (la relazione di Eulero:  $4 + 4 = 6 + 2$ ).  
È il solido col numero minimo di facce.



$l =$  lato della faccia = spigolo del tetraedro

$$l = \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$$

$a =$  apotema = altezza della faccia

$$a = \overline{DE} = \overline{DM} = \overline{DS} ; = \overline{AE} = \overline{BS} = \overline{CH} ; = \overline{BF} = \overline{CF} =$$

$$= \overline{AN} = \overline{AQ} = \overline{BN} = \overline{CQ}.$$

$h =$  altezza del triangolo isoscele (AED)

$h =$  distanza fra due spigoli opposti (sghembi) =  $\overline{FE} = \overline{MN} = \overline{QS}$ .

Si noti che il tetraedro è la figura geometrica base per lo studio della costituzione della materia, ne vedremo l'importanza in cristallografia, ma soprattutto come fatto energetico, al quale possiamo ridurre partendo da principi molto diversi: per esempio notiamo che due spigoli opposti hanno direzioni ortogonali e sono su rette sghembe di minima distanza  $h$ , ortogonale agli spigoli, esattamente come il campo elettrico, il campo magnetico, ed il campo di forze ponderomotrici. (Supponete di prendere fra il pollice e l'indice della mano destra e della mano sinistra due spigoli opposti.)

Torneremo sul problema energetico.

Simboli: indicheremo con:

$l$  = lato di una faccia = spigolo

$a$  = apotema = altezza di una faccia

$H$  = altezza del tetraedro = distanza di un vertice dalla faccia opposta

$h$  = altezza del triangolo isoscele di base  $l$  e lati  $a$  =  
= distanza di due spigoli opposti

$d$  = distanza degli spigoli dal centro ( $d = l/2$ )

$r$  = raggio della sfera inscritta = distanza delle facce dal centro del tetraedro.

$r_1$  = raggio della sfera circoscritta = distanza dei vertici dal centro del tetraedro

$g$  = distanza fra i centri delle facce = spigolo del tetraedro inscritto

$S$  = superficie laterale del tetraedro

$V$  = volume del tetraedro

$\hat{D}$  = angolo diedro fra le facce: (dal triangolo di base  $l$  e lati  $a$  il cui piano è normale allo spigolo nel vertice - vedi in figura AED) si ha:

$$\hat{D} = \hat{AED} = 2 \arcsin\left(\frac{l}{3a}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{l}{l\sqrt{3}}\right) = \boxed{70^\circ 31' 43",61}$$

$$= 2 \arccos\left(\frac{h}{a}\right) = 2 \arccos\left(\frac{\sqrt{3}l/2}{l\sqrt{3}}\right) = 2 \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= \arcsin\left(2 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \boxed{\hat{D} = \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\boxed{\hat{D} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)} = \boxed{\hat{D} = \arctg(2\sqrt{2})} \quad \boxed{\hat{D} = 1,230959417 \text{ rad.}}$$

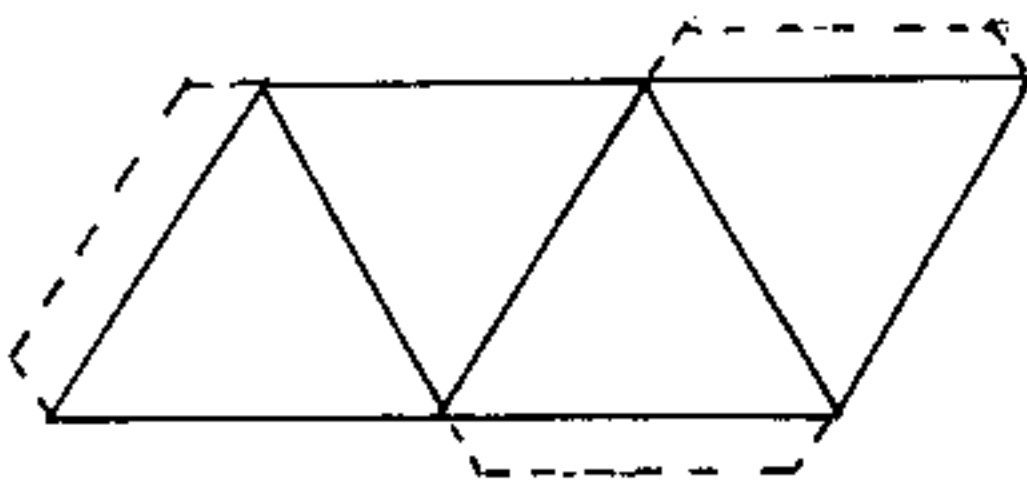
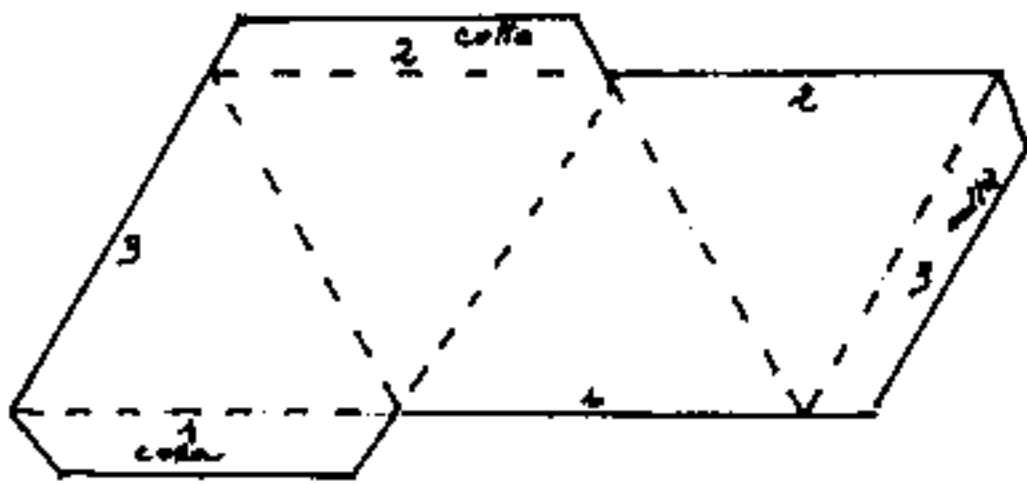
TAVOLA delle relazioni fra gli elementi del tetraedro

	$l$	$a$	$H$	$h$	$d$	$\tau$	$\rho_s$	$g$	$S$	$V$
$l$	$l$ 1.1547005	$\frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot a$ 1.1547005	$\frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot H$ 1.22474487	$\sqrt{2} \cdot h$ 1.41421356	$2\sqrt{2} \cdot d$ 2.828427	$2\sqrt{6} \cdot \tau$ 4.898979	$\frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot \rho_s$ 1.632993	$3 \cdot g$ 3.000000	$\sqrt{\frac{1}{3}} S$ 0.75983568	$2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \sqrt{V}$ 2.0395689
$a$	$\frac{\sqrt{3}}{2} l$ 0.866025	$a$	$\frac{3}{4}\sqrt{2} \cdot H$ 1.06066017	$\frac{\sqrt{6}}{2} h$ 1.22474487	$\sqrt{6} \cdot d$ 2.4494897	$3\sqrt{2} \cdot \tau$ 4.2426407	$\sqrt{2} \cdot \rho_s$ 1.41421356	$\frac{3\sqrt{3}}{2} g$ 2.5980762	$\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{S}$ 0.6580310	$\frac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{V}$ 1.763877
$H$	$\frac{\sqrt{6}}{3} l$ 0.81649658	$\frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot a$ 0.9428090	$H$	$\frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot h$ 1.1547005	$\frac{4}{3}\sqrt{3} \cdot d$ 2.30940108	$4 \cdot \tau$ 4.00000	$\frac{4}{3} \cdot \rho_s$ 1.3333333	$\sqrt{6} \cdot g$ 2.4494897	$\frac{1}{3}\sqrt{12} \cdot \sqrt{S}$ 0.62040329	$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{V}$ 1.1547005
$h$	$\frac{\sqrt{2}}{2} l$ 0.70710678	$\frac{\sqrt{6}}{3} a$ 0.8164966	$\frac{\sqrt{3}}{2} H$ 0.866025	$h$	$2 \cdot d$ 2.00000	$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \tau$ 3.4641016	$\frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \rho_s$ 1.1547005	$\frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot g$ 2.1213203	$\frac{1}{\sqrt{12}} \sqrt{S}$ 0.527286965	$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{V}$ 1.4422496
$d$	$\frac{\sqrt{2}}{4} l$ 0.35355339	$\frac{\sqrt{6}}{6} a$ 0.40824829	$\frac{\sqrt{3}}{4} H$ 0.4330127	$\frac{1}{2} h$ 0.500000	$d$	$\sqrt{3} \cdot \tau$ 1.73205080	$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \rho_s$ 0.57735027	$\frac{3}{4}\sqrt{2} \cdot g$ 1.060660	$\frac{1}{2\sqrt{12}} \sqrt{S}$ 0.26864248	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{V}$ 0.721124725
$\tau$	$\frac{\sqrt{6}}{12} l$ 0.204124	$\frac{\sqrt{2}}{5} a$ 0.23570226	$\frac{1}{4} H$ 0.250000	$\frac{\sqrt{3}}{6} h$ 0.288675	$\frac{\sqrt{3}}{3} d$ 0.57735027	$\tau$	$\frac{1}{3} \cdot \rho_s$ 0.3333333	$\frac{\sqrt{6}}{4} g$ 0.6123724	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{108} \sqrt{S}$ 0.155100809	$(\frac{1}{2\sqrt{3}})^{3/2} \sqrt[3]{V}$ 0.415341588
$\rho_s$	$\frac{\sqrt{6}}{4} l$ 0.6123724	$\frac{\sqrt{2}}{2} a$ 0.70710678	$\frac{3}{4} H$ 0.750000	$\frac{\sqrt{3}}{2} h$ 0.866025	$\sqrt{3} \cdot d$ 1.73205080	$3 \cdot \tau$ 3.000000	$\rho_s$	$\frac{3}{4}\sqrt{6} g$ 1.8371173	$\sqrt{\frac{3}{8}} \sqrt{S}$ 0.46530248	$\frac{3\sqrt[3]{6}}{2} \sqrt[3]{V}$ 1.249024766
$g$	$\frac{1}{3} l$ 0.3333333	$\frac{2}{9}\sqrt{3} a$ 0.38490018	$\frac{\sqrt{6}}{6} H$ 0.40824829	$\frac{\sqrt{2}}{3} h$ 0.47140452	$\frac{2}{3}\sqrt{2} d$ 0.94280904	$\frac{2}{3}\sqrt{6} \tau$ 1.63299316	$\frac{2}{9}\sqrt{6} \rho_s$ 0.50433109	$g$	$\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{S}$ 0.25327856	$\frac{16\sqrt{8}}{81} \sqrt[3]{V}$ 0.679802967
$S$	$\sqrt{3} \cdot l^2$ 1.7320508	$\frac{4}{3}\sqrt{3} \cdot a^2$ 3.30941	$\frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot H^2$ 2.5980762	$2\sqrt{3} h^2$ 3.4641016	$8\sqrt{3} d^2$ 13.856406	$24\sqrt{3} \cdot \tau^2$ 41.56929	$\frac{8}{3}\sqrt{3} \cdot \rho_s^2$ 4.618802	$9\sqrt{3} \cdot g^2$ 15.588457	$S$	$6 \cdot 3^{1/2} \cdot \sqrt[3]{V}$ 7.306621731
$V$	$\frac{\sqrt{2}}{12} l^3$ 0.11785113	$\frac{2\sqrt{6}}{27} a^3$ 0.181443684	$\frac{\sqrt{3}}{8} H^3$ 0.21650635	$\frac{1}{3} h^3$ 0.333333	$\frac{8}{3} d^3$ 2.56667	$8\sqrt{3} \tau^3$ 13.856406	$\frac{8}{27}\sqrt{3} \rho_s^3$ 0.5132002	$\frac{9}{4}\sqrt{2} g^3$ 3.1819205	$\frac{1}{2\sqrt{3}} S^{3/2}$ 0.051700269	$V$

## Modelli-sviluppo in piano di solidi

Lo sviluppo in piano del tetraedro, per costruire modellini in cartoncino è molto semplice: questi modellini (cioè vale per tutti i solidi) ordinariamente riportano in piano lo sviluppo delle sole facce, e però comodo siano indicate anche le linguette da incollare. Per avere spigoli nitidi, le linee possono essere incise con un rafilatore, tali incisioni permettono anche di ridurre lo spessore delle linguette.

Il disegno può essere effettuato con criteri diversi; per esempio: ritagliare lungo la linea intera



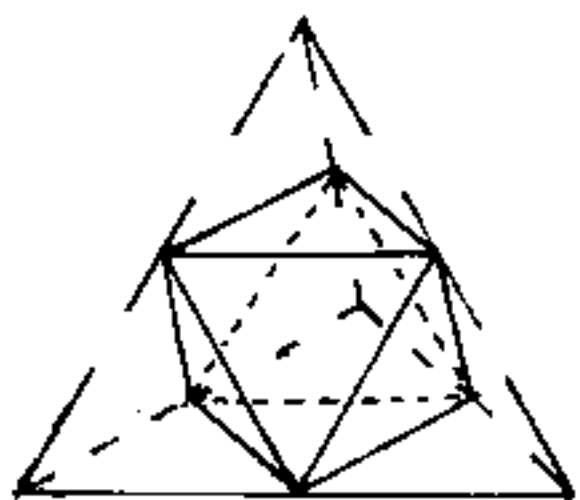
e piegare lungo le linee tratteggiate, il tratteggio può essere fatto in due diversi modi per piegature in dentro oppure in fuori. Le parti da combaciare e incollare possono essere numerate.

Oppure si può fare a

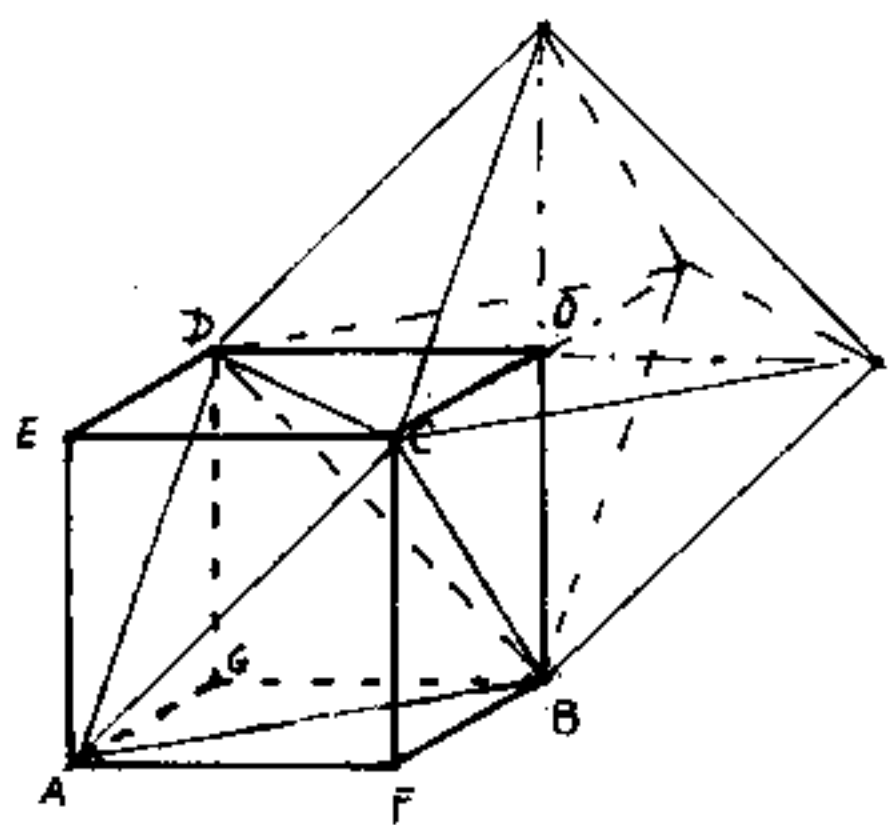
tratto intero le facce ed a tratteggio le linguette da incollare, quest'ultimo modo rende difficoltoso montare modellini con "elevatus" cioè che hanno piegature in due versi opposti. Le linguette, di regola, vanno alternate.

In figura i due tipi di sviluppo per il tetraedro.

Unendo i punti medi degli spigoli di un tetraedro, si ottengono quattro tetraedri di spigolo metà ed un ottaedro centrale avente gli spigoli in comune coi quattro tetraedri.



Si noti che la continuità nello spazio tridimensionale, non si ha solo considerando un insieme di cubetti paralleli agli assi ed affiancati, come insegna il calcolo infinitesimale col cubetto  $dx, dy, dz$ ; in effetti, come si può notare dalla figura, si ha

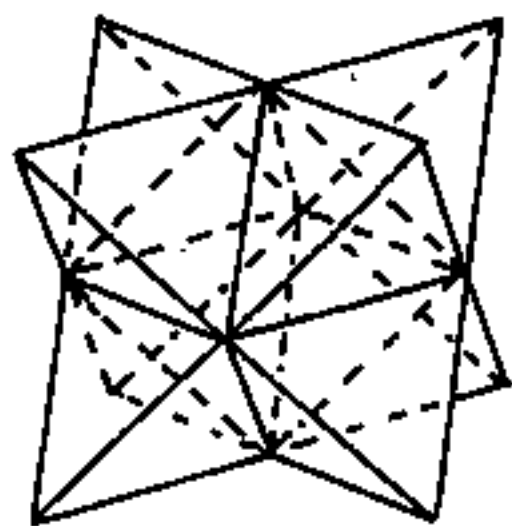
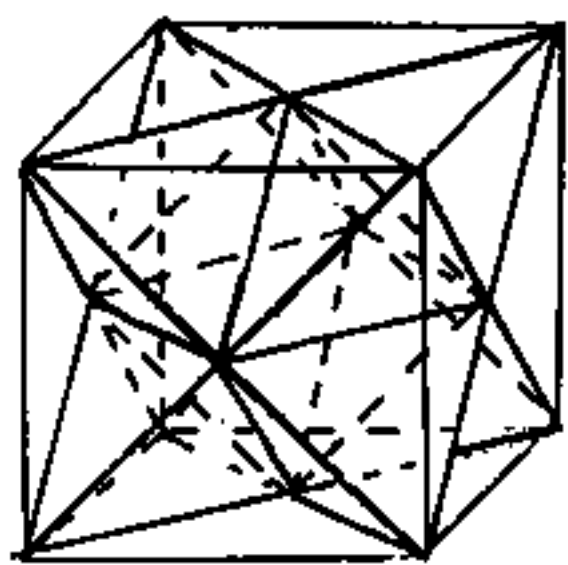


che, facendo combaciare sulle facce del tetraedro ABCD. un ottavo di ottaedro come  $BCDO = ACDE = ABCF = ABDG$ , si ottiene il cubo AFBGDECO. Il rapporto con lo spigolo

del tetraedro è  $\sqrt{2}$ ; lo spigolo del cubo è la distanza fra due spigoli opposti del tetraedro (minima distanza delle rette sghembe su cui giacciono tali spigoli). Lo spigolo del tetraedro è una diagonale della faccia del cubo.

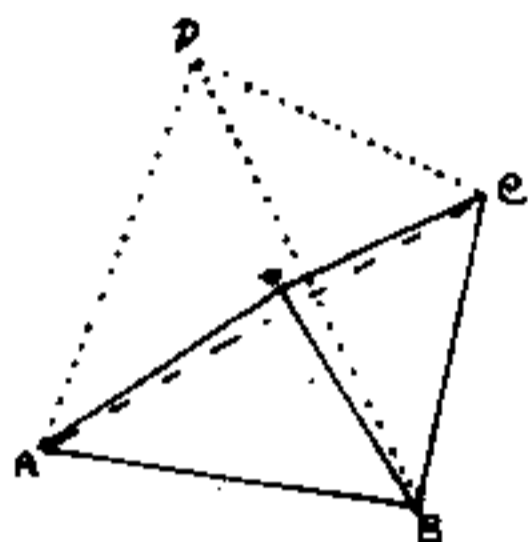
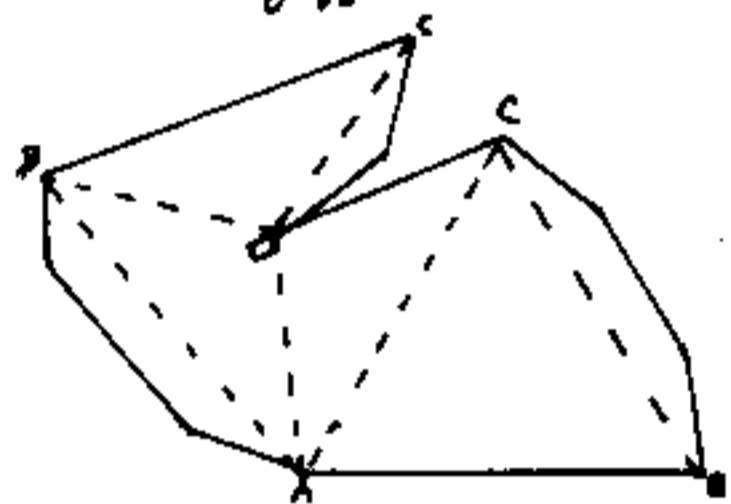


Se alle facce del cubo tracciamo entrambe le diagonali, otteniamo l'intersezione di due tetraedri, uguali ed opposti, aventi in comune l'ottaedro centrale di spigolo metà. Per vedere tale solido, occorre togliere dal cubo i dodici quarti di ottaedro di spigolo metà aventi in comune, ciascun ottaedro, uno spigolo con l'ottaedro centrale, e sono inoltre delimitati da due semidiagonali del cubo, (spigoli) e dallo spigolo (lato) del cubo che è diagonale comune, cioè asse comune dei piani che hanno sezionato l'ottaedro in quarti.



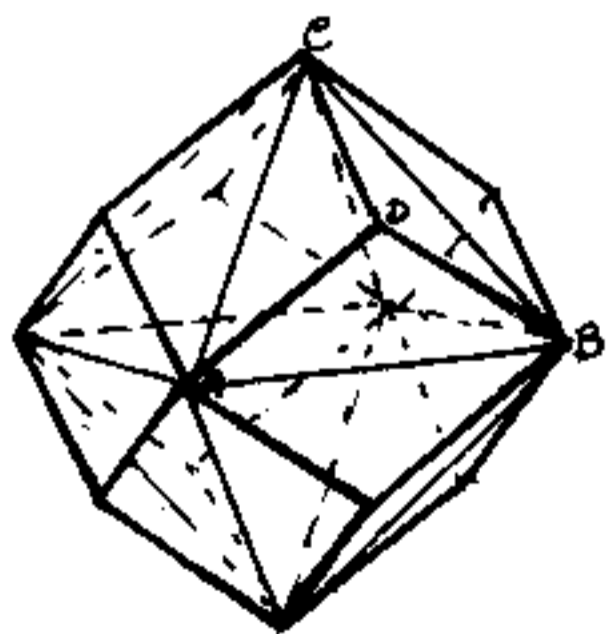
Se uniamo il centro del tetraedro con i vertici otteniamo 4 piramidi a base triangolare equilatera, alte  $h = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ ; le facce laterali sono tre triangoli isosceli con base  $l$  e lati obliqui  $= l_3 = \frac{1}{2}\sqrt{6} = 3h$ . Le facce laterali costituiscono un angoloide triedro di  $\frac{4\pi}{3} = \pi$  stereoradiani. Gli angoli piani al vertice delle facce sono:  $\alpha = \arccos(-\frac{1}{3}) = 109^\circ 28' 16", 33 = 1.910633236 \text{ rad.}$ , (supplementari dell'angolo diedro delle facce del tetraedro); gli angoli alla

base delle facce:  $35^{\circ} 15' 51,8''$  e l'angolo diedro fra le facce laterali di questi angoloidi triedri è  $120^{\circ}$  (un terzo di angolo giro); l'angolo diedro fra base e faccia è  $\arctan \frac{1}{\sqrt{2}} = 35^{\circ} 15' 51,8''$ .



Disegniamo lo sviluppo per fare il modellino e la sua posizione nel tetraedro di una delle quattro piramidi interne.

Supponiamo di aver costruito otto piramidi che costituiscono due tetraedri; le basi triangolari equilatera le facciamo combaciare con le facce di un ottaedro di uguale spigolo, si ottiene così un altro solido: il rombododecaedro ove un ele-



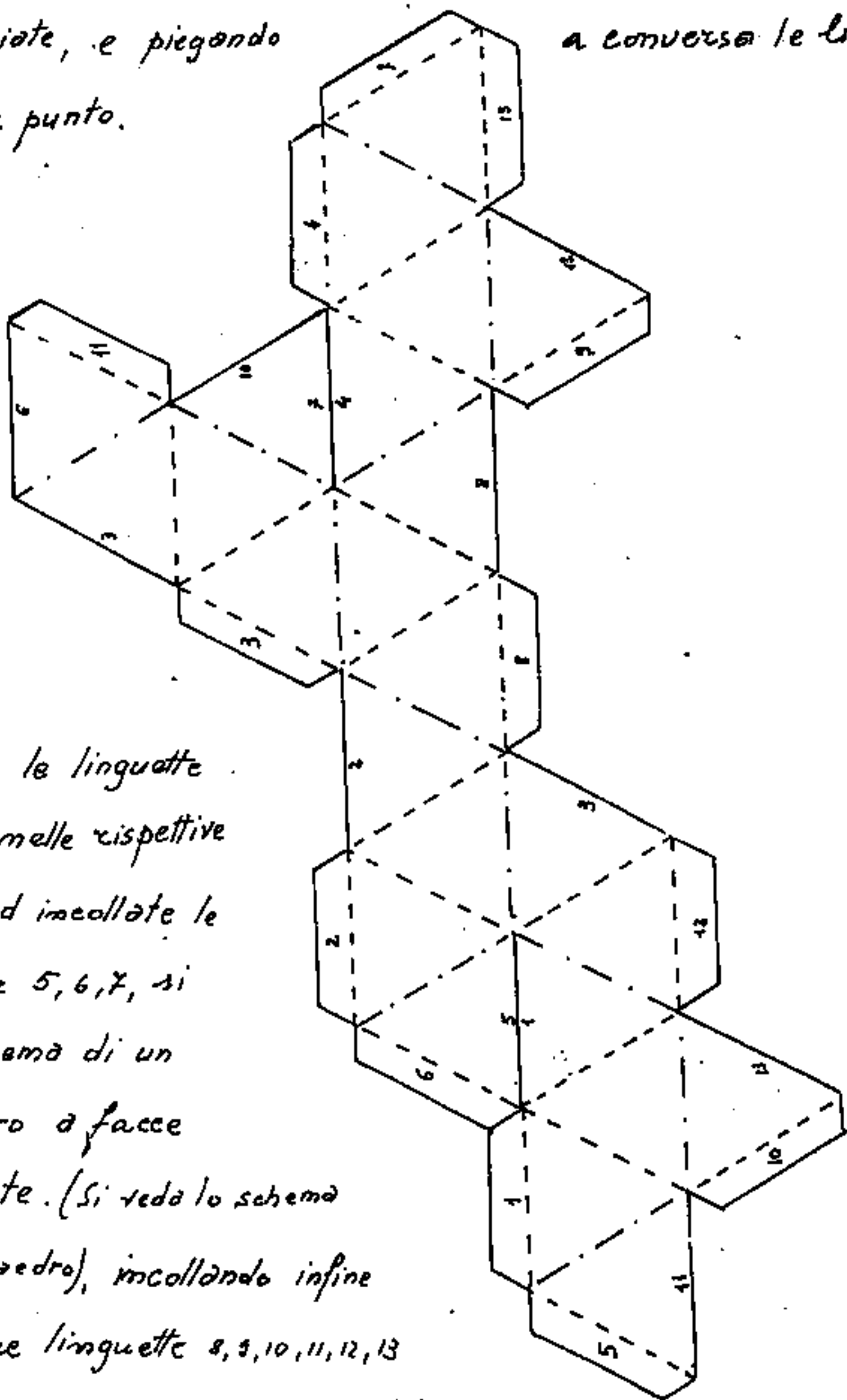
mento come ABCD (vedi figura) è un quarto di tetraedro, cioè una delle piramidi suddette.

Il rombododecaedro non è un poliedro regolare poiché le sue facce (rombi), pur essendo tutte uguali non sono costituite da un poligono regolare.

Notiamo che l'angolo solido dello spazio piramidale

che va dal centro del rombododecaedro alle sue facce, è  $\frac{1}{\sqrt{2}}(4\pi) = \frac{2\pi}{3}$  stereradiani, (uguale a quello del dodecaedro regolare). L'angolo diedro fra le facce del rombododecaedro è quindi  $120^\circ$  (che abbiamo calcolato per le piramidi aggiunte, ottenute scomponendo il tetraedro). Sulla diagonale delle facce rombiche, ove si toccano due piramidi aggiunte, si ha l'angolo diedro dell'ottaedro  $109^\circ 28' 16",39$  più i due angoli diedri alla base delle piramidi aggiunte:  $2(35^\circ 15' 51",805) = 70^\circ 31' 43",61$  ove  $109^\circ 28' 16",39 + 70^\circ 31' 43",61 = 180^\circ =$  angolo piatto! (cioè le due facce delle due piramidi aggiunte ed adiacenti, formano una faccia rombica piana!). Abbiamo visto che, quattro piramidi angolari ottenute dalla scomposizione dell'ottaedro, aggiunte e fatte combaciare con le facce di un tetraedro, formano un cubo; ed inversamente le piramidi angolari ottenute dalla scomposizione dei tetraedri, aggiunte e fatte combaciare con le facce di un ottaedro, formano un rombododecaedro. I tre spigoli della piramide tetraedrica che corrispondono a tre spigoli del rombododecaedro sono tre semidiagonali del cubo tracciate da vertici non adiacenti. (Ne vedremo meravigliose conseguenze studiando i pentagonododecaedri (Tetartoedri). Si pensi alla continuità di soli rombododecaedri affiancati.

Per fare un modellino dei due tetraedri incastrati e delimitanti il cubo, si può usare lo schema sotto disegnato tagliando lungo le linee intere, piegando a colmo le linee tratteggiate, e piegando a conveso le linee a tratto e punto.



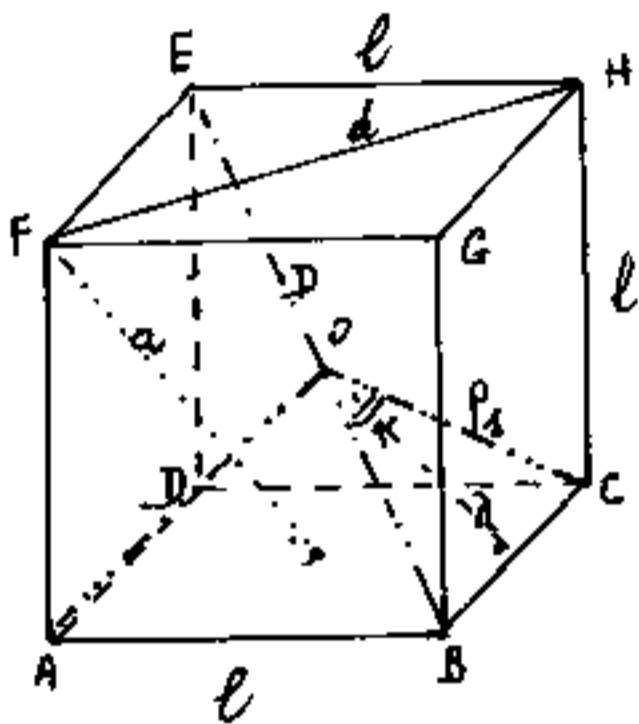
Incollate le linguette 1, 2, 3, 4 nelle rispettive facce, ed incollate le linguette 5, 6, 7, si ha lo schema di un tetraedro a facce cuspidate. (Si veda lo schema del tetraedro), incollando infine le residue linguette 8, 9, 10, 11, 12, 13 nelle rispettive sedi si ha il modellino.

Il disegno dello schema deve essere molto preciso.

# Il cubo o esaedro

Il cubo ha sei facce quadrate, 8 vertici, 12 spigoli; la relazione di Eulero  $F+V=S+2$ ;  $(6+8=12+2)$

Simboli: indicheremo con:



$l$  = lato di una faccia = spigolo del cubo  
= (semidiagonale dell'ottaedro = diagonale di faccia del rombododecaedro)

$d$  = diagonale di una faccia del cubo  
= (spigolo del tetraedro = altra diagonale di faccia del rombododecaedro).

$D$  = diagonale fra vertici opposti del cubo

$a$  = distanza dei vertici dai centri delle facce opposte

$R_s$  = raggio della sfera circoscritta = semidiagonale fra i vertici del cubo = (spigolo del rombododecaedro;  
= raggio della sfera circoscritta al tetraedro)

$r$  = raggio della sfera inscritta.

$\lambda$  = distanza del centro da uno spigolo =  $d/2$

$S$  = superficie laterale =  $6l^2$

$V$  = volume =  $l^3$ .

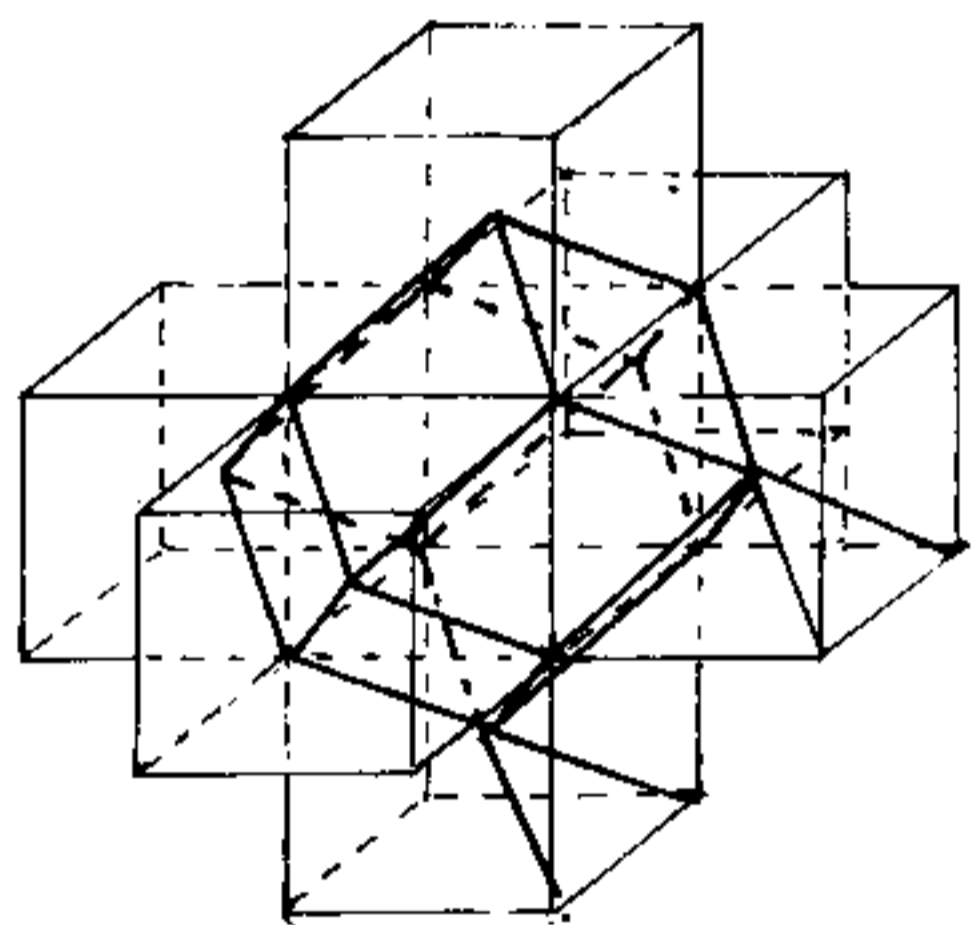
# TAVOLA delle relazioni fra gli elementi del CUBO

	$l$	$d$	$D$	$a$	$\rho_3$	$\tau$	$\lambda$	$S$	$V$
$l$	$l$ 1.000000	$d/\sqrt{2}$ 0.707106781	$D/\sqrt{3}$ 0.577350269	$\sqrt{2} a$ 0.707106781	$\frac{2}{\sqrt{3}} \rho_3$ 1.154700538	$2\tau$ 2.000000	$\sqrt{2} \lambda$ 1.414213562	$\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{S}$ 0.408248229	$\sqrt[3]{V}$ 1.000000
$d$	$l\sqrt{2}$ 1.414213562	$d$ 1.000000	$\sqrt{2} D$ 0.707106781	$\frac{2}{\sqrt{3}} a$ 1.154700538	$2\sqrt{\frac{2}{3}} \rho_3$ 1.632993162	$2\sqrt{2} \tau$ 2.828427125	$2\lambda$ 2.828427125	$\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{S}$ 0.577350269	$\sqrt[3]{\frac{V}{\sqrt{2}}}$ 0.854246199
$D$	$l\sqrt{3}$ 1.732050808	$\sqrt{3} d$ 1.732050808	$D$ 1.000000	$\sqrt{2} a$ 1.414213562	$2\rho_3$ 2.000000	$2\sqrt{3} \tau$ 3.464101615	$\sqrt{6} \lambda$ 2.449489743	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{S}$ 0.707106781	$\sqrt[3]{\frac{V}{\sqrt{3}}}$ 1.000000
$a$	$\frac{\sqrt{3}}{2} l$ 0.866025404	$\frac{1}{2} \sqrt{3} d$ 0.866025404	$\frac{1}{\sqrt{2}} a$ 0.707106781	$a$ 1.000000	$\sqrt{2} \rho_3$ 1.414213562	$\sqrt{6} \tau$ 2.449489743	$\sqrt{3} \lambda$ 1.732050808	$\frac{1}{2} \sqrt{S}$ 0.500000000	$\sqrt[3]{\frac{V}{\sqrt{3}}}$ 1.224744871
$\rho_3$	$\frac{\sqrt{3}}{2} l$ 0.866025404	$\frac{1}{2} \sqrt{3} d$ 0.866025404	$\frac{D}{2}$ 0.500000000	$\frac{1}{\sqrt{2}} a$ 0.707106781	$\rho_3$ 1.000000	$\sqrt{3} \tau$ 1.732050808	$\frac{\sqrt{2}}{3} \lambda$ 0.816496581	$\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{S}$ 0.353553391	$\sqrt[3]{\frac{8V}{3\sqrt{3}}}$ 0.866025404
$\tau$	$l/2$ 0.500000000	$\frac{\sqrt{2}}{4} d$ 0.353553391	$\frac{1}{2\sqrt{3}} D$ 0.288675134	$\frac{1}{\sqrt{6}} a$ 0.408248229	$\frac{1}{\sqrt{3}} \rho_3$ 0.577350269	$\tau$ 1.000000	$\lambda/\sqrt{2}$ 1.000000	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \sqrt{S}$ 0.204124145	$\sqrt[3]{8V}$ 0.512835
$\lambda$	$l/\sqrt{2}$ 0.707106781	$\frac{1}{2} d$ 0.500000000	$\frac{1}{\sqrt{6}} D$ 0.408248229	$\frac{1}{\sqrt{3}} a$ 0.577350269	$\frac{\sqrt{3}}{2} \rho_3$ 0.866025404	$\sqrt{2} \tau$ 1.414213562	$\lambda$ 1.000000	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{S}$ 0.288675134	$\sqrt[3]{2\sqrt{2} V}$ 0.707106781
$S$	$6l^2$ 6.000000	$3d^2$ 3.000000	$2D^2$ 2.000000	$4a^2$ 4.000000	$8\rho_3^2$ 8.000000	$24\tau^2$ 24.000000	$12\lambda^2$ 12.000000	$S$ 1.000000	$\sqrt[3]{\frac{V^2}{6}}$ 0.707106781
$V$	$l^3$ 1.000000	$\frac{1}{2\sqrt{2}} d^3$ 0.353553391	$\frac{1}{3\sqrt{3}} D^3$ 0.192450089	$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} a^3$ 0.544331053	$\frac{8}{3\sqrt{3}} \rho_3^3$ 1.632993162	$8\tau^3$ 8.000000	$2\sqrt{2} \lambda^3$ 2.828427125	$(\frac{S}{6})^{3/2}$ 0.408248229	$V$ 1.000000

L'angolo solido dello spazio piramidale che dal centro del cubo va ad una faccia è:  $\frac{1}{8}(4\pi) = \frac{2}{3}\pi$  stereoradiani  
 L'angolo solido dello spazio piramidale che da un vertice del cubo fluisce verso l'interno, è un angoloide triedro di  $\frac{1}{8}(4\pi) = \frac{\pi}{2}$  stereoradiani; la somma degli angoloide uscenti dagli 8 vertici è:  $8 \frac{\pi}{2} = 4\pi$  stereoradiani cioè l'angolo sferico. L'angolo diedro fra le facce è  $\frac{\pi}{2}$  rad., l'angolo fra due semidiagonali adiacenti del cubo è  $\widehat{BOC} = \alpha$   
 $\alpha = 70^\circ 31' 43,61 = 1,230959417$  rad. =  $\arctg(\frac{2\sqrt{2}}{1})$  che equivale all'angolo diedro fra le facce di un tetraedro. Perciò la somma degli angoli delle facce dello spazio piramidale uscente dal centro con angolo solido  $\frac{2}{3}\pi$  stereoradiani, è  $4(70^\circ 31' 43,61) = 282^\circ 6' 54,42 = 4(1,230959417) = 4,923837669$  rad.  
 L'angolo fra due diagonali di faccia uscenti dallo stesso vertice è  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$  rad., tre diagonali di faccia consecutive, formano un triangolo equilatero come: HFBH, che è la faccia del tetraedro alla quale viene sovrapposta la piramide di vertice G, che è  $\frac{1}{8}$  di ottaedro scomposto secondo le sue diagonali.

L'angolo fra due semidiagonali uscenti dal centro del cubo, interne ed opposte, cioè:  $\widehat{AOC} = 109^\circ 28' 16,39 = 1,910633236$  rad =  $\arccos(-\frac{1}{3})$ , ovviamente supplementare dell'angolo fra due semidiagonali adiacenti.

Poiché solo il cubo, fra i solidi regolari, ha facce quadrate; possiamo sovrapporre alle facce del cubo solo le piramidi angoloidi uscenti dal cubo stesso; otteniamo così, di nuovo, un rombododecaedro. (che avevamo già visto come sovrapposizione delle piramidi angoloidi del tetraedro, sulle facce dell'ottaedro.) Per far vedere il rombododecaedro nella

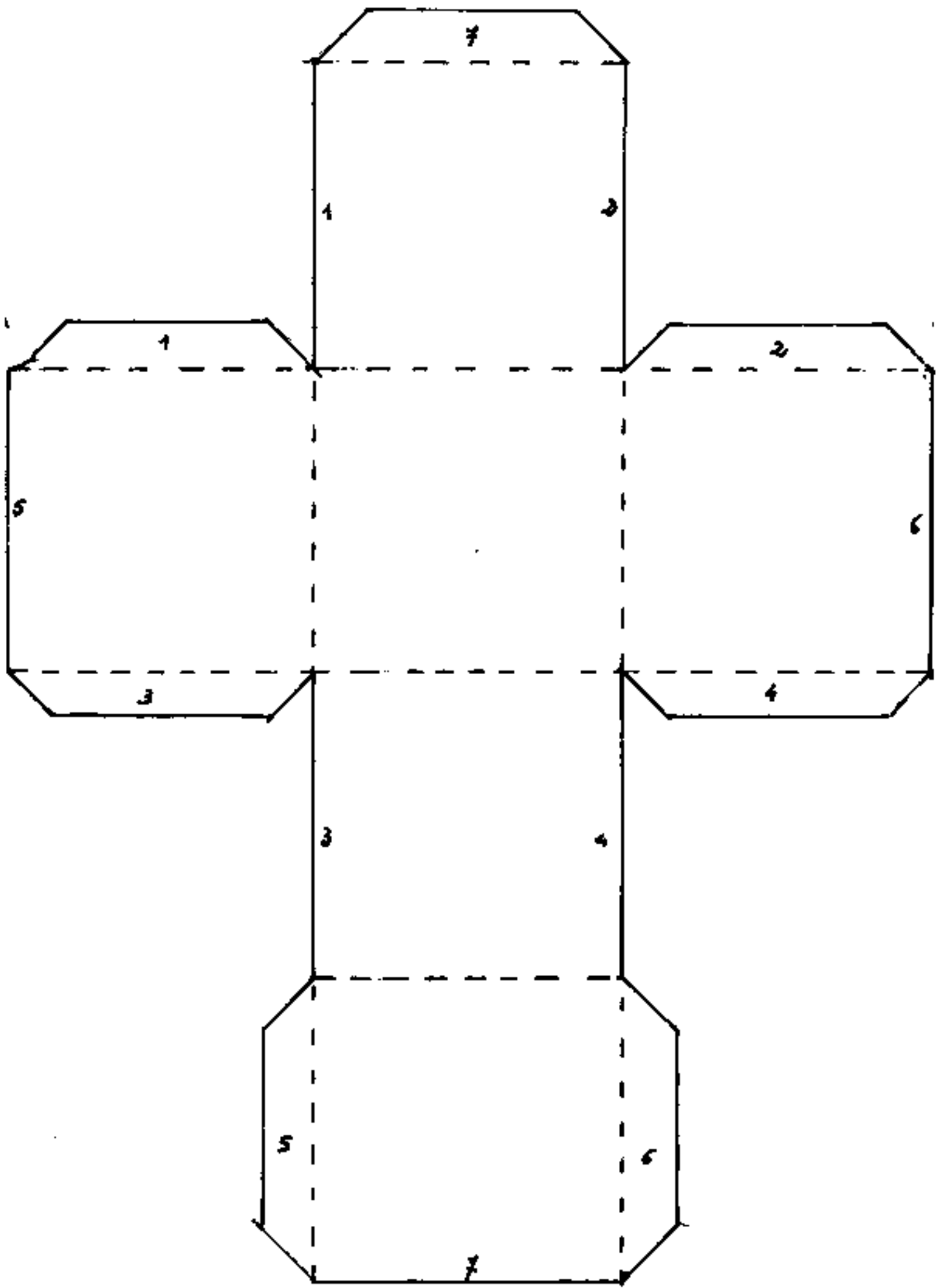


continuità dello spazio tridimensionale disegniamo sette cubi, cioè un cubo con un altro cubo affacciato sulle sue sei facce, e dai sei cubi affacciati disegniamo le pirami-

di angoloidi che vanno verso il cubo centrale, si ottiene così il rombododecaedro. (Si sono disegnate intere due diagonali per evidenziare la continuità spaziale di soli rombododecaedri, Ordina-

riamente si considera la continuità spaziale di soli cubi. Il rombododecaedro, che tratteremo più diffusamente, ha in se l'anomalia sufficiente a non creare spazi vuoti)



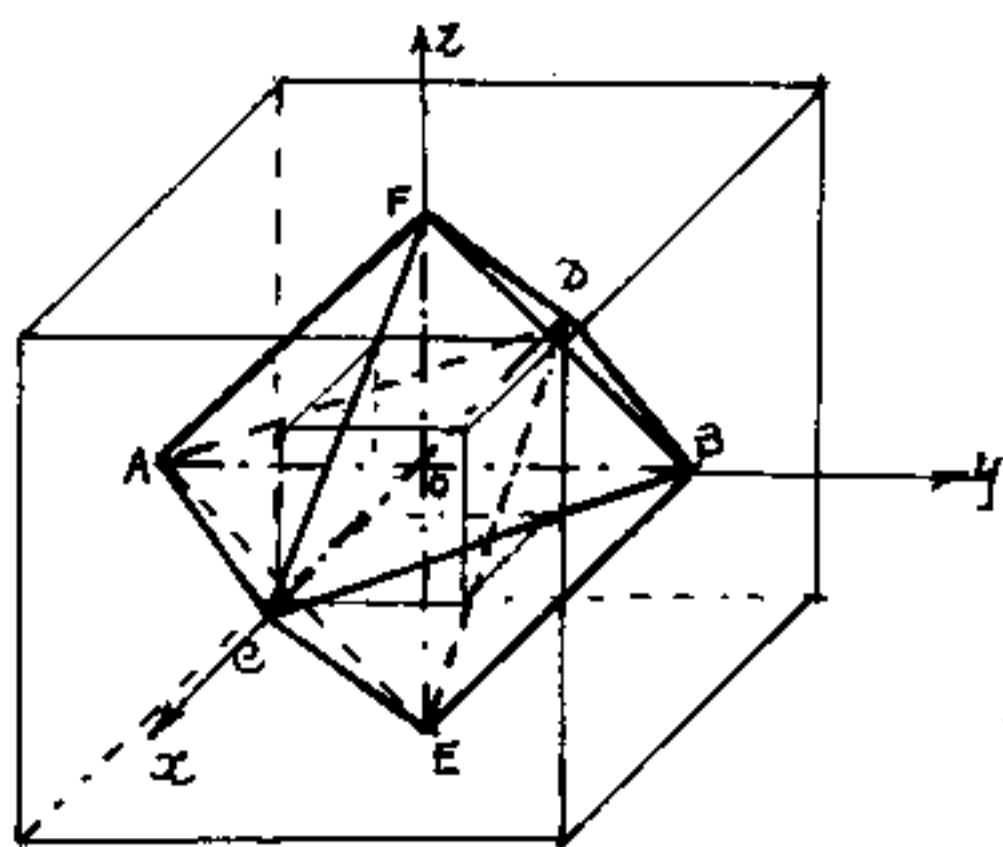


Schema del cubo o esaedro

Tagliare lungo le linee intere, piegare lungo le linee tratteggiate, incollare le linguette facendo combaciare gli spigoli omonimi.

# L'ottaedro

L'ottaedro ha otto facce triangolari equilateri, sei vertici e dodici spigoli.  $(F+V=S+2)=(8+6=12+2)$   
Si noti che rispetto al cubo, ha gli stessi spigoli ed ha scambiato il numero dei vertici col numero delle facce e viceversa, cosicché ad ogni faccia dell'ottaedro corrisponde un vertice del cubo, ed ad ogni vertice dell'ottaedro corrisponde una faccia del cubo.



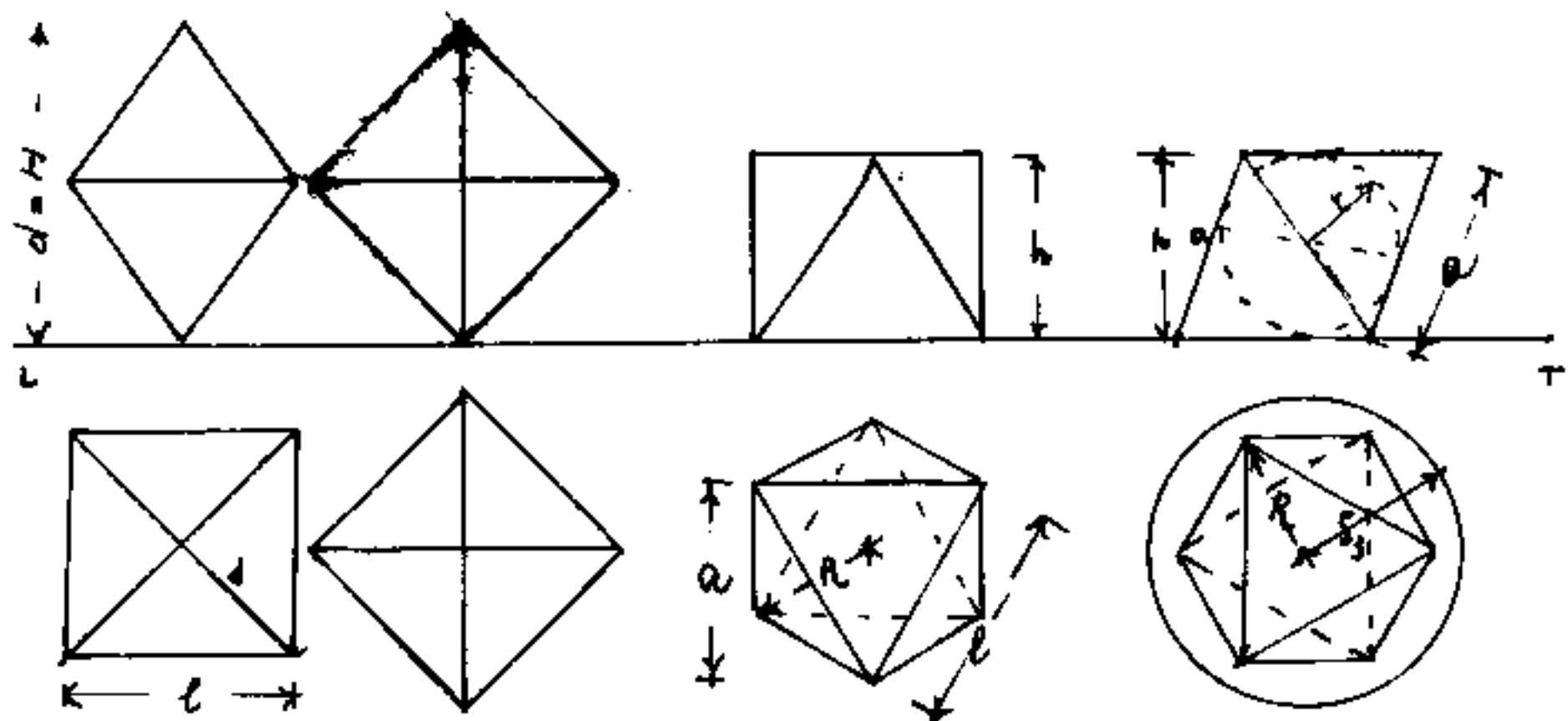
Notiamo come le diagonali interne dell'ottaedro corrispondono agli assi cartesiani ortogonali:  $oxyz$ .

Gli otto triedri trirettangoli costituiti dai

piani di proiezione che dividono in ottanti lo spazio, che sono anche gli angoloidi piramidali con vertice al centro dell'ottaedro con angolo solido di  $\frac{1}{8} \cdot 4\pi = \frac{\pi}{2}$  stereoradiani.

Gli spigoli dell'ottaedro costituiscono tre quadrati aventi in comune il centro ed a due a due le diagonali, e ciascuno giacente su un piano di proiezione.  
(ACBD  $\parallel$   $xy$ ; AEBF  $\parallel$   $yz$ ; CFDE  $\parallel$   $xz$ .)

Abbiamo visto come posso ottenersi l'ottaedro come nucleo centrale di un tetraedro avente i punti medi degli spigoli riuniti fra loro, (i segmenti unione, sono gli spigoli dell'ottaedro, lunghi metà spigolo del tetraedro). È anche interessante vedere le proiezioni di un ottaedro in prima e seconda proiezione; si noti il diverso aspetto e



l'apparente diversa grandezza di un ottaedro avente lo stesso spigolo!

Simboli: indicheremo con:

$l$  = lato o spigolo dell'ottaedro

$a$  = apotema di una faccia

$d$  = diagonale = (distanza fra vertici opposti)

$h$  = distanza fra due facce = (altezza del solido poggiato in piano)

$r$  = raggio della sfera inscritta

$R$  = raggio della sfera circoscritta ( $R$  = raggio dell'agono)

$S_l$  = superficie laterale

$V$  = Volume

# TAVOLA delle relazioni fra gli elementi dell' OTTAEDRO

	$l$	$a$	$d$	$h$	$\tau$	$\rho_s$	$R$	$S$	$V$
$l$	$l$ 1.1547005	$\frac{2}{\sqrt{3}} a$ 1.1547005	$\frac{1}{\sqrt{2}} d$ 0.70710678	$\sqrt{\frac{3}{2}} h$ 1.22474487	$\sqrt{6} \tau$ 2.44948974	$\sqrt{2} \rho_s$ 1.41421356	$\sqrt{3} R$ 1.73205080	$\sqrt{\frac{l}{2\sqrt{3}}} \sqrt{S}$ 0.557284965	$\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{V}$ 1.28451829
$a$	$\frac{\sqrt{3}}{2} l$ 0.8660254	$a$	$\frac{1}{4} \sqrt{6} d$ 0.612372535	$\frac{3}{4} \sqrt{2} h$ 1.06066017	$\frac{3}{\sqrt{2}} \tau$ 2.12132034	$\frac{\sqrt{6}}{2} \rho_s$ 1.22474487	$\frac{2}{3} R$ 0.66666666	$\sqrt{\frac{3}{8}} \sqrt{S}$ 0.46620243	$\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{V}$ 1.112754563
$d$	$\sqrt{2} l$ 1.41421356	$\frac{4}{\sqrt{6}} a$ 1.63299316	$d$	$\sqrt{3} h$ 1.7320508	$2\sqrt{3} \tau$ 3.464101615	$2 \rho_s$ 2.000000	$\sqrt{6} R$ 2.4494897	$\frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{S}$ 0.259828568	$\sqrt[3]{6} \sqrt[3]{V}$ 1.817120593
$h$	$\sqrt{\frac{2}{3}} l$ 0.81649658	$\frac{2}{3} \sqrt{2} a$ 0.94280904	$\frac{1}{\sqrt{3}} d$ 0.57735027	$h$	$2 \tau$ 2.000000	$\frac{2}{\sqrt{3}} \rho_s$ 1.154700539	$\sqrt{2} R$ 1.41421356	$\frac{1}{3} \sqrt[3]{3} \sqrt{S}$ 0.438691332	$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{V}$ 1.04915063
$\tau$	$\frac{1}{\sqrt{6}} l$ 0.40824829	$\frac{\sqrt{2}}{3} a$ 0.47140452	$\frac{\sqrt{2}}{2} d$ 0.288675134	$\frac{1}{3} h$ 0.600000	$\tau$	$\frac{1}{3} \rho_s$ 0.577350269	$\frac{1}{2} R$ 0.70710678	$\frac{1}{2\sqrt{27}} \sqrt{S}$ 0.219345668	$\sqrt[3]{\frac{1}{4\sqrt{3}}} \sqrt[3]{V}$ 0.52455752
$\rho_s$	$\frac{1}{\sqrt{2}} l$ 0.707106781	$\sqrt{\frac{3}{2}} a$ 0.81649625	$\frac{1}{2} d$ 0.500000	$\frac{\sqrt{2}}{2} h$ 0.70710678	$\sqrt{3} \tau$ 1.73205080	$\rho_s$	$\frac{\sqrt{6}}{2} R$ 1.224744871	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{S}$ 0.379917842	$\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{V}$ 0.908560236
$R$	$\frac{1}{\sqrt{3}} l$ 0.577350269	$\frac{3}{2} a$ 1.500000	$\frac{1}{\sqrt{6}} d$ 0.40824829	$\frac{1}{\sqrt{2}} h$ 0.70710678	$\sqrt{2} \tau$ 1.41421356	$\frac{\sqrt{6}}{3} \rho_s$ 0.81649658	$R$	$\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{3}} \sqrt{S}$ 0.210201619	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{V}$ 0.741835375
$S$	$2\sqrt{3} l^2$ 3.464101615	$\frac{8}{\sqrt{3}} a^2$ 4.618802154	$\sqrt{3} d^2$ 1.7320508	$3\sqrt{3} h^2$ 5.196152423	$12\sqrt{3} \tau^2$ 20.78460969	$4\sqrt{3} \rho_s^2$ 6.92820323	$6\sqrt{3} R^2$ 10.39230425	$S$	$\sqrt{3} \sqrt[3]{36} \sqrt[3]{V^2}$ 5.719105757
$V$	$\frac{\sqrt{2}}{3} l^3$ 0.47140452	$\frac{8\sqrt{3}}{9} a^3$ 0.925774738	$\frac{1}{6} d^3$ 0.16666666	$\frac{\sqrt{3}}{2} h^3$ 0.866025403	$4\sqrt{3} \tau^3$ 6.92820326	$\frac{4}{3} \rho_s^3$ 1.33333333	$\sqrt{6} R^3$ 2.4494897	$\frac{1}{5} \frac{1}{3\sqrt{3}} S^{\frac{3}{2}}$ 0.073115222	$V$

gli angoli dell'ottaedro:

angoli piani delle facce (equilateri)  $60^\circ = \frac{\pi}{3} = 1,047197551 \text{ rad.}$

angoli piani delle facce al vertice degli angoloidi piramidali:  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$

" " " " alla base " "  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$

" " degli spigoli con le diagonali =  $45^\circ = \frac{\pi}{4} = 0,785398163 \text{ rad.}$

angoli diedri fra le facce dell'ottaedro  $109^\circ 28' 16",3 =$

$= 1,910633236 \text{ rad.}$

angoli diedri alla base degli angoloidi cioè fra le  
facce triangolari ed i piani diagonali:

$= 54^\circ 44' 8",2 = 0,955316618 \text{ rad}$

angoli solidi degli angoloidi con vertice al centro

dell'ottaedro =  $\frac{1}{8} 4\pi = \frac{\pi}{2}$  stereradiani

angoli solidi degli angoloidi con vertice nei vertici

dell'ottaedro (angoloidi tetraedri)

Per rispondere a questa domanda, ricordando che la misura dell'angolo solido è l'area della superficie sferica di raggio unitario intercettata dall'angoloide uscente dal suo centro.

Nel nostro caso, dividendo diagonalmente la base quadrata dell'angoloide, il problema si riduce al calcolo dell'area dei triangoli sferici.

## Area dei triangoli sferici

Bonaventura Cavalieri, utilizzando il suo principio degli indivisibili dimostro' il teorema: "La superficie del triangolo sferico di vertici A, B, C collegati con archi di cerchio massimo, è equivalente alla metà del fuso sferico, appartenente alla stessa sfera ed avente la sezione normale uguale all'eccesso sferico".

(TEOREMA di CAVALIERI).

Detto  $E$  l'eccesso sferico:  $E_{\omega} = (\hat{D}_{OA} + \hat{D}_{OB} + \hat{D}_{OC} - \pi) r^2$ .  
metà dell'area di un fuso ampio  $E$  è data:

$$S = \frac{1}{2} \frac{\pi r^2}{\pi} E_{\omega} =$$

$$S = \frac{1}{2} E_{\omega} r^2$$

L'area del triangolo sferico è data dal suo eccesso sferico in radianti moltiplicato per il quadrato del raggio della sfera

perciò: se  $r = 1$

Abbiamo che:

L'ampiezza di un angolo solido triedro in stereoradianti è espressa dallo stesso valore dell'eccesso sferico in radianti del triangolo sferico intercettato dall'angoloide sulla sfera di raggio unitario.

Poiché ogni figura sulla superficie sferica che sia delimitata da archi di cerchio massimo è sempre scomponibile in triangoli sferici, poiché gli angoli ai vertici dei triangoli sferici, essendo gli angoli fra le tangenti agli archi nei vertici, sono anche gli angoli diedri delle due facce dell'angoloide triedro che hanno in comune quel vertice. Poiché l'angolo solido è la somma degli angoli solidi degli angoloidei triedri che compongono la figura arcuata che detto  $\hat{\Delta}_s$  l'angolo solido il suo valore è dato dalla somma degli angoli diedri delle facce che delimitano l'angoloide.

diminuita di tanti  $\pi$  quante sono le facce meno due.

Applicando questo principio si ha:

L'angolo diedro fra due facce dell'ottaedro è  $1,910633236 \text{ rad} = 109^\circ 28' 16,39''$  le facce sono 4 per cui occorre togliere  $2 \cdot \pi$ ;  $\Rightarrow 1,910633236 \times 4 - 6,283185307 = \hat{\Delta}_s = 1,359347575$  stereradiani dell'angoloide che ha per vertice un vertice dell'ottaedro.

Confronto Angoloidei (stereradiani)

angolo vertice	Tetraedro	cuubo	ottaedro
al centro sfera	3,141592653	2,094385102	1,570796327
nel vertice del solido	0,551285598	1,570796327	1,359347575

Si noti che il rapporto fra il volume dell'ottaedro ed il volume della sfera circoscritta è esattamente  $\pi$ .

Si noti inoltre che il volume dell'ottaedro è quattro volte il volume del tetraedro di pari spigolo; e se si considera l'ottaedro nato dall'unione dei punti medi degli spigoli di un tetraedro, si ha che il volume dei quattro tetraedri di spigolo metà ed il volume del nucleo ottaedrico centrale si equivalgono.

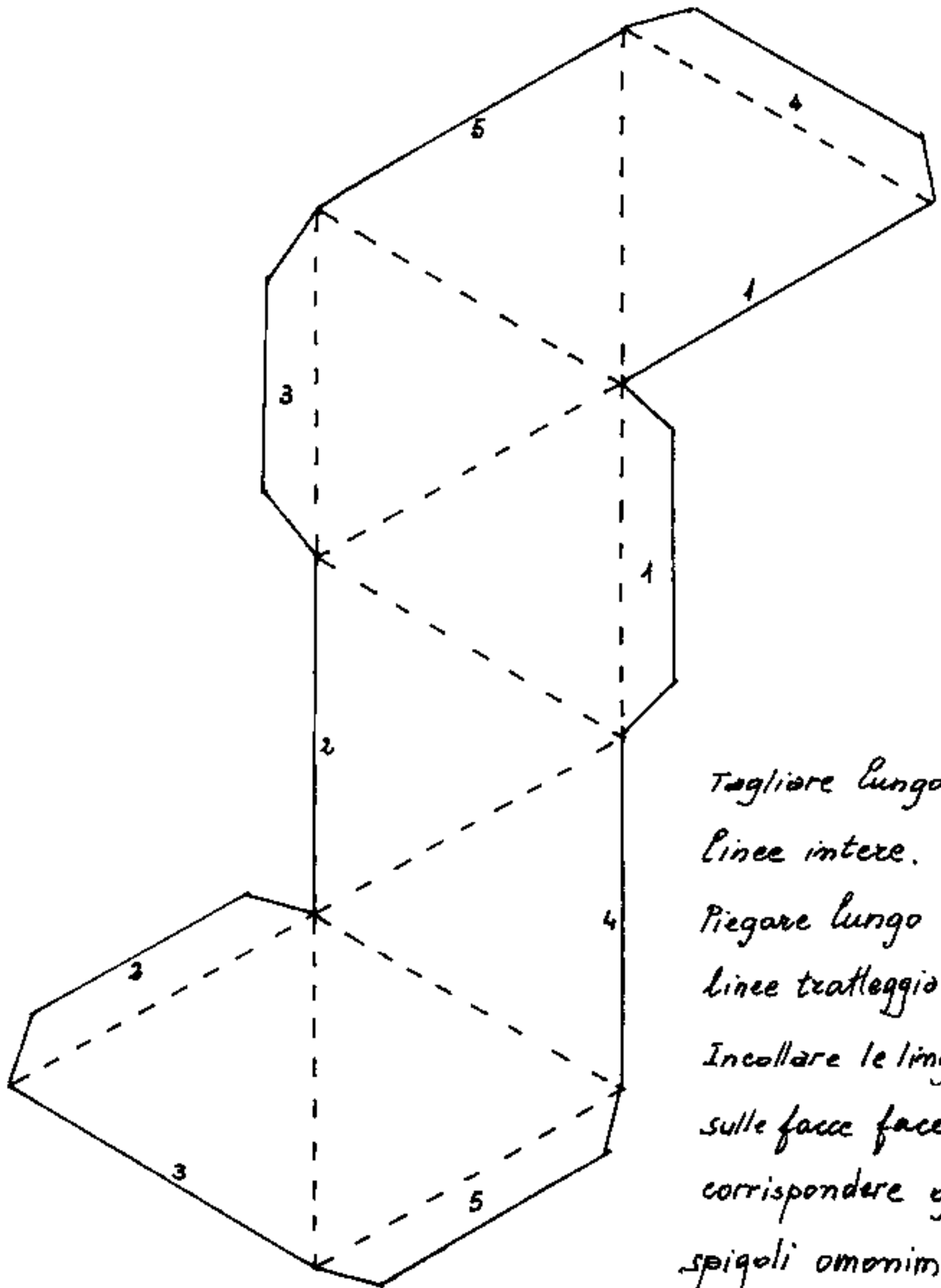
Indichiamo con  $u_v$  l'unità volumetrica costituita dal tetraedro di spigolo metà; avremo che il tetraedro avrà un volume:  $8 u_v$ , l'ottaedro di pari spigolo  $32 u_v$ , il cubo costituito da un tetraedro e  $\frac{4}{8}$  di ottaedro avrà un volume  $34 u_v$  ed uno spigolo  $s = \frac{l}{\sqrt{2}}$  ove  $l$  è lo spigolo comune del tetraedro e dell'ottaedro.  $V = s^3 = \frac{l^3}{\sqrt{2}} = 24 u_v$ .  $(\frac{l^3}{3} \sqrt{2} - \frac{l^3}{4} \sqrt{2} = \frac{l^3}{12} \sqrt{2}) = (\text{volume ottaedro} - \text{volume cubo} = \text{volume tetraedro})$  Prendendo il volume del tetraedro di spigolo metà =  $1 u_v$  l'ottaedro centrale di spigolo metà =  $4 u_v$ ; mentre il cubo che ne deriva ha per volume  $1 + \frac{4}{8}(1) = 3 u_v$ .

Torneremo su questo argomento. (Il rombododecaedro ha per volume  $4+2 = 6 u_v$  oppure  $3+3 = 6 u_v$ .)

È spontaneo equiparare il nucleo centrale ottaedrico ad una carica di valore  $4 u_v$ , equilibrata dai quattro tetraedri di  $1 u_v$ .



modellino di ottaedro



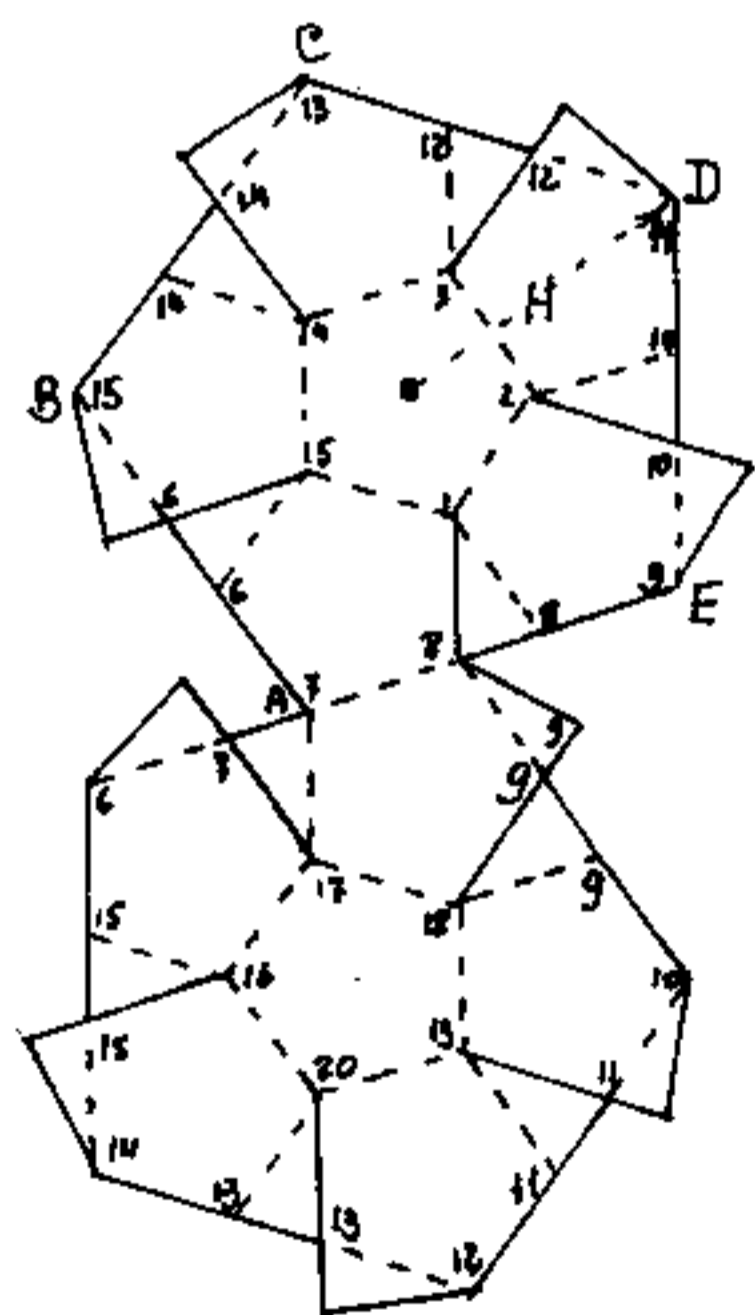
Tagliare lungo le  
linee intere.  
Piegaro lungo le  
linee tratteggiate.  
Incollare le linguette  
sulle facce facendo  
corrispondere gli  
spigoli omonimi.

# Il dodecaedro

Il dodecaedro è costituito da dodici facce pentagonali regolari, 20 vertici, 30 spigoli; ( $12 + 30 = 30 + 2$ ).

Per ricavare le grandezze caratteristiche del dodecaedro, partiamo dallo schema piano per costruire il suo modellino in carta. Ricordiamo le correlazioni del pentagono e del decagono regolari. (Vedi Vol I).

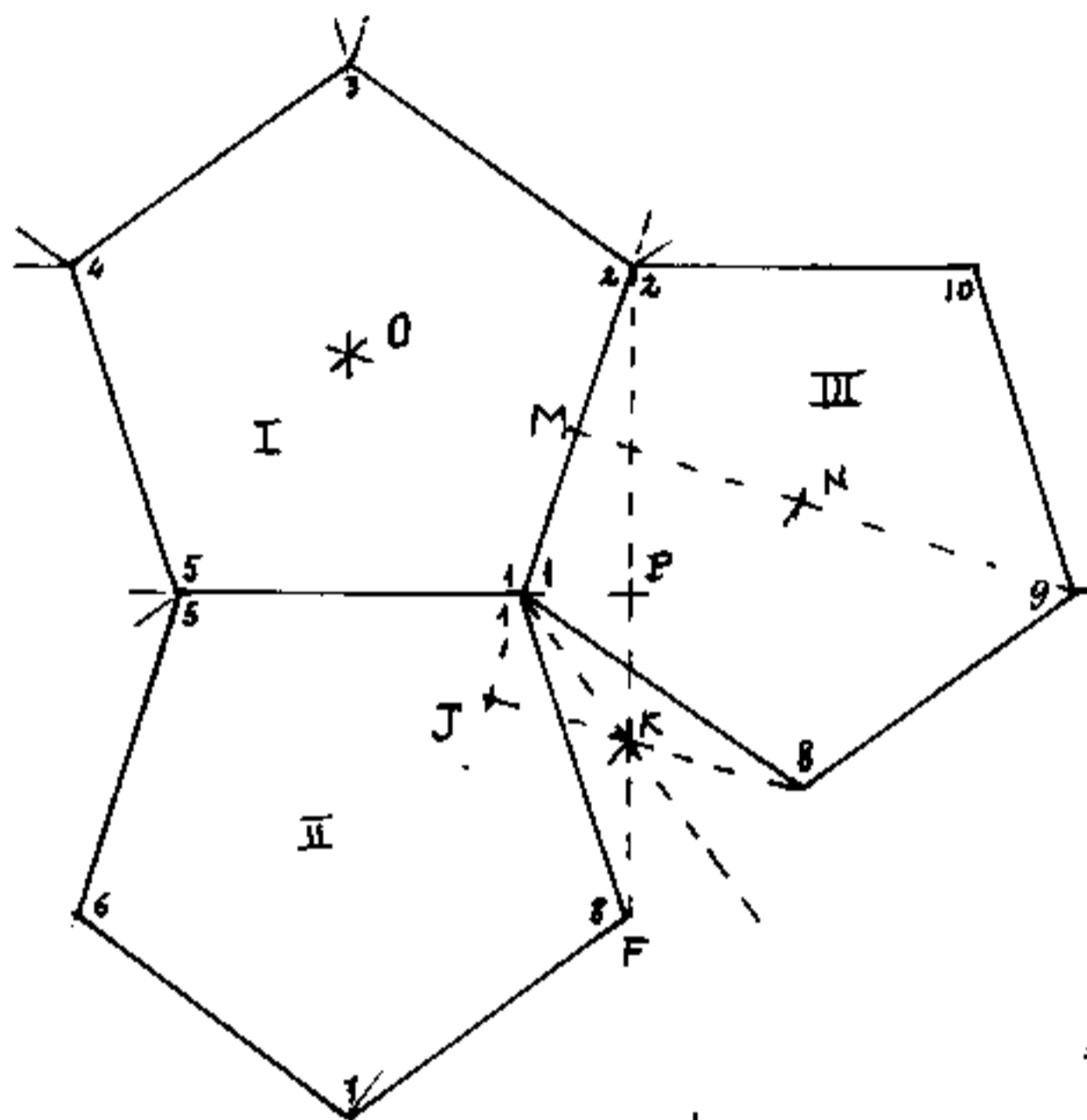
Supponiamo di volere un dodecaedro alto  $H$ , tracciamo un cerchio di raggio  $H$  ed inscriviamo nel cerchio un pentagono regolare:  $ABCDE$ .



(Per fare un buon disegno conviene fare un cerchio il più grande possibile e dividerlo in dieci parti uguali con la massima precisione; i punti di questo cerchio, a due a due saranno le direzioni di fede da controllare per ogni linea. Il cerchio di raggio  $H$  può essere concentrico)  
Tracciando le diagonali di  $ABCDE$  otteniamo il pentagono 1,2,3,4,5 dalle cui diagonali possiamo costruire la figura a fianco,

che, ripetuta darà il nostro modellino ove abbiamo numerato i vertici ed disegnate le linguette da incollare. Tagliare lungo le linee intere e piegare le linee a tratti.

Vediamo ora cosa succede quando, ritagliato il modellino, vogliamo montarlo (Per maggiore chiarezza non disegniamo le linguette da incollare, che servono solo a farlo stare insieme). Consideriamo tre facce adiacenti come:



me: 1, 2, 3, 4, 5;  
 1, 5, 6, 7, 8; ed 1, 8, 9, 10, 2;  
 che per semplicità  
 chiameremo: I, II, III.  
 Le facce II e III ruo-  
 tando intorno ai lati  
 $\overline{5-1}$  ed  $\overline{1-2}$  porteran-  
 no a combaciare in  
 K il vertice 8 (K =  
 proiezione del ver-

tice 8 sul piano di I). Se con centro O e raggio  $\overline{OK}$  tracciamo un cerchio su di esso vi saranno le proiezioni dei vertici 6, 8, 10, 12, 14. Ma anche i vertici 7 e 9, ruotando le facce si mantengono su piani perpendicolari ai rispettivi assi (lati) di rotazione, perciò si ha la proporzione:  $\overline{J-8} : \overline{J-K} = \overline{M-9} : \overline{M-N}$ . (Si noti che i punti: 7, K, N sono allineati e che  $\overline{OK} = \overline{ON}$ , cioè sullo stesso cerchio vi sono anche le proiezioni dei vertici: 1, 9, 11, 13, 15; ciò consente di fare la I proiezione del dodecaedro).

Notiamo che i triangoli 1-2-F ed 1-K-F sono isosceli e sono simili, detto  $l$  lo spigolo, ( $1-8 = l = 1-2$ ); dalle relazioni sul pentagono abbiamo:  $\overline{1-8} = \frac{l}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \overline{F-P}$ ;

$$\overline{1-P} = \sqrt{l^2 - \overline{FP}^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{16}(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{l}{4} \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \frac{l\sqrt{2}}{4} \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \frac{l}{4}(\sqrt{5} - 1)$$

$$\boxed{\overline{1-P} = l \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)} = (0,309016994 \cdot l)$$

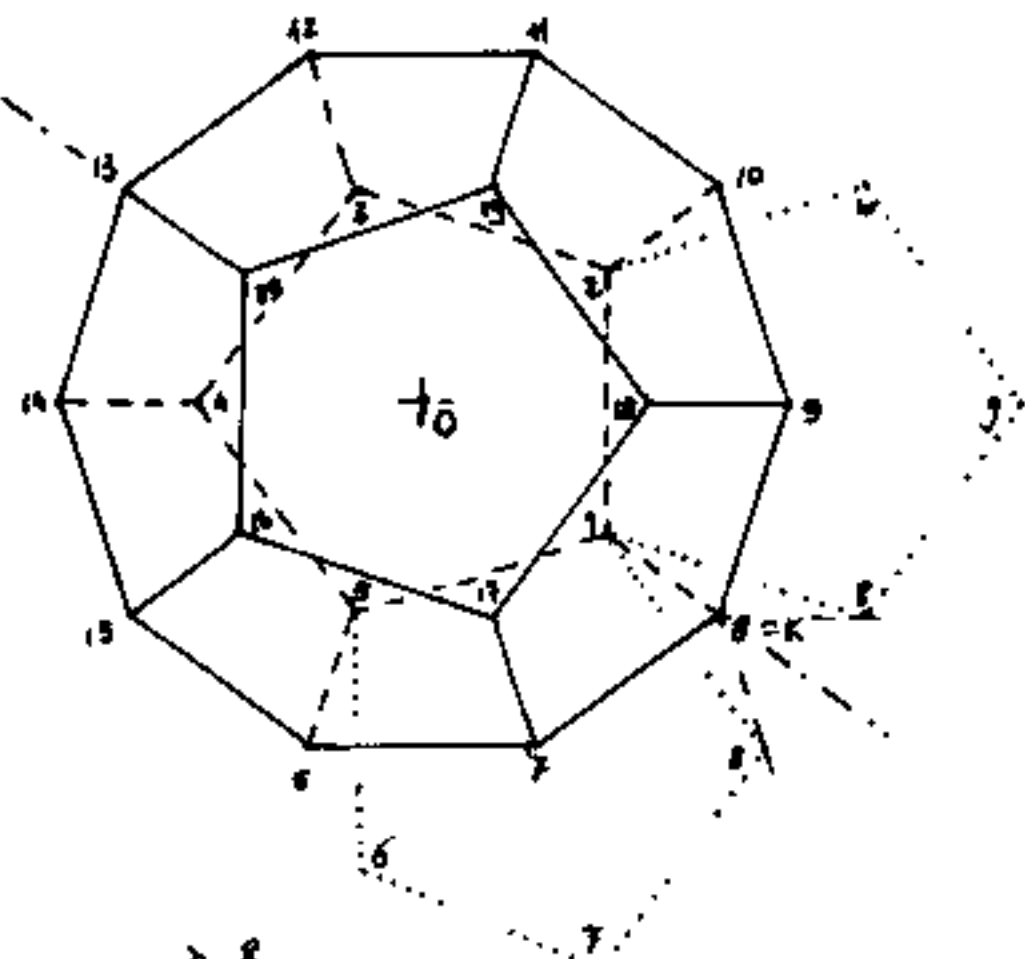
Per similitudine abbiamo:  $\overline{1-K} : \overline{1-F} = \overline{1-F} : \overline{2-F}$  cioè:

$$(\overline{1-K}) : l = l : 2(\overline{F-P}) \text{ da cui: } (\overline{1-K}) = \frac{l^2}{2 \left( \frac{l}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)} = \frac{2l}{\sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{2}{5 + \sqrt{5}}} l$$

$$(\overline{1-K}) = l \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{30}} = \boxed{(\overline{1-K}) = l \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}} = (0,525731112 \cdot l)$$

$$\overline{OK} = \overline{O1} + \overline{1-K} = l \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} + l \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} = (\text{vedi vol I radicali doppi}) =$$

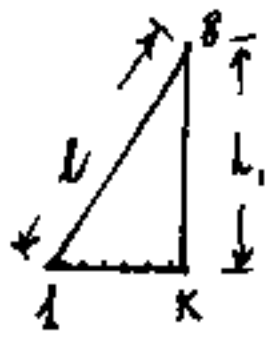
$$= l \sqrt{\frac{2}{10}} \sqrt{5 + \sqrt{25 - 5}} = l \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \boxed{\overline{OK} = l \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}} = (1,376381920 \cdot l) = \overline{O8}$$



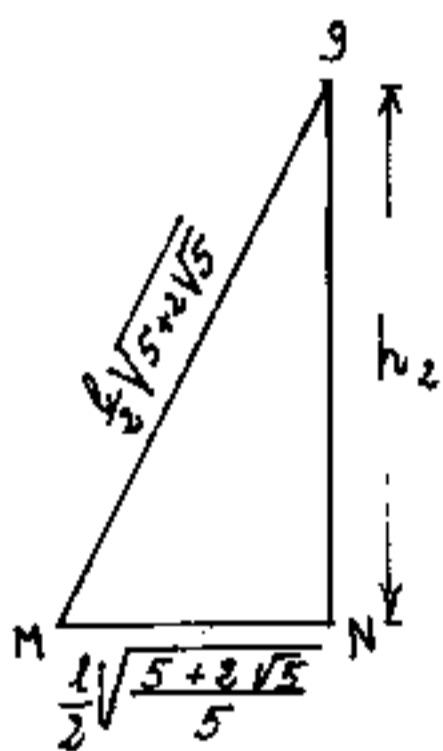
Se consideriamo una sezione perpendicolare passante per i vertici 13-8 (cioè: 13-20-8-1) possiamo determinare le altezze ed eseguire la seconda proiezione del dodecaedro.

Il triangolo rettangolo

1-K-8, ove:  $\overline{1-K} = l \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$ ;  $\overline{1-8} = l$ ;  $h_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$   
 $h_1 = (0,850650808 \cdot l) = R_p =$  raggio del cerchio circoscritto al pentagono  $= \overline{O1} = \overline{O2} = \overline{O3} = \overline{O4} = \overline{O5}$ .



Dalla proporzione:  $\overline{J-8} : \overline{J-K} = \overline{M-9} : \overline{M-N}$ , od anche considerando il triangolo:  $M-N-9$  ove:  $\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = \overline{MN} = \overline{OK} - a_p = l\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - \frac{l}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = a_p = r_p = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ ; (è molto interessante notare che  $\overline{OK}$  = raggio del cerchio circoscritto alla prima proiezione del dodecaedro, è doppio del raggio del cerchio inscritto nella faccia pentagonale)  $\overline{M-9} = h_p = R_p + r_p = \frac{l}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ ; l'altezza  $h_2$  dei vertici dispari dal piano di proiezione sarà:  $h_2 = \frac{l}{2}\sqrt{(5+2\sqrt{5}) - (\frac{5+2\sqrt{5}}{5})}$ ,  $h_2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{4(5+2\sqrt{5})}{5}}$   $h_2 = l\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = 2a_p = 2r_p = \overline{OK} = (1.37638192 \cdot l)$ .



L'altezza  $h_2$  dei vertici dispari è uguale al raggio  $\overline{OK}$  del cerchio circoscritto alla prima proiezione del dodecaedro.  $H = (h_1 + h_2) =$  altezza del dodecaedro = distanza fra due facce parallele:

$$H = l \left( \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \right) = \overline{OM} + \overline{ON} = \overline{N-9}$$

$$H = 2r_p + R_p = \overline{O9} = \underline{\text{raggio per costruire il modellino}}$$

$H = l\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} = (2.227032728 \cdot l)$

Possiamo ora disegnare la seconda proiezione del dodecaedro e calcolare il raggio  $r_s$  della sfera

circoscritta. Abbiamo visto che:  $\overline{OK} = 2r_p = h_2 = l \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

$$h_1 = l \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}; \quad 2(\overline{OK}) = 2l \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}};$$

$$2r_p = \sqrt{(h_2 - h_1)^2 + (2(\overline{OK}))^2}$$

$$2r_p = \sqrt{h_2^2 - 2h_1h_2 + h_1^2 + 4h_2^2}$$

$$2r_p = \sqrt{5h_2^2 + h_1^2 - 2h_1h_2}$$

$$2r_p = l \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{10} - 2 \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}$$

$$2r_p = l \sqrt{\frac{55+21\sqrt{5}}{10} - 2 \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}} \sqrt{10+4\sqrt{5}}}{10}}$$

$$2r_p = l \sqrt{\frac{55+21\sqrt{5}}{10} - 2 \frac{\sqrt{10+30\sqrt{5}}}{10}}$$

$$2r_p = l \sqrt{\frac{(55+21\sqrt{5}) - 2\sqrt{2}(\sqrt{10} - \sqrt{12})}{10}} = l \sqrt{\frac{(55+21\sqrt{5}) - \sqrt{20}(3+\sqrt{5})}{10}} =$$

$$2r_p = l \sqrt{\frac{55+21\sqrt{5} - 6\sqrt{5} - 10}{10}} = l \sqrt{\frac{45+15\sqrt{5}}{10}} = l \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}} =$$

$$2r_p = l \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{\frac{3+2}{2}} + \sqrt{\frac{3-2}{2}} \right) = \frac{l}{2} \sqrt{3} (\sqrt{5} + 1)$$

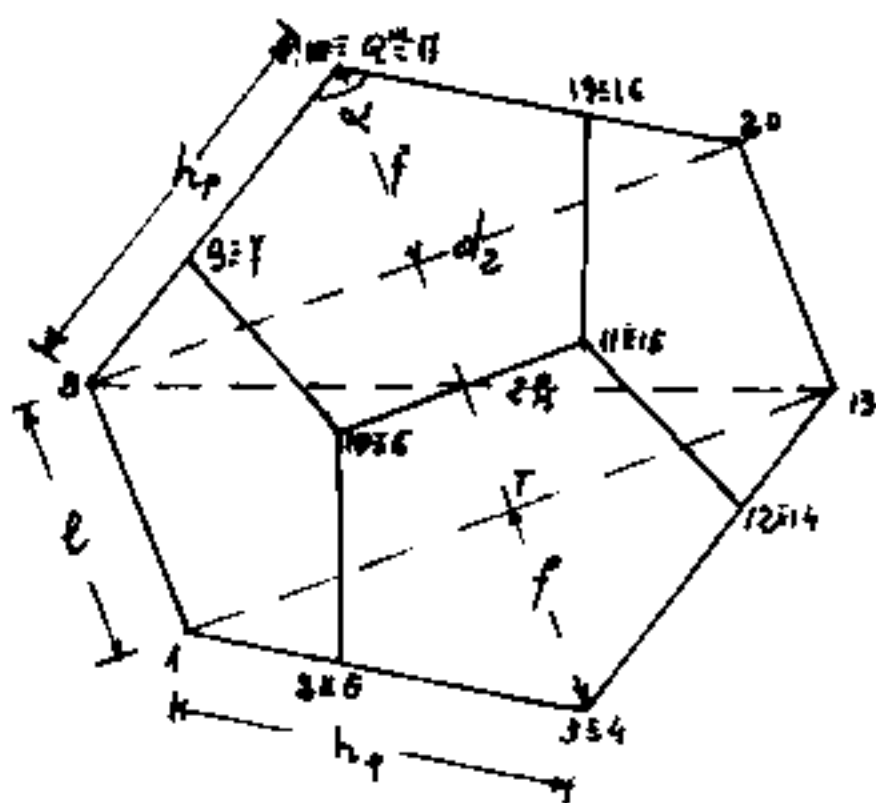
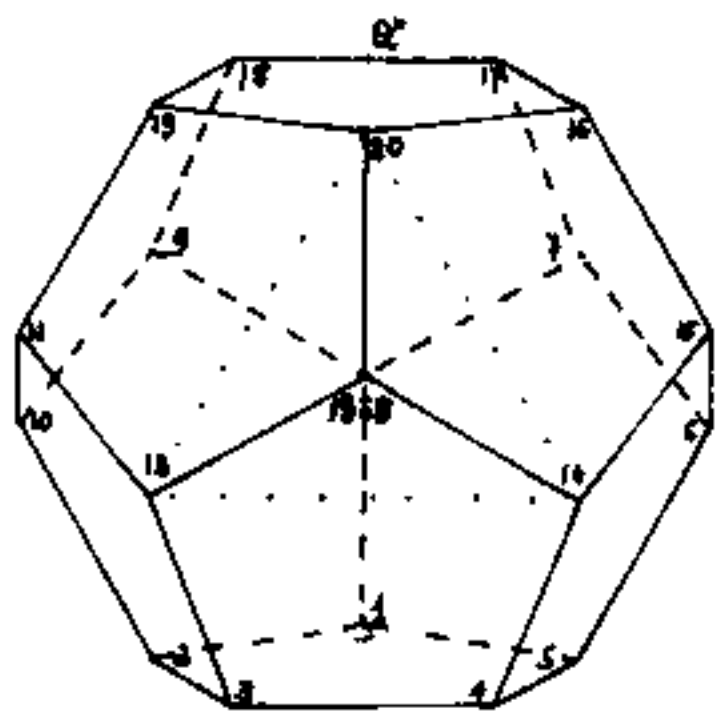
$$r_p = \frac{l}{2} \sqrt{3} (\sqrt{5} + 1) = (1,401258539 \cdot l)$$

$$r_p = \frac{d_p \sqrt{3}}{2} \quad (\text{ove } d_p = \text{diagonale di una faccia})$$

Il raggio della sfera inscritta è ovviamente:  $r_i = \frac{H}{2} = \frac{R_p}{2} + r_p$

Se proiettiamo il dodecaedro su un piano normale alla direzione determinata dagli spigoli 13 ed 8 (diametro della sfera circoscritta),

si ha un triangolo equilatero costituito dalle tre diagonali di faccia parallele ai lati opposti al vertice 13. Le diagonali sono:  $\overline{12-14}$ ;  $\overline{13-20}$ ;  $\overline{14-20}$  e si proiettano in vera grandezza come la:  $\overline{19-15}$ ; la  $\overline{11-3}$ ; e la  $\overline{4-15}$ ; anche i lati:  $\overline{11-18}$ ;  $\overline{19-11}$ ;  $\overline{10-2}$ ;  $\overline{3-4}$ ;  $\overline{5-6}$ ;  $\overline{15-16}$  e le diagonali "d", come:  $\overline{11-16}$ ;  $\overline{11-4}$ ;  $\overline{16-4}$ ;  $\overline{10-17}$ ;  $\overline{10-5}$ ;  $\overline{5-17}$ ; - si proiettano in vera grandezza in quanto segmenti paralleli al piano di proiezione. (A fianco la veduta laterale)



Detto Q il punto medio dello spigolo  $\overline{11-18}$  (lo vediamo in seconda ed in terza proiezione), si noti che l'angolo:  $\alpha = \widehat{8Q20}$  è l'angolo diedro fra le facce, che si proietta in vera grandezza

nella veduta laterale:  $\overline{8-Q''} = \overline{Q''-20} = h_p = \frac{l}{2} \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ ;  $\overline{8-20} = \overline{1-13} = d_2 = \text{distanza di due spigoli paralleli}; d_2^2 = (2r_p)^2 - l^2;$

$$d_2^2 = \left[ l^2 \left( \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \right) - l^2 \right]; \text{ da cui } d_2 = l \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}; \boxed{d_2 = \frac{l}{2} (3+\sqrt{5})}$$

$$\boxed{d = l(2,418033989)}; f^2 = h_p^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2; \frac{l^2}{4} (5+2\sqrt{5}) - \frac{l^2}{16} (14+6\sqrt{5}) = \frac{l^2}{8} (3+\sqrt{5});$$

$$f = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{l}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \right) = \boxed{f = \frac{l}{4} (\sqrt{5}+1)} = l(0,809016994)$$

Calcoliamo l'angolo diedro  $\alpha$ :

Applicando Carnot si ha:  $\cos \alpha = \frac{h_p^2 + h_p^2 - d_2^2}{2 h_p^2}$ ;

$$\cos \alpha = 1 - \frac{d_2^2}{2 h_p^2} = 1 - \frac{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{4}} =$$

$$\cos \alpha = \frac{5 + 2\sqrt{5} - 7 - 3\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{-2 - \sqrt{5}}{2 + 2\sqrt{5}} = \frac{-(10 + 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 10)}{5}$$

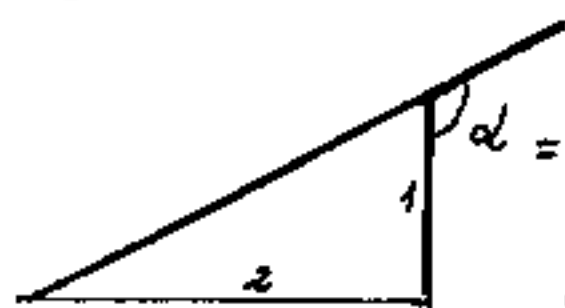
$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}; \quad \boxed{\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}} \quad \underline{\alpha = 116^\circ 33' 54", 1}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{5}}; \quad \boxed{\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 63^\circ 26' 5", 82 \text{ (non valido)} \\ \underline{\alpha = 116^\circ 33' 54", 1} \end{array} \right.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \boxed{\tan \alpha = -2} \quad \underline{\alpha = 116^\circ 33' 54", 1}$$

Il valore di  $\tan \alpha$  ci dice che  $\alpha$  è supplementare all'angolo maggiore del triangolo rettangolo che ha i cateti uno doppio dell'altro.

(Triangolo che abbiamo utilizzato per la sezione aurea e per la costruzione del decagono regolare) (V. Vol I)

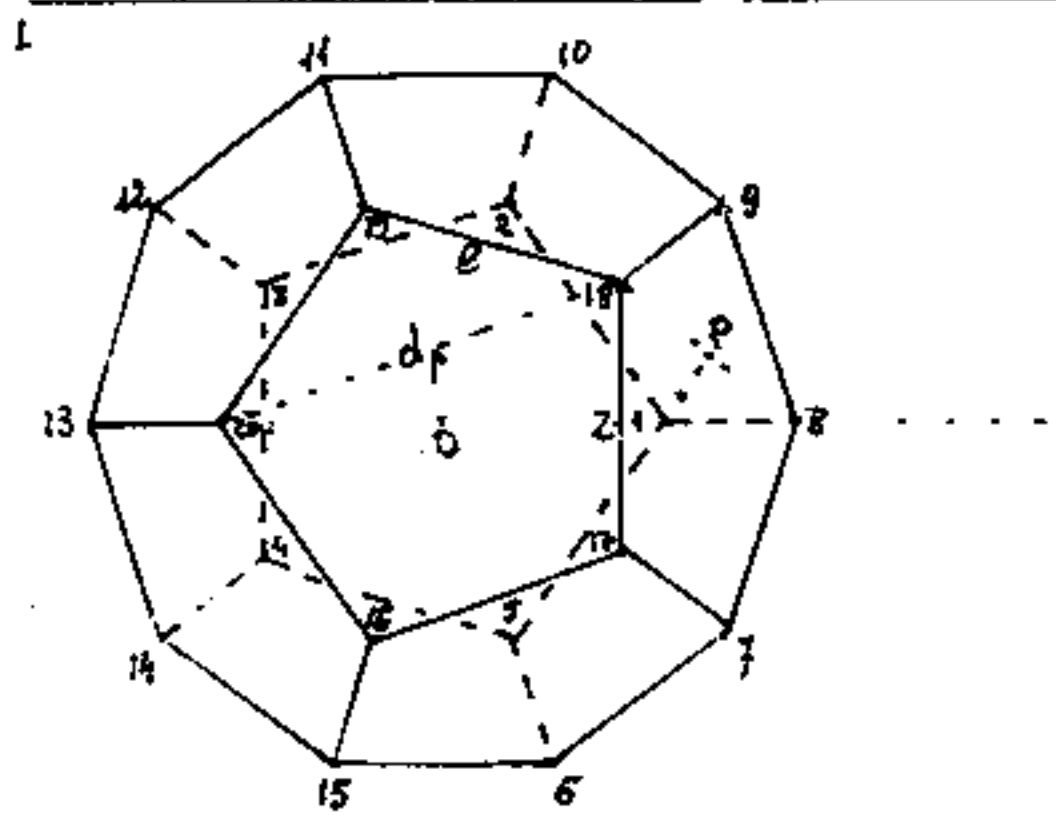
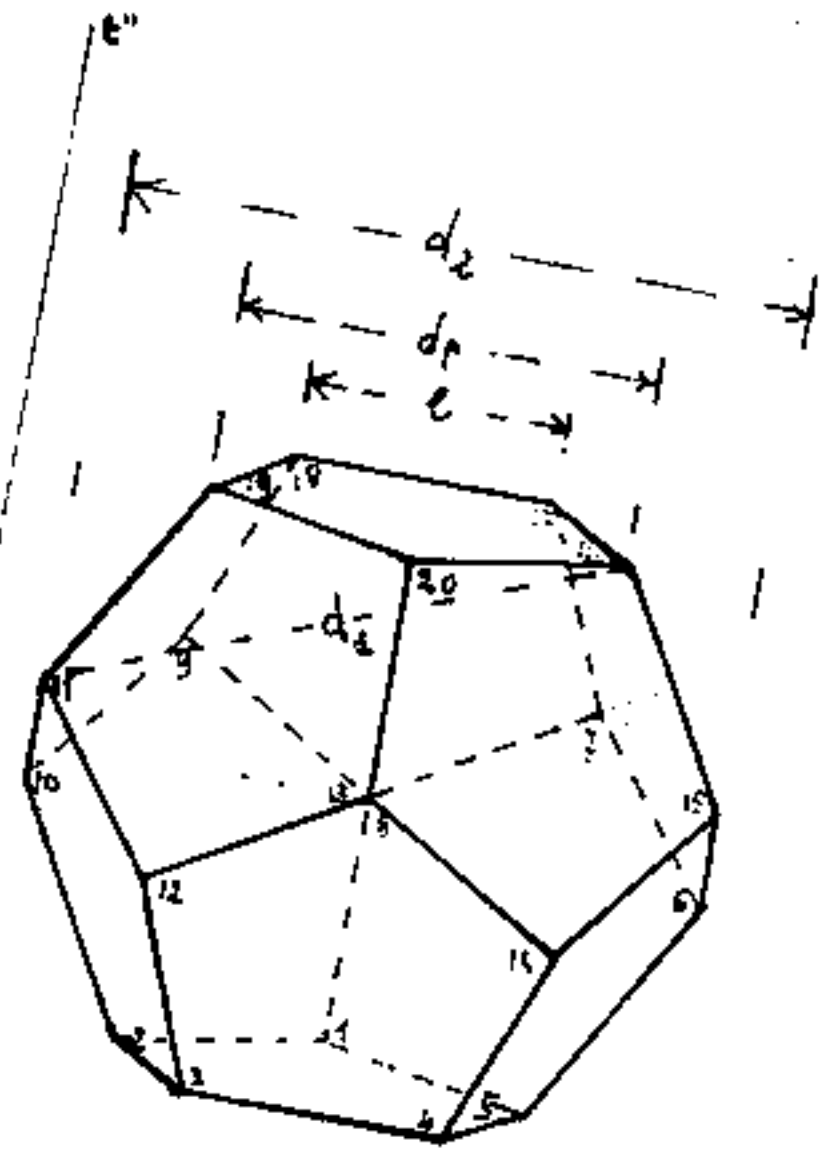
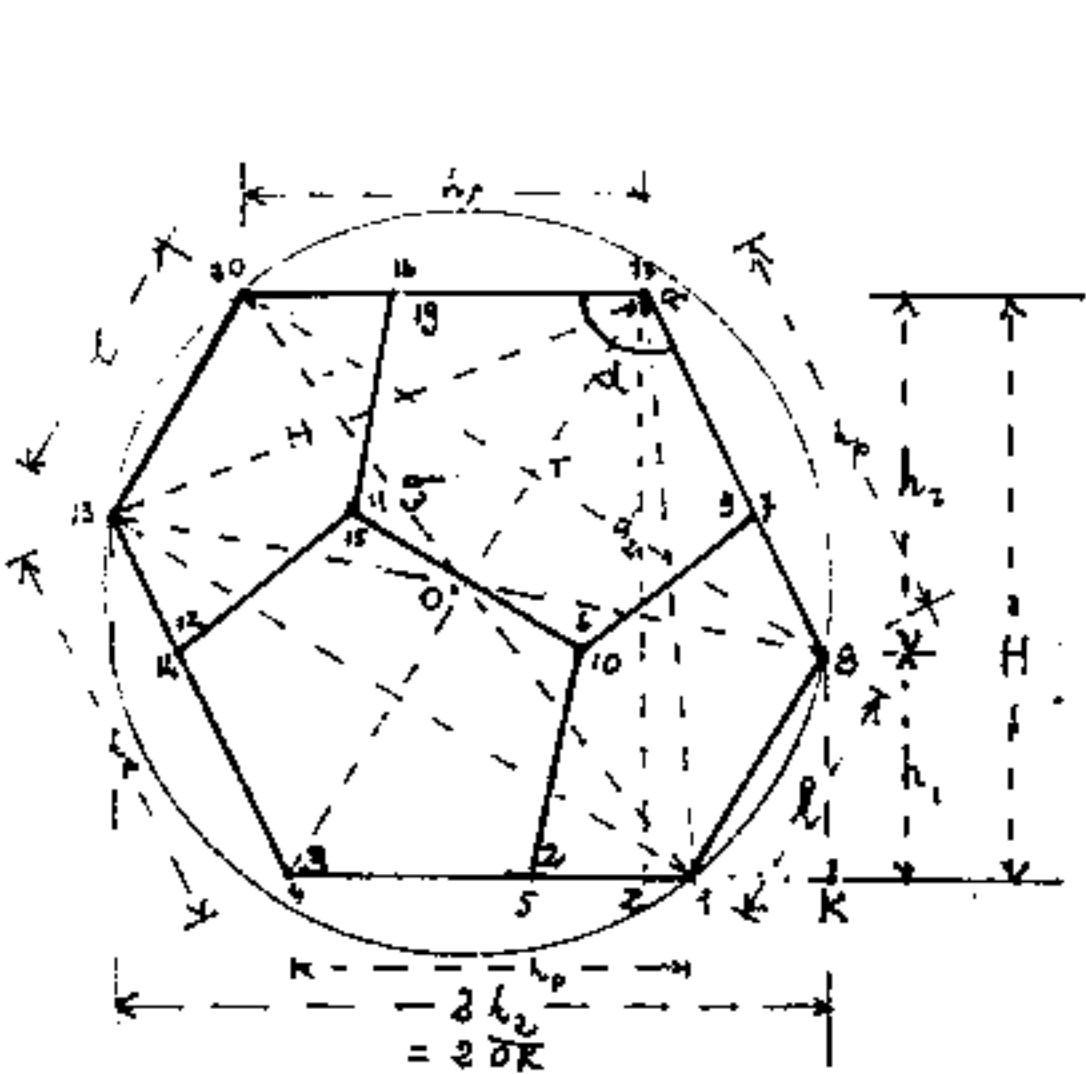


$\alpha$  = (angolo diedro fra le facce del dodecaedro)

utile:  $\boxed{\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}}$

Facciamo le tre proiezioni del dodecaedro per evidenziare il calcolo degli altri elementi.





3<sup>a</sup> proiezione sul piano  
normale al diametro di  
due vertici opposti 8-13

$$\overline{r-z} = (R_p - z_p) = \left( l \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \frac{l}{2} \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \right); \quad \overline{r-Q}^2 = H^2 + \overline{r-z}^2;$$

$$d_1 = \overline{r-18}; \quad d_1^2 = \overline{r-Q}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = H^2 + \overline{r-z}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 =$$

$$d_1^2 = l^2 \left( \frac{25+11\sqrt{5}}{10} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5+2\sqrt{5}}{20} - \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$d_1^2 = l^2 \left( \frac{30+12\sqrt{5}}{10} + \frac{5+2\sqrt{5}}{20} + \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{50}} \right)$$

$$d_1^2 = l^2 \left( \frac{70+26\sqrt{5}}{20} - \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}} \right) = l^2 \left( \frac{35+13\sqrt{5}}{10} - \frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2} \right)$$

$$d_1^2 = l^2 \left( \frac{30+10\sqrt{5}}{10} \right) = l^2 (3+\sqrt{5}) \quad \text{da cui: } \boxed{d_1 = l\sqrt{3+\sqrt{5}}}$$

$$\boxed{d_1 = l(2,288245611)} \quad \boxed{d_1 = l\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \quad \boxed{d_1 = \frac{l}{2}(\sqrt{10} + \sqrt{2})}$$

Consideriamo ora le piramidi aventi il vertice al centro del dodecaedro e per base le facce del dodecaedro stesso, esaminiamo i pentaedri uscenti dal centro e formanti angoli solidi di  $\frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$  stereradiani. Gli spigoli delle facce laterali di tali piramidi sono:  $r_3$ , cioè il raggio della sfera circoscritta, l'altezza =  $\frac{H}{2} = r_0$  è il raggio della sfera inscritta nel dodecaedro.

La superficie laterale del dodecaedro =  $S_L = 12 \cdot A_p$ ;

ove  $A_p = \text{area facce pentagonali} = \frac{5}{2} a_p l = \frac{l^2}{4} \sqrt{25+10\sqrt{5}}$ ; da cui

$$\boxed{S_L = 3l^2 \sqrt{25+10\sqrt{5}}} \quad \boxed{S_L = l^2(20,64572881)} = \boxed{30 l a_p}$$

Il volume del dodecaedro è 12 volte la piramide.

$$V = 12 \cdot \frac{1}{3} A_p \cdot \frac{H}{2} = 2 \left( \frac{l^2}{4} \sqrt{25+10\sqrt{5}} \right) \left( \frac{25+11\sqrt{5}}{10} \right) = \frac{l^3}{2} \sqrt{\frac{235+105\sqrt{5}}{2}} =$$

$$V = \frac{l^3}{4} (\sqrt{345} + \sqrt{225}); \quad \boxed{V = \frac{l^3}{4} (15+7\sqrt{5})} \quad \boxed{V = l^3(7,66311896)}$$

altezza piramide = raggio sfera inscritta =  $\frac{H}{2} \cdot r_i = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$   
apotema di una faccia della piramide =  $h_c = \sqrt{r_i^2 + a_f^2} =$   
 $h_c = \sqrt{\frac{l^2}{4} - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ ; utilizzando  $h_c^2 = r_i^2 + a_f^2$  si ha:

$$h_c = \sqrt{\frac{l^2}{4} \left( \frac{25+11\sqrt{5}}{10} \right) + \frac{l^2}{4} \left( \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \right)}$$

$$h_c = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{10}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} = \boxed{h_c = \frac{l}{4}(3+\sqrt{5})}$$

$$\boxed{h_c = l(1.309016994)}$$

altezza relativa al lato obliquo nelle facce piramidali

$$h_s = \frac{l \cdot h_c}{l_1} = \frac{l^2(3+\sqrt{5})/4}{l(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}/4} = \frac{l}{4} \frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}} = \boxed{l \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} = h_s}$$

angolo al vertice nelle facce piramidali:  $V = 2 \arcsen\left(\frac{l/2}{l_1}\right) =$

$$V = 2 \arctang\left(\frac{l/2}{h_c}\right) = 2 \arctg\left(\frac{4(l/2)}{l(3+\sqrt{5})}\right) = 2 \arctg\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right) = 2 \arctg\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\boxed{\hat{V} = 41^\circ 48' 37'' 13}$$

angoli alla base delle facce piramidali:  $\hat{B} = \frac{180^\circ - \hat{V}}{2} =$

$$\boxed{\hat{B} = 69^\circ 05' 41'' 44}$$

angolo diedro fra le facce delle piramidi

$$\hat{D}_f = 2 \arcsen\left(\frac{d_f/2}{h_s}\right) = 2 \arcsen\left(\frac{l(\sqrt{5}+1)/4}{l(\sqrt{5}+1)/2\sqrt{3}}\right) = 2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{\hat{D}_f = 120^\circ}$$

angolo diedro fra una faccia e la base della piramide

$$\frac{\alpha}{2} = \arctang\left(\frac{r_i}{a_f}\right) = \arctang\left(\frac{l \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}/2}{l \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}/2}\right) = \arctg\left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \arctg\left(\sqrt{\frac{250-220+110\sqrt{5}-100\sqrt{5}}{20}}\right) = \boxed{\arctg\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{2} = 58^\circ 16' 57'' 09}$$

$\alpha$  = angolo diedro fra le facce del dodecaedro  $\alpha = 116^\circ 33' 54",1$

distanza fra i centri di due facce adiacenti

nel dodecaedro =  $g_1 = 2 a_p \sin \frac{\alpha}{2}$  ;

abbiamo già calcolato  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$  per cui:  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{5}})}{2}}$

$$\boxed{\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}} \quad g_1 = 2 \left( \frac{l}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \right) \left( \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \right) = l \sqrt{\frac{35 + 15\sqrt{5}}{50}}$$

$$g_1 = l \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10}} = g_1 = l \frac{(3 + \sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = \boxed{g_1 = l \left( \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \right)}$$

$$g_1 = d_2 / \sqrt{5} ; \quad \boxed{g_1 = l(1,17082039)}$$

distanza fra i centri di due facce alterne, cioè

non adiacenti e non opposte =  $g_2$  = è la diagonale

del pentagono di lato  $g_1$ , perciò:  $g_2 : g_1 = d_p : l$ .

$$g_2 = \frac{g_1 d_p}{l} = \frac{l \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \cdot l \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)}{l} = l \frac{(8 + 4\sqrt{5})}{4\sqrt{5}} = \boxed{g_2 = l \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\boxed{g_2 = l(1,894427191)}$$

distanza fra i centri di facce opposte =  $g_3$

$$\boxed{g_3 = H = 2r_i = l \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}}$$

$$\boxed{g_3 = l(2,227032729)}$$

## Simboli del dodecaedro

$l$  = spigolo = lato faccia pentagonale

$a_p = r_p$  = apotema della faccia = raggio del cerchio nella faccia.

$R_p = h_1$  = raggio del cerchio circoscritto alla faccia = minor altezza vertici

$h_2 = \overline{OK} = 2r_p$  = maggior altezza dei vertici, dalle basi = raggio del cerchio contenente i vertici in prima proiezione = diametro del cerchio inscritto in una faccia ( $2r_p$ )

$h_p = (r_p + R_p)$  = altezza di una faccia =  $(u_p + v_p)$  (vedi Vol I - pentagono)

$d_p$  = diagonale di faccia

$v_p$  = distanza del vertice dalla diagonale di faccia

$u_p$  = distanza del lato parallelo dalla diagonale di faccia

$h_c$  = distanza di uno spigolo dal centro del dodecaedro = altezza facce delle piramidi angoloidi uscenti dal centro

$H = 2r_i = (h_1 + h_2)$  = altezza dodecaedro = diametro ( $2r_i$ ) della sfera inscritta nel dodecaedro = raggio per costruire il modellino.

$\frac{d_3}{2} = r_s =$  raggio della sfera circoscritta = metà diagonale maggiore

$d_2$  = diagonale media = distanza fra due spigoli paralleli =  $2h_p$

$d_1$  = diagonale minore (interna, al dodecaedro)

$g_1$  = distanza centri facce adiacenti

$g_2$  = distanza centri facce alterne (non adiacenti, non opposte)

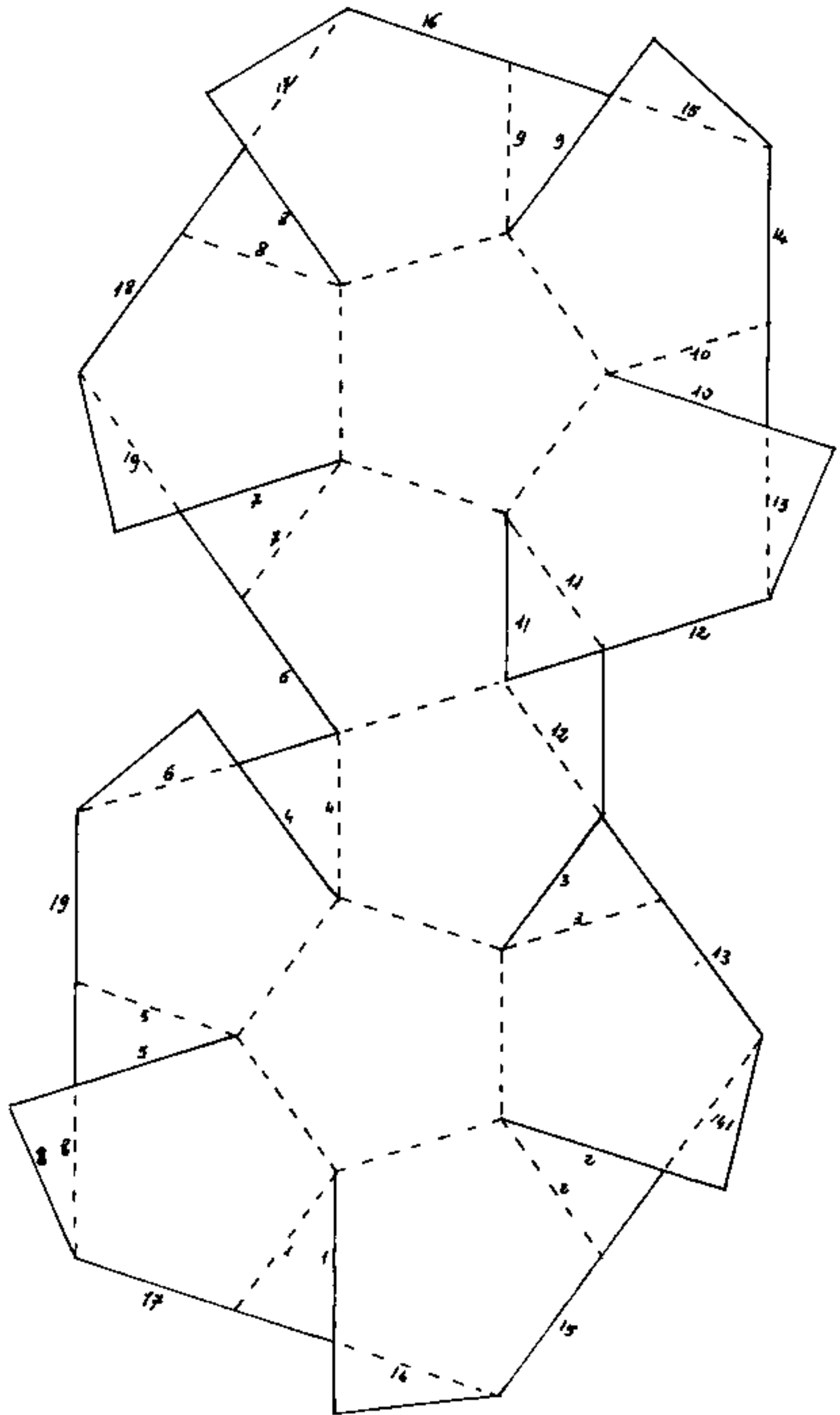
$g_3 = H$  = distanza facce opposte.

$S_l$  = superficie laterale

$V$  = Volume.



Schema di dodecaedro regolare  $\rho_1 = 5/12$



Tagliare le linee intere, piegare le linee a tratti, incollare le linguette facendo combaciare gli spigoli omonimi

# L' Icosaedro

(dal greco: icos = 20)

L' Icosaedro è il quinto dei solidi regolari, ha 20 facce triangolari equilateri, 12 vertici, 30 spigoli: ( $F+V=S+2$ ;  $20+12=30+2$ ) (Eulero).

Confrontiamo la formula di Eulero per i cinque solidi regolari:

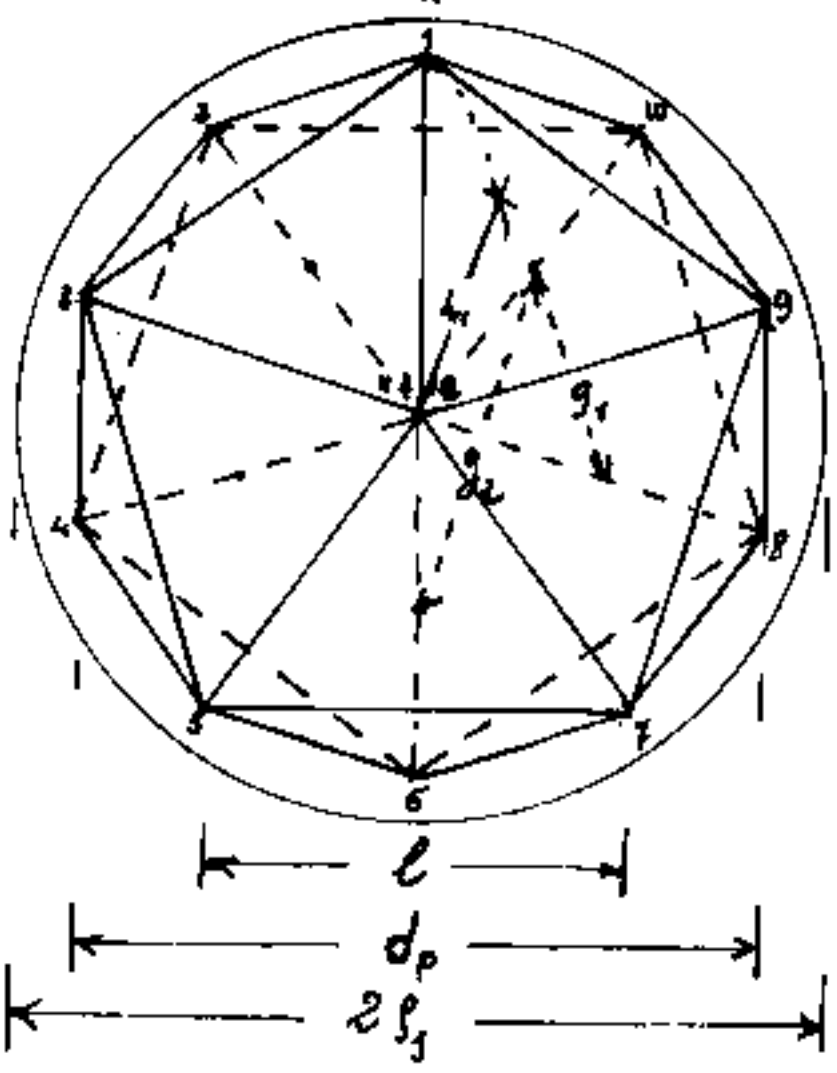
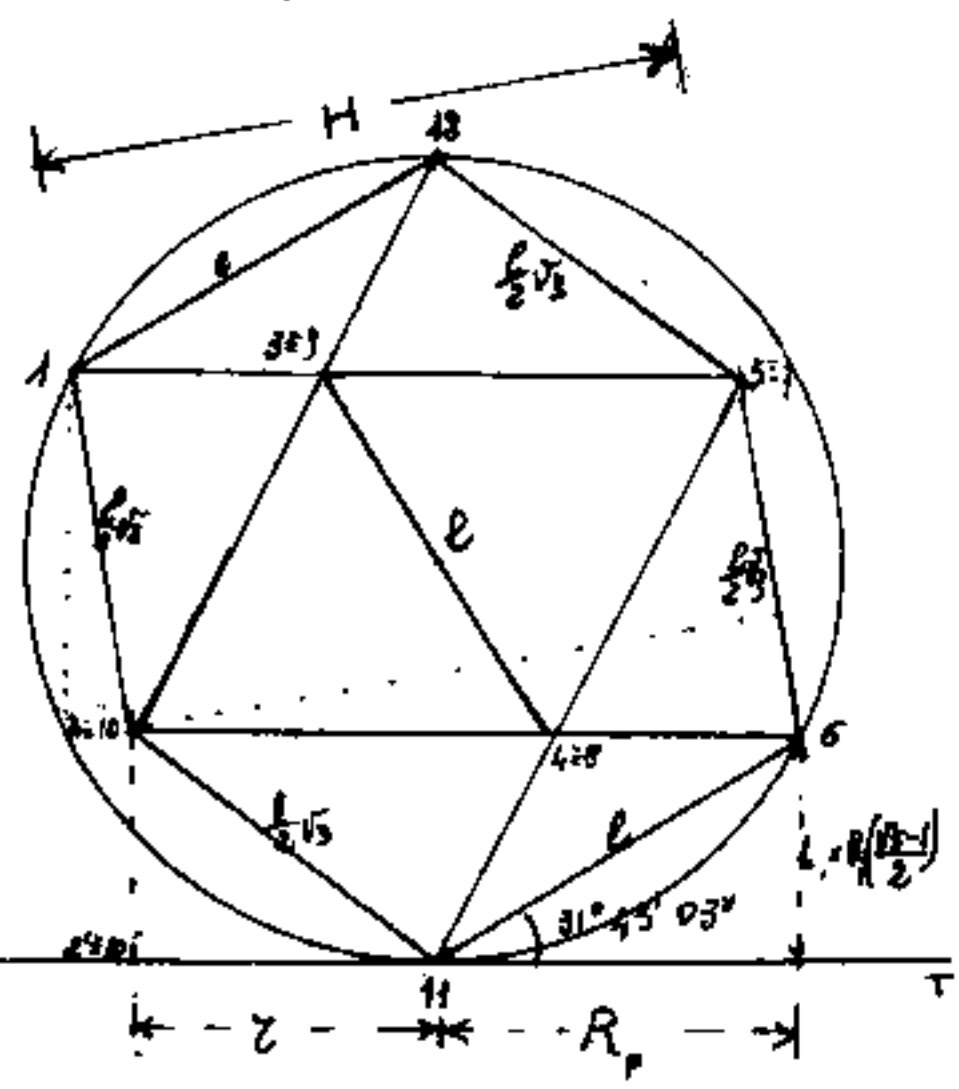
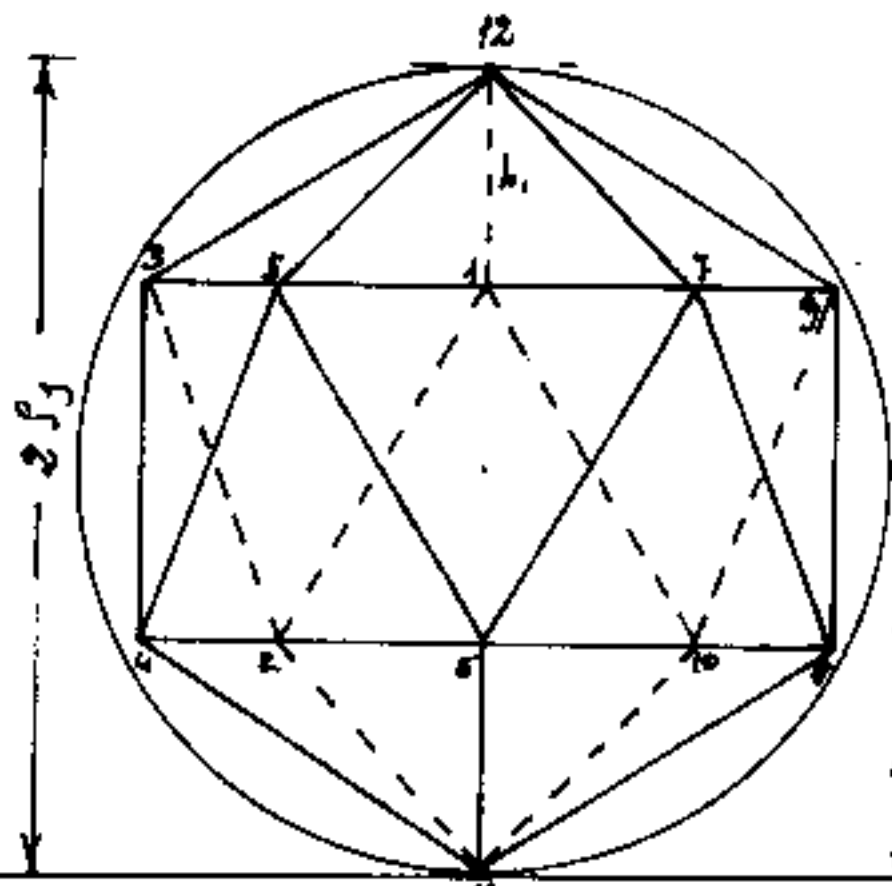
Solido	F	V	S	NOTE
tetraedro	4	4	6	(base fondamentale)
cubo	6	8	12	} scambio $V \leftrightarrow F$
ottaedro	8	6	12	
dodecaedro	12	20	30	} scambio $V \leftrightarrow F$
icosaedro	20	12	30	

Vedremo come queste caratteristiche permettono la formazione di solidi, (regolari o no), combinando le parti di solidi regolari, e quali sono i moduli per paragonarli.

Questo argomento è importantissimo per lo studio della costituzione dei cristalli (La geometria chimica, l'ha inventata la Natura prima, molto prima, dell'uomo). L'argomento è affascinante.



Facciamo le proiezioni del nostro icosaedro, ci aiuteranno a trovare le correlazioni fra i vari elementi che lo costituiscono.



costruito in prima proiezione il pentagono di lato  $l$  (con  $l =$  spigolo dell'icosaedro); in prima proiezione gli spigoli come:  $\overline{1-3}$ ;  $\overline{3-5}$ ;  $\overline{5-7}$ ;  $\overline{7-9}$ ;  $\overline{9-1}$ ;  $\overline{2-4}$ ;  $\overline{4-6}$ ;  $\overline{6-8}$ ;  $\overline{8-10}$ ;  $\overline{10-2}$ ; si proiettano in vera grandezza, è facile completare la prima proiezione.

Per la II proiezione basta ribaltare, in prima proiezione, un triangolo come quello di ipotenusa  $\overline{3-12} = l$  che si proietta accorciato, per trovare l'altezza del vertice 12

sul piano dei vertici dispari. ( $R_5$  raggio del cerchio circoscritto al pentagono)



Lo stesso triangolo di cateti  $R_r$  ed  $h_1$ , ed ipotenusa  $l$ , si può vedere in III<sup>a</sup> proiezione dello spigolo  $\overline{11-6}$ . Calcoliamo  $h_1$ , avvalendoci delle relazioni fra gli elementi del pentagono (vedi):

$$R_r = l \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \quad ; \quad l = R_r \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \quad ; \quad h_1 = \sqrt{l^2 - R_r^2} =$$

$$\boxed{h_1 = l \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}} \quad \underline{h_1 = (0,525731112) l}$$

$$h_1 = R_r \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\boxed{h_1 = R_r \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)} \quad \underline{h_1 = (0,618033989) R_r}$$

$r_r$  = raggio del cerchio inscritto nel pentagono, ove:  $l = 2r_r \sqrt{5-2\sqrt{5}}$  ;

$$R_r = r_r \sqrt{5-1} \quad ; \quad \text{sostituendo si ha: } h_1 = r_r \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}$$

$$\boxed{h_1 = r_r (3-\sqrt{5})} \quad \underline{h_1 = (0,763932023) r_r}$$

Dal triangolo:  $(2-10-11)$  in terza proiezione si ha: lato

$$\begin{aligned} \left( \overline{2-10-11} \right)^2 \text{ in terza proiezione} &= h_1^2 + r_r^2 = l^2 \left( \frac{5-\sqrt{5}}{10} \right) + \frac{l^2}{4} \left( \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \right) = \\ &= \left( \frac{10+2\sqrt{5}+5-2\sqrt{5}}{20} \right) l^2 = \left( \frac{15}{20} \right) l^2 = \frac{3}{4} l^2 \quad ; \quad \text{cioè la terza proiezione} \\ &\text{dell'apotema del triangolo } (2-10-11) \text{ è in vera grandezza} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{h_1^2 + r_r^2} = \frac{l}{2} \sqrt{3}}$$

Vogliamo ora calcolare il cateto verticale del triangolo rettangolo, in terza proiezione uscente dal vertice 1, di ipotenusa  $\frac{l}{2} \sqrt{3}$  e cateto minore orizzontale  $(R_r - r_r)$  avremo:

$$\begin{aligned} \left( \frac{l}{2} \sqrt{3} \right)^2 &= \frac{3}{4} R_r^2 \left( \frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) \quad ; \quad (R_r - r_r)^2 = \left( R_r - \frac{R_r(\sqrt{5}+1)}{4} \right)^2 = R_r^2 \left( \frac{3-\sqrt{5}}{4} \right)^2 \quad ; \quad \left( \frac{3}{8} (5-\sqrt{5}) - \frac{14-6\sqrt{5}}{16} \right) R_r^2 = \\ &= R_r^2 \quad \text{cioè:} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{\left( \frac{l}{2} \sqrt{3} \right)^2 - (R_r - r_r)^2} = R_r}$$

Questo triangolo è simile al triangolo che ha per ipotenusa  $(R_r + r_r)$  e per cateto maggiore  $H_1$ , (vedi terza proiezione)

ove  $H$  è l'altezza dell'icosaedro.

Abbiamo la proporzione:

$$\boxed{(r_p + R_p) : \frac{l}{2}\sqrt{3} = H : R_p} \quad \text{utilizzando le relazioni}$$

del pentagono (Vol. I) si ha:

$$H = 2 \left( \frac{R_p^2 + r_p R_p}{l\sqrt{3}} \right) = 2 \left( \frac{l^2 \left( \frac{5+\sqrt{5}}{10} \right) + \frac{l^2}{2} \sqrt{\left( \frac{5+\sqrt{5}}{10} \right) \left( \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \right)}}{l\sqrt{3}} \right) =$$

$$H = \frac{2l}{10\sqrt{3}} \left[ (5+\sqrt{5}) + \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{2}} \right] = \frac{l}{5\sqrt{3}} \left( (5+\sqrt{5}) + \sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{2}} \right) =$$

$$H = \frac{l}{5\sqrt{3}} \left( (5+\sqrt{5}) + \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{5})}{2} \right) = \frac{l}{5\sqrt{3}} \left( \frac{10+2\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{2} \right) = l \frac{15+5\sqrt{5}}{10\sqrt{3}} =$$

$$\boxed{H = l \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}} = \underline{\underline{(1,511522628)l}}$$

Vogliamo ora fare la proiezione (I° e II° proiezione) dell'icosaedro appoggiato su una faccia.

In prima proiezione si presenta come un esagono, facilmente determinabile perché la diagonale interna minore dell'icosaedro è pari alla diagonale dell'esagono perché in entrambi i casi si proietta in vera grandezza.

Invece i raggi dei cerchi circoscritti al pentagono e all'esagono sono diversi. Usando la tabella delle relazioni fra gli elementi del pentagono (vedi Vol. I) si ha:

$$\text{Raggio del cerchio circoscritto al pentagono } R_p = l \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

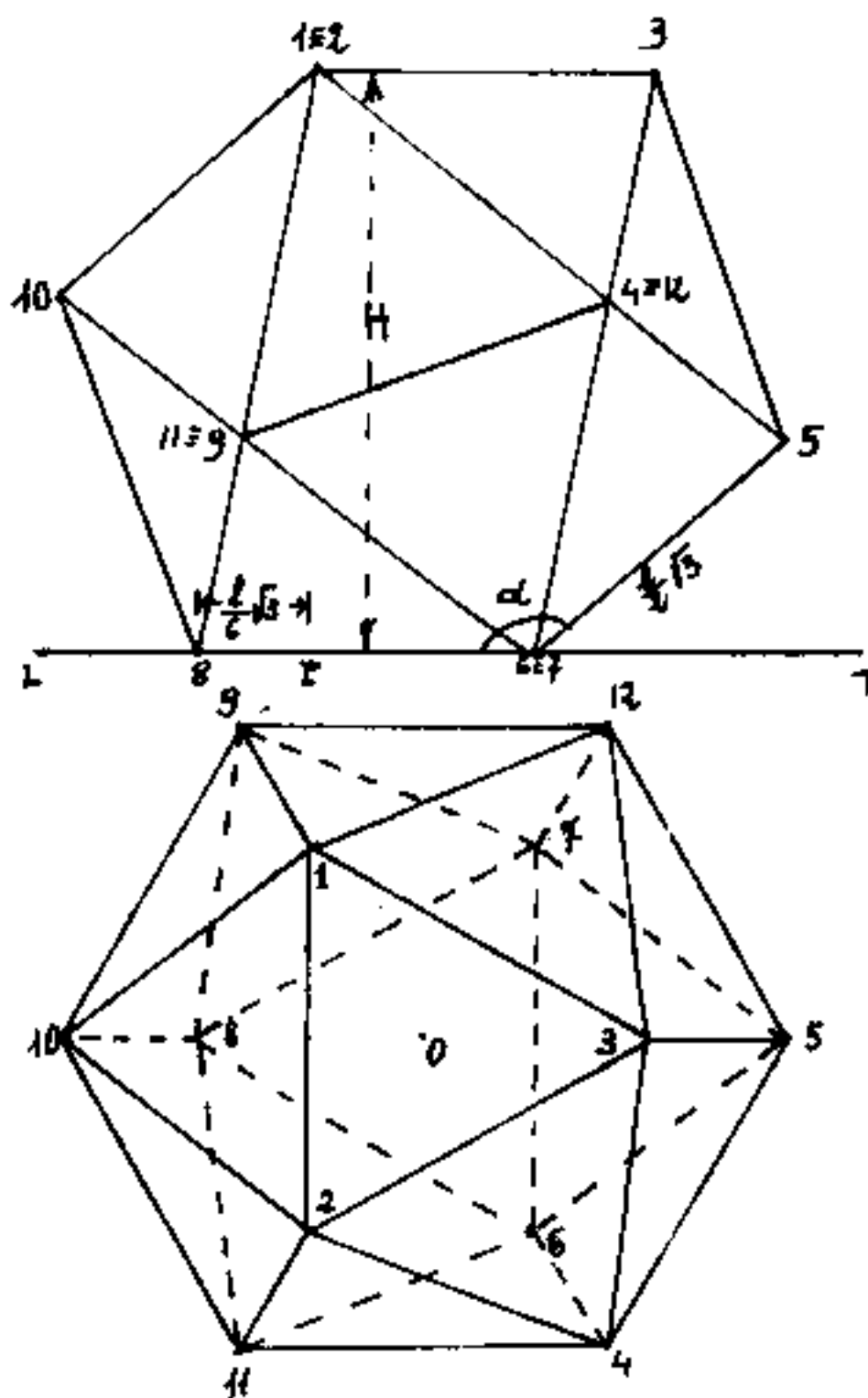
Raggio del cerchio inscritto nel pentagono  $r_p = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

Diagonale del pentagono (e dell'esagono)  $d_p = l \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$

Raggio del cerchio circoscritto all'esagono  $R_{es} = d_p / \sqrt{3}$

$$R_{es} = \frac{l}{2} \left( \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}} \right)$$

Si noti che l'altezza  $h_p$  del pentagono 1-2-11-8-9 si proietta in vera grandezza, in seconda proiezione nel segmento:  $\overline{8-(1=2)}$ ; che la prima proiezione di tale segmento è  $\frac{1}{3}$  dell'apotema della faccia triangolare, cioè:  $\frac{l}{6}\sqrt{3}$ . Quindi dal triangolo rettangolo (in seconda proiezione)  $(8-P-(1=2))$  si ha:  $h_p^2 - \left(\frac{l}{6}\sqrt{3}\right)^2 = H^2$ , e poiché



abbiamo:

$$h_p = \frac{l}{2} \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$H = \frac{l}{2} \sqrt{5+2\sqrt{5}} - \frac{l}{6} = \frac{l}{6} \sqrt{7+3\sqrt{5}}$$

$$H = \frac{l}{2\sqrt{3}} (3+\sqrt{5}) = \frac{l}{2} \left( \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right)$$

come avevamo già calcolato.

Il raggio della sfera inscritta nell'icosaedro è:  $\left(\frac{H}{2}\right)$ ; il raggio della sfera circoscritta all'icosaedro =  $R_s = \frac{1}{2} (h_p + R_p + h_p)$  ove sostituiamo

abbiamo:  $(f_1 = h_1 + \frac{R_p}{2})$ ;  $h_1 = R_p \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$ ;  $f_1 = \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{2} \right) R_p$

$$R_p = R_p \left( \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$R_p = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot l \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2 \cdot 5}} = \boxed{R_p = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = \underline{(0,951056516) l}$$

Il raggio della sfera inscritta è anche altezza delle piramidi che hanno per base le facce e per vertice il centro sfera. Perciò essendo l'area di una faccia:

$A_1 = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$ , l'area laterale totale dell'icosaedro sarà:

$$S_l = \frac{20 l^2 \sqrt{3}}{4}; \quad \boxed{S_l = (5\sqrt{3}) l^2}$$

Il volume di una tale piramide sarà:  $V_1 = \frac{A_1 H}{3}$

cioè il volume dell'icosaedro sarà:

$$V = 20 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{6} l^2 \cdot \frac{l \cdot (3+\sqrt{5})}{2\sqrt{3}} =$$

$$\boxed{V = \frac{5}{12} l^3 (3+\sqrt{5})} = \underline{(2,181594391) l^3}$$

Lo spazio angolare delimitato dai triedri laterali delle piramidi è:  $\frac{1}{20} 4\pi = \boxed{\frac{\pi}{5} \text{ steradiani}}$

L'angolo diedro fra le facce dell'icosaedro si proietta in vera grandezza nella sua seconda proiezione. (si è indicato con  $d$ )  $\text{sen} d = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{3}}{\frac{l}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

$$\text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{matrix} 41^\circ 48' 37'' \text{ (non vale)} \\ 138^\circ 11' 23'' = 2,41186 \text{ rad.} \end{matrix}$$

$$\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 138^\circ 11' 22'',8$$

$$\text{arctg}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 138^\circ 11' 22'',8$$

Angolo diedro fra le facce della piramide (angoli di triedro):  $\hat{D} = 2 \arcsen\left(\frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}\right)$ ; ove  $\varphi$  = angolo al vertice

delle facce della piramide:  $\frac{l/2}{p_3} = \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{l/2}{\frac{l}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5}{20}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \quad ; \quad \frac{\varphi}{2} = 31^\circ 43' 2'' 91$$

$\varphi = 63^\circ 26' 5'' 82$ . (angolo al vertice facce piramidali)

$$\hat{D} = 2 \arcsen\left(\frac{1}{2 \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}}\right) = 2 \arcsen\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)$$

$\boxed{\hat{D} = 72^\circ} =$  angolo diedro fra le facce piramidali

apotema delle facce piramidali =  $h_c = \sqrt{p_3^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} =$

$$h_c = \sqrt{\frac{l^2}{4} \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \boxed{h_c = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) l}$$

$h_c = (0,809016994) l$  ; area faccia piramide =  $\frac{l h_c}{2} = \frac{l^2 (\sqrt{5}+1)}{8}$ ;

altezza relativa al lato obliquo =  $h_3 = \frac{2 \text{Area}}{p_3} = \frac{l^2 (\sqrt{5}+1)/4}{\frac{l}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} =$

$$h_3 = \frac{l}{2} \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-\sqrt{5})}{\sqrt{10}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{5}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}} = \boxed{h_3 = l \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}}$$

Si noti che l'angolo diedro fra le facce delle piramidi (triedri angoloidi) di:  $72^\circ = \frac{1}{5} 360^\circ$ , ci dice che ogni lato obliquo ( $p_3$ ) delle facce piramidali è asse di un fascio di 5 piani angolarmente equidistanti, per cui proiettando il solido su un piano perpendicolare a tale asse, i contigui lati obliqui termineranno ai vertici di un pentagono (vedi proiezioni).

Calcoliamo ora le distanze fra i centri delle facce dell'icosaedro. Poiché in terra proiezione le apoteme delle facce dell'icosaedro ( $\frac{1}{2} l$ ) si proiettano

in vera grandezza, e poiché i centri delle facce dividono le apoteme in due parti:  $(\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3})$ ; dato che il triangolo  $(1 - (2=10) - 11)$  in terza proiezione è isoscele, avremo:  
 distanza dei centri di due facce adiacenti =  $g_1 = \frac{d_p}{3}$

$$g_1 = \frac{l}{6}(\sqrt{5}+1) = \underline{\underline{l(0,539344663)}}$$

Consideriamo nel I° disegno, in prima proiezione i centri delle tre facce consecutive: 5-12-7; 7-12-9; 9-12-4; possiamo scrivere la proporzione:

$$g_1 : l = g_2 : d_p \quad g_2 = \frac{d_p^2}{3l}$$

$$g_2 = \frac{l^2(6+2\sqrt{5})}{3l}$$

$$g_2 = \frac{l}{6}(3+\sqrt{5}) = \underline{\underline{l(0,87267800)}}$$

Si noti che i centri faccia dell'icosaedro di lato  $l$ , sono i vertici di un dodecaedro di lato  $g_1$ , perciò le distanze fra i centri faccia dell'icosaedro corrispondono alle distanze fra i vertici del dodecaedro.

Le distanze fra i vertici del dodecaedro sono:

elementi del dodecaedro di lato $l$	{	$l = l$	$\rightarrow$	distanza facce icosaedro	$\rightarrow$	$g_1$	$=$	valori espressi in funzione del lato $l$ dell'icosaedro	$g_1 = \frac{l}{6}(\sqrt{5}+1)$
		$d_p = l(\frac{\sqrt{5}+1}{2})$	$\rightarrow$		$\rightarrow$	$g_2$	$=$		$g_2 = g_1(\frac{\sqrt{5}+1}{2}) = \frac{l}{6}(3+\sqrt{5})$
		$d_1 = l(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}})$	$\rightarrow$		$\rightarrow$	$g_3$	$=$		$g_3 = g_1(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}) = \frac{l}{3}(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}})$
		$d_2 = l(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$	$\rightarrow$		$\rightarrow$	$g_4$	$=$		$g_4 = g_1(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = \frac{l}{3}(2+\sqrt{5})$
		$d_3 = l(\frac{\sqrt{5}+1}{2})\sqrt{3}$	$\rightarrow$		$\rightarrow$	$g_5$	$=$		$g_5 = g_1(\frac{\sqrt{5}+1}{2})\sqrt{3} = \frac{l}{2}(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}) = 2\tau_1$

Usando le relazioni trovate per il dodecaedro è stato facile calcolare:  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$  per l'icosaedro.

$$g_1 = \frac{l}{6}(\sqrt{5}+1) = \underline{(0,539344663)l}$$

$$g_2 = \frac{l}{6}(3+\sqrt{5}) = \underline{(0,872677996)l}$$

$$g_3 = \frac{l}{3} \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \underline{(1,234153058)l} = g_2\sqrt{2}$$

$$g_4 = \frac{l}{3}(2+\sqrt{5}) = \underline{(1,412022659)l}$$

$$g_5 = \frac{l}{2} \left( \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right) = \underline{(1,511522628)l} = H = \underline{\text{altezza dell'icosaedro}} = 2r_i$$

Il confronto ci avverte che, il simbolismo che noi abbiamo adottato per i solidi regolari, anche se pratico, non è in linea con gli scopi di questi studi. Noi infatti abbiamo sempre indicato con  $l$  il lato delle facce dei solidi, con  $r_s$  e  $r_i$  rispettivamente i raggi delle sfere circoscritte o inscritte nei solidi, con  $d$  le diagonali, con  $g$  le distanze dei centri facce. Ma la nostra indagine ci ha portato ad una visione d'insieme, con correlazioni fra gli elementi dei vari solidi, (per esempio lo spigolo del tetraedro è la diagonale sia della faccia del cubo sia della faccia del rombododecaedro; lo spigolo dell'ottaedro, se posto uguale a quello del tetraedro ha le semidiagonali interne pari allo spigolo del cubo, ecc.)



Queste asserzioni ci portano a considerare una:  
"Grandezza - modulo" comune a tutti i solidi  
 e che ne rispecchi le composizioni delle forme nel conti-  
nuo tridimensionale. Abbiamo già cercato di introdurre  
 a questo problema che tratteremo. Ora completiamo l'ico-  
 saedro. Il simbolismo dell'icosaedro.

$l$  = spigolo dell'icosaedro

$a_t$  = altezza faccia triangolare

$R_p$  = raggio del cerchio circoscritto al pentagono proiezione =  $R$

$r_p$  = " " " inscritto " " "

$R_6$  = " " " circoscritto all'esagono "

$r_6$  = " " " inscritto " " "

$R_s$  = " della sfera circoscritta al solido icosaedro =  $\frac{l}{2} + h_t$

$r_i$  =  $\frac{H}{2}$  = raggio " inscritta " " "

$H$  = altezza del solido = (distanza di due facce parallele)

$h_p$  = " altezza della figura pentagonale.

$h_v$  = distanza del vertice sul piano della figura pentagonale

$d_p$  = diagonale pentagono =  $d$ , esagono.

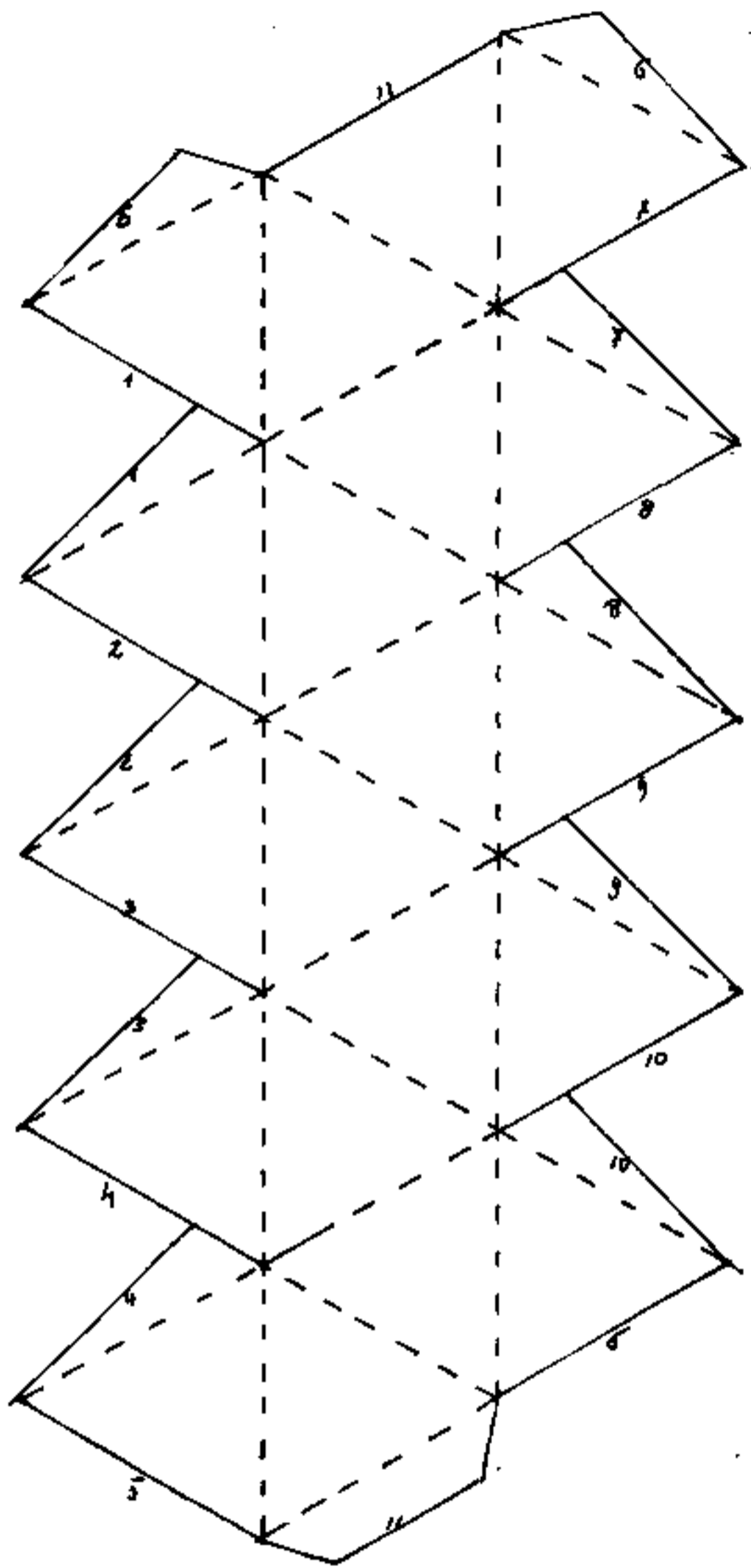
$g_1; g_2; g_3; g_4; g_5$  = distanza fra i centri faccia.

$S_L$  = superficie laterale

$V$  = volume.



## Schema dell'icosaedro



Come si vede lo schema dell'icosaedro è molto semplice trattandosi di facce triangolari equilateri.

Si noti che somiglia a cinque schemi di tetraedro affiancati.

È facile costruire lo schema se è noto il lato, quindi se vogliamo una particolare misura, basta consultare la tabella delle relazioni fra gli elementi dell'icosaedro.

Tagliare lungo le linee intere, incidere per poter piegare, lungo le linee tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli omonimi.—

## Gli angoli dei corpi solidi

Ogni solido, comunque irregolare, delimitato da facce piane, spigoli rettilinei, e vertici, ammette la misura "esterna" degli angoli diedri.

Se la costituzione del solido è tale da ammettere sfoldamenti secondo i piani paralleli alle facce, gli angoli diedri fra le facce non mutano.

Se sfoldandosi, una faccia o più facce scompaiono, diventano adiacenti facce che prima non lo erano e formeranno un angolo diverso con le facce adiacenti, ma invariato nelle primitive direzioni.

Noi considereremo le giaciture dei piani paralleli, intendendo per giacitura la direzione delle rette normali all'insieme di piani paralleli. Chiameremo retta di giacitura quella normale che passa per il centro assi del sistema di riferimento.

L'angolo diedro fra due piani è supplementare dell'angolo fra le rispettive giaciture.

Poiché i solidi regolari ammettono un centro, (centro della sfera inscritta e circoscritta), considereremo le rette di giacitura delle facce, contenenti i raggi della sfera inscritta, cioè i segmenti che dal

centro del solido vanno al centro faccia. Indicheremo con  $q_1, q_2, \dots, q_n$  le distanze fra i centri delle facce, avremo, indicando con  $r_i$  il raggio della sfera inscritta, che l'angolo fra le giaciture è dato da:  $\gamma_n = 2 \arccos\left(\frac{q_n}{2r_i}\right)$  e vale anche per il supplementare angolo diedro.

Consideriamo ora i raggi della sfera circoscritta ai solidi regolari, che vanno dal centro ai vertici delle facce (vertici del solido), costituendo tante piramidi, quante sono le facce, aventi per base le facce stesse e per vertice comune il centro sfera. Gli angolidi poliedri costituenti le facce laterali di tali piramidi, delimitano un angolo solido pari a:  $\frac{4\pi}{n}$  (stereoradiani) ove  $n$  è il numero delle facce del solido.

Le facce delle piramidi uscenti dal centro sono triangoli isosceli, aventi per base uno spigolo del solido (lato di una faccia), e per lati obliqui i raggi della sfera circoscritta.

Poiché ogni raggio che esce dal centro sfera e va nel vertice del solido è axe di tanti piani (facce laterali di piramidi) quante sono le "n" facce del solido che convergono in quel vertice; avremo che l'angolo diedro fra le facce laterali di una di tali piramidi è  $\hat{D}_n = \frac{1}{n} 2\pi \text{ rad.}$

Noi considereremo anche i triangoli isosceli aventi per lati obliqui i raggi della sfera circoscritta ed aventi per base tutte le possibili diagonali congiungenti due vertici del solido.

Ciò premesso, noi considereremo gli angoli al vertice ( $w$ ) ed alla base:  $\frac{1}{2}(180-w)$  di tali triangoli, ed anche gli angoli diedri sia sui raggi della sfera, sia sia sul segmento congiungente due vertici per il diedro fra la faccia e la base delle piramidi, nonché l'angolo diedro fra le facce del solido (supplementare all'angolo fra le giaciture), e gli angoli sulle facce del solido stesso.

Per le correlazioni fra gli elementi dei triangoli sferici individuati dai raggi, vedasi trigonometria sferica. Per le aree dei triangoli sferici e la conseguente determinazione dell'angolo solido dell'angoloide poliedro costituito dalle facce laterali delle piramidi uscenti dal centro sfera, o dai vertici del solido, vedasi il capitolo: "area dei triangoli sferici" posto in fine alla trattazione dell'ottaedro.

Distanze fra i centri delle facce ( $r_i$ ), angoli fra le giaciture ( $\delta_i$ ), angoli diedri fra le facce ( $180 - \delta_i$ )

---

Tetraedro ( $r_i = \frac{l}{3\sqrt{6}}$ )

$$g_1 = \frac{l}{3}; \delta_1 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

angolo fra le giaciture =  $\delta_1 = 109^\circ 28' 16'',39 = 1,910633236 \text{ rad.}$

diedro ( $180 - \delta_1$ ) =  $70^\circ 31' 43'',61 = 1,230959417 \text{ rad.}$

---

Cubo ( $r_i = \frac{l}{2}$ )

$$g_1 = \frac{l}{2}\sqrt{2}; \delta_1 = 2 \arcsin\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right) = \arccos(0)$$

angolo fra le giaciture =  $\delta_1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.} = 1,570796327 \text{ rad.}$

diedro  $180 - \delta_1 = 90^\circ$

---

$$g_2 = l; \delta_2 = 180^\circ$$

angolo fra le giaciture =  $\delta_2 = 180^\circ = \pi \text{ rad} = 3,141592654 \text{ rad.}$

diedro ( $180 - \delta_2$ ) = 0

---

ottaedro ( $r_i = \frac{l}{\sqrt{6}}$ )

$$g_1 = \frac{l}{3}\sqrt{2}; \delta_1 = 2 \arcsin\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

angolo fra le giaciture =  $\delta_1 = 70^\circ 31' 43'',61 = 1,230959417 \text{ rad}$

diedro ( $180 - \delta_1$ ) =  $109^\circ 28' 16'',39 = 1,910633236 \text{ rad}$

---

$$g_2 = \frac{2}{3}l; \delta_2 = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

angolo fra le giaciture =  $\delta_2 = 109^\circ 28' 16'',39 = 1,910633236 \text{ rad}$

diedro ( $180 - \delta_2$ ) =  $70^\circ 31' 43'',61 = 1,230959417 \text{ rad}$

---

## dodecaedro ( $r_i = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$ )

$$g_1 = l \left( \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \right); \quad \delta_1 = 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right) = \arctg(2)$$

angolo fra le giaciture:  $\delta_1 = \underline{63^\circ 26' 05",82} = \underline{1,107148718 \text{ rad}}$

diedro ( $180^\circ - \delta_1$ ) =  $\underline{116^\circ 33' 54",18} = \underline{2,034443936 \text{ rad}}$

$$g_2 = l \left( \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \right); \quad \delta_2 = 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \right) = \arccos \left( \frac{-1}{\sqrt{5}} \right)$$

angolo fra le giaciture:  $\delta_2 = \underline{116^\circ 33' 54",18} = \underline{2,034443936 \text{ rad}}$

diedro ( $180^\circ - \delta_2$ ) =  $\underline{63^\circ 26' 05",82} = \underline{1,107148718 \text{ rad}}$

$$g_3 = l = H = 2r_i; \quad \delta_3 = 2 \arcsin(1)$$

angolo fra le giaciture:  $\delta_3 = \underline{180^\circ} = \underline{\pi \text{ rad}} = \underline{3,1415926535 \text{ rad}}$

diedro ( $180^\circ - \delta_3$ ) = 0

## Icosaedro ( $r_i = l \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$ )

$$g_1 = l \left( \frac{\sqrt{5}+1}{6} \right); \quad \delta_1 = 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} \right) = \arcsin \left( \frac{2}{3} \right)$$

angolo fra le giaciture:  $\delta_1 = \underline{41^\circ 48' 37",13} = \underline{0,729727656 \text{ rad}}$

diedro ( $180^\circ - \delta_1$ ) =  $\underline{138^\circ 11' 22",87} = \underline{2,41864997 \text{ rad}}$

$$g_2 = l \left( \frac{3+\sqrt{5}}{6} \right); \quad \delta_2 = 2 \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \arccos \left( \frac{1}{3} \right)$$

angolo fra le giaciture:  $\delta_2 = \underline{70^\circ 31' 43",61} = \underline{1,230959417 \text{ rad}}$

diedro ( $180^\circ - \delta_2$ ) =  $\underline{109^\circ 28' 16",39} = \underline{1,910633236 \text{ rad}}$

$$g_3 = l \left( \frac{3+\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \right); \quad \delta_3 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} = \arccos \left( \frac{-1}{3} \right)$$

angolo fra le giaciture:  $\delta_3 = \underline{109^\circ 28' 16",39} = \underline{1,910633236 \text{ rad}}$

diedro ( $180^\circ - \delta_3$ ) =  $\underline{70^\circ 31' 43",61} = \underline{1,230959417 \text{ rad}}$

$$g_4 = l \left( \frac{2+\sqrt{5}}{3} \right); \quad \delta_4 = 2 \arcsin \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right) = \arccos \left( \frac{-\sqrt{5}}{3} \right)$$

angolo fra le giaciture:  $\delta_4 = \underline{138^\circ 11' 22",87} = \underline{2,41864997 \text{ rad}}$

diedro ( $180^\circ - \delta_4$ ) =  $\underline{41^\circ 48' 37",13} = \underline{0,729727656 \text{ rad}}$

$$g_5 = l \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right) = H = 2r_i; \quad \delta_5 = 2 \arcsin(1)$$

angolo fra le giaciture:  $\delta_5 = \underline{180^\circ} = \underline{\pi \text{ rad}} = \underline{3,1415926535 \text{ rad}}$

diedro ( $180^\circ - \delta_5$ ) = 0



Distanze fra i vertici ed angoli fra le direzioni uscenti dal centro verso i vertici ( $\rho_1$ ) e fra raggi e basi.

angoli al centro:  $\omega = 2 \arcsin\left(\frac{\text{distanza fra vertici}}{2 \rho_1}\right)$

angoli fra raggi e base =  $\frac{1}{2}(180^\circ - \omega)$ .

Tetraedro ( $\rho_1 = l \frac{\sqrt{6}}{4}$ )

distanza  $l$ ;  $\omega_1 = 2 \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

angolo al centro:  $\omega_1 = 109^\circ 28' 16,39'' = 1,910633236 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180^\circ - \omega_1) = 35^\circ 15' 51,8'' = 0,615479708 \text{ rad}$

Cubo ( $\rho_1 = l \frac{\sqrt{3}}{2}$ )

distanza  $l$ ;  $\omega_1 = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

angolo al centro:  $\omega_1 = 70^\circ 31' 43,61'' = 1,230959417 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180^\circ - \omega_1) = 54^\circ 44' 08,2'' = 0,955316618 \text{ rad}$

distanza  $d = l\sqrt{2}$ ;  $\omega_2 = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

angolo al centro:  $\omega_2 = 109^\circ 28' 16,39'' = 1,910633236 \text{ rad}$

alla base  $35^\circ 15' 51,8'' = 0,615479708 \text{ rad}$

distanza  $D = l\sqrt{3}$ ;  $\omega_3 = 2 \arcsin(1)$

angolo al centro:  $\omega_3 = 180^\circ = \pi \text{ rad} = 3,1415926535 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180^\circ - \omega_3) = 0$

Ottaedro ( $\rho_1 = l\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ )

distanza  $l$ ;  $\omega_1 = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin(1)$

angolo al centro:  $\omega_1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} = 1,570796327 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180^\circ - \omega_1) = 45^\circ = \frac{\pi}{4} = 0,785398163 \text{ rad}$

distanza  $d = l\sqrt{2}$ ;  $\omega_2 = 2 \arcsin(1)$

angolo al centro:  $\omega_2 = 180^\circ = \pi = 3,1415926535 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180^\circ - \omega_2) = 0$

## Dodecaedro ( $\rho_s = l \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{4}$ )

1) distanza:  $l$  ;  $w_1 = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

angolo al centro:  $w_1 = 41^\circ 48' 37'', 13 = 0,729727656 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180-w_1) = 69^\circ 05' 41'', 43 = 1,205932499 \text{ rad}$

2) distanza:  $d_p = l \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ ;  $w_2 = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

angolo al centro:  $w_2 = 70^\circ 31' 43'', 61 = 1,230959417 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180-w_2) = 54^\circ 44' 08'', 2 = 0,955316618 \text{ rad}$

3) distanza:  $d_1 = l \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)$ ;  $w_3 = 2 \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

angolo al centro:  $w_3 = 109^\circ 28' 16'', 39 = 1,910633236 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180-w_3) = 35^\circ 45' 51'', 8 = 0,615479708 \text{ rad}$

4) distanza:  $d_2 = l \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ ;  $w_4 = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

angolo al centro:  $w_4 = 138^\circ 11' 22'', 87 = 2,411864997 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180-w_4) = 20^\circ 54' 18'', 57 = 0,364863828 \text{ rad}$

5) distanza:  $d_3 = 2\rho_s$ ;  $w_5 = 2 \arcsin(1)$

angolo al centro:  $w_5 = 180^\circ = \pi \text{ rad} = 3,1415926535 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180-w_5) = 0$

## Icosaedro ( $\rho_s = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ )

1) distanza  $l$  ;  $w_1 = 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\right) = \arctan(2)$

angolo al centro:  $w_1 = 63^\circ 26' 05'', 82 = 1,107148718 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180-w_1) = 58^\circ 16' 57'', 09 = 1,017221968 \text{ rad}$

2) distanza  $d_p = l \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ ;  $w_2 = 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$

angolo al centro:  $w_2 = 116^\circ 33' 54'', 1 = 2,034443936 \text{ rad}$

alla base  $\frac{1}{2}(180-w_2) = 31^\circ 43' 02'', 91 = 0,553574358 \text{ rad}$

3) distanza  $2\rho_s$ ;  $w_3 = 2 \arcsin(1)$

angolo al centro:  $w_3 = 180^\circ = \pi = 3,1415926535$

alla base  $\frac{1}{2}(180-w_3) = 0$

Angoli diedri nelle piramidi (angoloidi),  
che con vertice al centro e con basi le facce  
del solido, costituiscono il solido stesso.

indichiamo con  $\beta$  l'angolo diedro fra le facce  
del poliedro angoloido (piramide) e con  $\alpha$   
l'angolo diedro fra una faccia laterale della piramide  
e la base della piramide stessa, che corrisponde ad una  
faccia del solido.

---

Tetraedro  $\beta = 120^\circ$  ;  $\alpha = \frac{1}{2}(70^\circ 31' 44'') = 35^\circ 15' 52''$

Cubo  $\beta = 120^\circ$  ;  $\alpha = \frac{1}{2}(90^\circ) = 45^\circ$

ottaedro  $\beta = 90^\circ$  ;  $\alpha = \frac{1}{2}(109^\circ 28' 16'') = 54^\circ 44' 08''$

dodecaedro  $\beta = 120$  ;  $\alpha = \frac{1}{2}(116^\circ 33' 54'') = 58^\circ 16' 57''$

icosaedro  $\beta = 12^\circ$  ;  $\alpha = \frac{1}{2}(138^\circ 11' 23'') = 69^\circ 05' 42''$

---

Si noti che togliendo da  $180^\circ$  l'angolo  $\alpha$  otteniamo l'angolo  
diedro del solido al quale si può sovrapporre le piramidi  
per ottenere un'altro solido. Dal tetraedro:  $(180^\circ - 70^\circ 31' 44'') =$

$= 109^\circ 28' 16'' =$  diedro dell'ottaedro (si ottiene il rombododecaedro); Dal cubo:

$(180^\circ - 90^\circ) = 90^\circ =$  diedro del cubo (si ottiene il rombododecaedro); dall'ottaedro

$(180^\circ - 109^\circ 28' 16'') = 70^\circ 31' 44'' =$  diedro del tetraedro (si ottiene il cubo).

Angoli piani ( $\mu$ ) fra il raggio della sfera inscritta che va al centro faccia (rette di giacitura delle facce), ed il raggio della sfera circoscritta che collega il centro coi vertici del solido.  $\mu = \arccos\left(\frac{r_i}{R_o}\right)$

Tetraedro: per tre vertici  $\mu = \arccos \frac{r\sqrt{6}/12}{r\sqrt{6}/4} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70^\circ 31' 44''$   
 per un vertice  $\mu = 180^\circ$

Cubo

per 4 vertici  $\mu = \arccos\left(\frac{r/2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54^\circ 44' 08''$

per 4 vertici  $\mu = (180^\circ - \mu) = 125^\circ 15' 52''$

Ottaedro

per tre vertici  $\mu = \arccos\left(\frac{r\sqrt{6}}{r\sqrt{12}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54^\circ 44' 08''$

per tre vertici  $\mu = (180^\circ - \mu) = 125^\circ 15' 52''$

dodecaedro

per 5 vertici  $\mu = \arccos\left(\frac{r/2 \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{15}\right) = 37^\circ 22' 39''$

per 5 vertici  $\mu = (180^\circ - \mu) = 142^\circ 37' 21''$

per 5 vertici  $\mu = \mu + w_1 = 37^\circ 22' 39'' + 41^\circ 48' 37'' = 79^\circ 11' 16''$

per 5 vertici  $\mu = (180^\circ - \mu) = 100^\circ 48' 44''$

Icosaedro

per 3 vertici  $\mu = \arccos \frac{\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})/\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}/\sqrt{2}} = \arccos\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{15}\right) = 37^\circ 22' 39''$

per 3 vertici  $\mu = (180^\circ - \mu) = 142^\circ 37' 21''$

per 3 vertici  $\mu = \mu + w_1 = 37^\circ 22' 39'' + 63^\circ 26' 06'' = 100^\circ 48' 44'' \text{ ant.}$

per 3 vertici  $\mu = (180^\circ - \mu) = 79^\circ 11' 16''$

# Prospetto riepilogativo angoli nei solidi regolari

ANGOLI		Tetraedro	cubo	ottaedro	dodicaedro	icosaedro
sulle facce	fra lati adiacenti	60°	90°	60°	108°	60°
	fra lato e d <sub>1</sub>	—	45°	—	36°	—
	fra lato e d <sub>2</sub>	—	—	—	72°	—
diedri fra facce (giaciture)	adiacenti d <sub>1</sub> α <sub>1</sub> (δ <sub>1</sub> )	70° 31' 43",61 (109° 28' 16",39)	90° (90°)	109° 28' 16",39 (70° 31' 43",61)	116° 33' 54" (63° 26' 06")	138° 11' 23" (41° 48' 37")
	" (g <sub>2</sub> ) β <sub>2</sub> (δ <sub>2</sub> )	—	0 (180°)	70° 31' 43",61 (109° 28' 16",39)	63° 26' 06" (116° 33' 54")	109° 28' 16",39 (70° 31' 43",61)
	" (g <sub>3</sub> ) γ <sub>3</sub> (δ <sub>3</sub> )	—	—	0 (180°)	0 (180°)	70° 31' 43",61 (109° 28' 16",39)
	" (g <sub>4</sub> ) α <sub>4</sub> (δ <sub>4</sub> )	—	—	—	—	41° 48' 37" (138° 11' 23")
	" (g <sub>5</sub> ) β <sub>5</sub> (δ <sub>5</sub> )	—	—	—	—	0 (180°)
	" (g <sub>6</sub> ) γ <sub>6</sub> (δ <sub>6</sub> )	—	—	—	—	—
angoli piani fra le direzioni del centro ai vertici del solido (ed angoli fra direzioni e base)	μ <sub>1</sub> - w <sub>1</sub> β <sub>1</sub>	109° 28' 16",39 (35° 15' 52")	70° 31' 43",61 (54° 44' 08")	90° (45°)	41° 48' 37" (69° 05' 41")	63° 26' 06" (58° 16' 57")
	" d <sub>1</sub> - w <sub>2</sub> β <sub>2</sub>	—	109° 28' 16" (35° 15' 52")	—	70° 31' 43",61 (54° 44' 08")	—
	" d <sub>2</sub> - w <sub>3</sub> β <sub>3</sub>	—	180° (0)	180° (0)	109° 28' 16",39 (35° 15' 51",8)	116° 33' 54" (31° 43' 03")
	" d <sub>3</sub> - w <sub>4</sub> β <sub>4</sub>	—	—	—	138° 11' 23" (20° 54' 18")	180° (0)
	" d <sub>4</sub> - w <sub>5</sub> β <sub>5</sub>	—	—	—	180° (0)	—
angoli piani fra le direzioni-centro facce e solitazioni - Vertici	μ <sub>1</sub>	70° 31' 43",61	54° 44' 08"	54° 44' 08"	37° 22' 39"	37° 22' 39"
	μ <sub>2</sub>	180°	125° 15' 52"	125° 15' 52"	142° 37' 21"	142° 37' 21"
	μ <sub>3</sub>	—	—	—	79° 11' 16"	100° 48' 44"
	μ <sub>4</sub>	—	—	—	100° 48' 44"	79° 11' 16"
angoli diedri fra le facce dei poliedri angoloidi e (fra base e faccia)		120° (35° 15' 52")	120° (45°)	90° (54° 44' 08")	120° (58° 16' 57")	72° (69° 05' 42")

# quadro riepilogativo dei solidi regolari

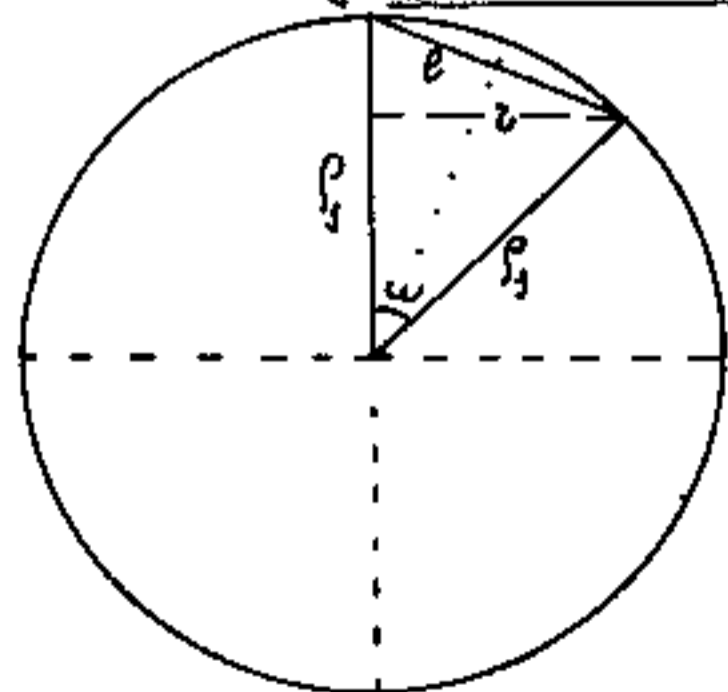
Elementi caratteristici	simbolo	TETRAEDRO	CUBO	OTTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
Facce + Vertici = spigoli + 2	$F+V=S+2$	$4+4=6+2$	$6+8=12+2$	$8+6=12+2$	$12+20=30+2$	$20+12=30+2$
spigoli	$l_1$	$= \frac{S_1 \cdot 4}{\sqrt{6}}$ $1.63299216 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot 2}{\sqrt{3}}$ $1.15470054 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{2}}{1}$ $1.41421356 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot (\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}}$ $0.71354418 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{5}$ $1.05146222 \cdot S_1$
apotema di una faccia = $\overline{TM}$	$a$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{2}}{3}$ $0.47140452 \cdot S_1$	$= \frac{S_1}{\sqrt{3}}$ $0.57735027 \cdot S_1$	$= \frac{S_1}{\sqrt{6}}$ $0.40824829 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})}}{30}$ $0.49112347 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{(5-\sqrt{5})}}{30}$ $0.20352100 \cdot S_1$
altezza di una faccia	$h_f$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{2}}{1}$ $1.41421356 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot 2}{\sqrt{3}}$ $1.15470054 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{6}}{2}$ $1.22474487 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})}}{6}$ $1.09818547 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{(5-3\sqrt{5})}}{10}$ $0.91089300 \cdot S_1$
altezza del solido	$H$	$= \frac{S_1 \cdot 4}{3}$ $1.33333333 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot 2}{\sqrt{3}}$ $1.15470054 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot 2}{2}$ $2.00000000 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot 2 \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})}}{15}$ $1.58930895 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot 2 \cdot \sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{15}$ $1.50930895 \cdot S_1$
distanza spigoli dal centro	$\overline{OM}$	$= \frac{S_1}{\sqrt{3}}$ $0.57735027 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{2}}{3}$ $0.47140452 \cdot S_1$	$= \frac{S_1}{\sqrt{2}}$ $0.70710678 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot (\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{3}}$ $0.93417236 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})}}{10}$ $0.25065081 \cdot S_1$
raggio sfera inscritta = $\overline{OT}$	$r_i$	$= \frac{S_1}{3}$ $0.33333333 \cdot S_1$	$= \frac{S_1}{\sqrt{3}}$ $0.57735027 \cdot S_1$	$= \frac{S_1}{\sqrt{3}}$ $0.57735027 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{15}$ $0.79465447 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{15}$ $0.79465447 \cdot S_1$
distanza centri facce adiacenti	$q_1$	$= \frac{S_1 \cdot 2\sqrt{6}}{9}$ $0.54433105 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{2}}{3}$ $0.47140452 \cdot S_1$	$= \frac{S_1}{2}$ $0.50000000 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{3} \cdot (\sqrt{5}+5)}{15}$ $0.83554916 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot \sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{6}$ $0.51294786 \cdot S_1$
freccia dei raggi ai centro spigoli	$\overline{MP}$	$= \frac{S_1 \cdot (1-\sqrt{3})}{3}$ $0.42264973 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot (1-\sqrt{2})}{3}$ $0.18350341 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot (1-1/\sqrt{2})}{2}$ $0.29289321 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot (1-(\sqrt{5}+1)/\sqrt{3})}{3}$ $0.06582704 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot (1-\sqrt{(5+\sqrt{5})/10})}{3}$ $0.14934912 \cdot S_1$
freccia dei raggi ai centro faccia (r) $(S_1 - r_i) \cdot 2$	$\overline{Ta}$	$= \frac{S_1 \cdot (2/3)}$ $0.66666666 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot (1-1/\sqrt{3})}{3}$ $0.42264973 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot (1-1/\sqrt{2})}{2}$ $0.29289321 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot (1-\sqrt{(5+2\sqrt{5})/15})}{3}$ $0.20534522 \cdot S_1$	$= \frac{S_1 \cdot (1-\sqrt{(5+2\sqrt{5})/15})}{3}$ $0.20534522 \cdot S_1$
angolo diedro facce adiacenti	$\angle$	$= 70^\circ 31' 44''$	$90^\circ$	$109^\circ 28' 16''$	$116^\circ 33' 54''$	$138^\circ 11' 23''$
angolo fra raggi di vertici adiacenti	$\angle$	$= 109^\circ 28' 16''$	$70^\circ 31' 44''$	$90^\circ$	$41^\circ 48' 37''$	$63^\circ 26' 06''$
angolo fra raggi vertice - centro faccia	$\angle$	$= 70^\circ 31' 44''$	$54^\circ 44' 08''$	$54^\circ 44' 08''$	$37^\circ 22' 39''$	$37^\circ 22' 39''$

# I solidi derivati e le principali forme cristallografiche

Abbiamo già dimostrato che i solidi regolari sono solo cinque e non possono essere più di cinque. Per definizione i solidi regolari hanno facce che sono poligoni regolari; il che implica che gli spigoli siano tutti uguali fra loro, e che gli angoli fra spigoli adiacenti uscenti da uno stesso vertice siano uguali fra loro. Sempre per definizione gli angoli (angoli solidi) sono uguali fra loro.

I solidi regolari sono quindi inseribili in una sfera e circoscrivono un'altra sfera concentrica

Impostiamo matematicamente il problema in generale. Sia  $\rho_1$  il raggio della sfera circoscritta, sia  $l$  lo spigolo del solido, sia  $r$  il raggio del cerchio, sezione della sfera circoscritta, sul quale terminano gli spigoli uscenti da uno stesso vertice, (cioè il cerchio dei vertici adiacenti.)



$$w = 2 \arcsin \left( \frac{l/2}{\rho_1} \right)$$

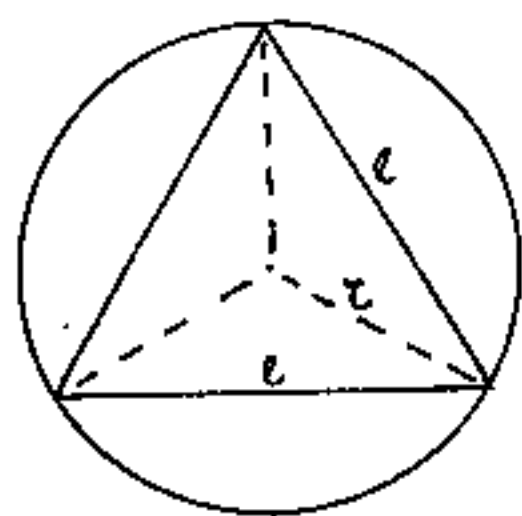
$$\cos \frac{w}{2} = \cos \arcsin \left( \frac{l/2}{\rho_1} \right) = \frac{1}{\rho_1} \sqrt{\rho_1^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$\sin \frac{w}{2} = \left( \frac{l/2}{\rho_1} \right)$$

$$\sin w = 2 \sin \frac{w}{2} \cos \frac{w}{2} = \frac{l}{\rho_1^2} \sqrt{\rho_1^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$r = \rho_1 \sin w = \boxed{r = \frac{l}{\rho_1} \sqrt{\rho_1^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

Nella circonferenza di raggio  $r$  possiamo inscrivere dei poligoni regolari. (Un vertice è il centro del cerchio)  
 Se inscriviamo un triangolo di lato  $l$  si ha:

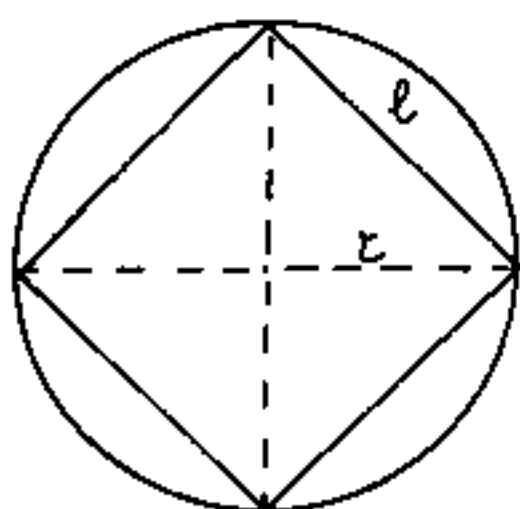


$$r = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{l}{r_3} \sqrt{r_3^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \quad \text{da cui:}$$

$$\boxed{l = 2r_3 \sqrt{3/3}}$$

abbiamo calcolato che ciò si verifica per il tetraedro (se il lato del triangolo è  $l\sqrt{2}$ , si ha il cubo; se è  $dp = \frac{l}{2}(\sqrt{5}+1)$  si ha il dodecaedro)

Se nel cerchio inscriviamo un quadrato



di lato  $l$  si ha:  $r = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{l}{r_4} \sqrt{r_4^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

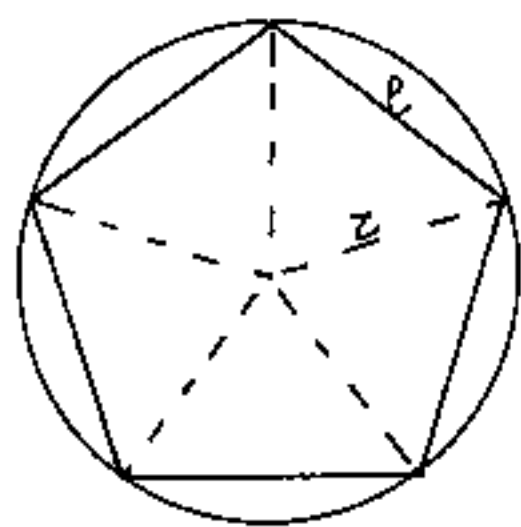
$$r_4 = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{l = r_4 \sqrt{2}}$$

e questo

si verifica per l'ottaedro.

Se nel cerchio inscriviamo un pentagono di lato  $l$  abbiamo:



$$r = l \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \frac{l}{r_5} \sqrt{r_5^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$(5+\sqrt{5})r_5^2 = 10r_5^2 - \frac{5}{2}l^2$$

$$\boxed{l = r_5 \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}$$

ciò vale per l'icosaedro

Se inscriviamo un esagono di lato  $l$  avremmo:

$$r = l = \frac{l}{r_6} \sqrt{r_6^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}; \quad \underline{r_6^2 = r_6^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \quad \text{impossibile! vale solo per } l=0$$



Quindi solidi convessi inscrivibili in una sfera, aventi le facce triangoli equilateri sono solo tre: il tetraedro, l'ottaedro, l'icosaedro.

Consideriamo ora che agli estremi opposti dei tre spigoli uscenti da un vertice, vi sia una diagonale di faccia. Se la faccia è un quadrato, la diagonale è  $l\sqrt{2}$  da cui  $r = \frac{1}{\sqrt{3}}(l\sqrt{2}) = \frac{l}{\rho} \sqrt{\rho^2 - (\frac{l}{2})^2}$  da cui:  $\frac{2}{3}\rho^2 = \rho^2 - \frac{l^2}{4}$ ,  $\rightarrow$   $\boxed{l = 2\rho/\sqrt{3}}$  che si verifica per il cubo.

Se gli spigoli uscenti da un vertice sono 4 si ha:  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}(l\sqrt{2})$ , cioè  $r = l$  (che abbiamo riscontrato impossibile).

Consideriamo ora che agli estremi opposti dei tre spigoli uscenti da un vertice vi sia la diagonale di un pentagono  $d_p = \frac{l}{2}(\sqrt{5}+1)$  da cui  $r = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{l}{2}(\sqrt{5}+1)) = \frac{l}{\rho} \sqrt{\rho^2 - (\frac{l}{2})^2}$   $\rightarrow$   $\frac{6+2\sqrt{5}}{12}\rho^2 = \rho^2 - \frac{l^2}{4}$   $\rightarrow$   $l = \frac{2\rho}{3}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3}}$ ;  $\boxed{l = \frac{2\rho}{3}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}\right)}$  che vale per il dodecaedro.

Se agli estremi dei tre spigoli c'è la diagonale minore dell'esagono  $d_f = l\sqrt{3}$ ;  $r = \frac{1}{\sqrt{3}}(l\sqrt{3})$ ;  $r = l$  che abbiamo visto essere impossibile.

Quindi solidi convessi aventi gli spigoli tutti uguali ed inscrivibili in una sfera sono solo i solidi regolari

## I solidi derivati inscrittibili e non inscrittibili in una sfera

Consideriamo un tetraedro inscritto in una sfera, prolungiamo il segmento che unisce il centro della sfera con il centro della faccia del tetraedro fino ad incontrare la superficie sferica, e sia questo il vertice di una piramide che ha per base la faccia del tetraedro e per altezza:  $(\rho_s - r_i)$ , ove  $\rho_s$  ed  $r_i$  sono rispettivamente i raggi della sfera circoscritta ed inscritta nel tetraedro

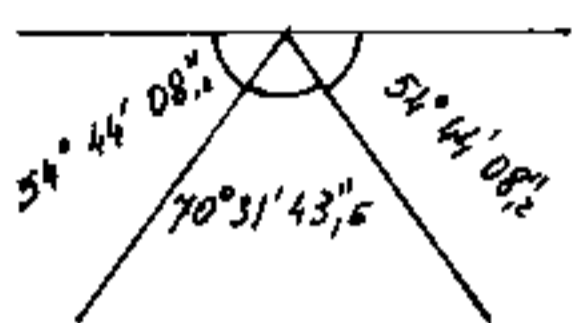
$$\rho_s = \frac{l}{\sqrt{6}} ; \quad r_i = \frac{l}{12}\sqrt{6} ; \quad \boxed{\rho_s - r_i = \frac{l}{\sqrt{6}}} \quad \text{detto } l_2 \text{ lo spigolo di}$$

queste piramidi abbiamo:  $l_2^2 = \left(\frac{2}{3} \frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{6}}\right)^2 = l^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$

$$\boxed{l_2 = \frac{l}{\sqrt{2}}} \quad \text{od anche: } \boxed{l = l_2 \sqrt{2}} \quad \text{ciò implica che}$$

gli angoli al vertice, di queste piramidi, sono retti, e quindi queste piramidi aggiunte al tetraedro sono identiche alle porzioni di angoloide che costituiscono l'ottaedro. Ciò si è già visto, ed il solido che nasce è un cubo. Infatti i vertici del tetraedro sono 4, i vertici che nascono dalle facce sono altri quattro, gli otto vertici sono equidistanti fra loro e dal centro sfera, o meglio gli spigoli a due a due formano angoli retti di cui lo spigolo del tetraedro è diagonale, cioè le facce sono quadrate.

L'angolo diedro fra la base e le facce di queste piramidi è:  $\arctg\left(\frac{S_1 - r_1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right) = \arctg\left(\frac{l/\sqrt{6}}{l\sqrt{3}/6}\right) = \arctg\left(\frac{6}{3\sqrt{2}}\right) =$   
 $= \arctg(\sqrt{2}) = 54^\circ 44' 08,2''$ ; l'angolo diedro fra le facce del tetraedro è:  $70^\circ 31' 43,6''$ , cosicché l'angolo fra



le facce delle piramidi che hanno in comune alla base lo stesso spigolo del tetraedro sarà:

$$\underline{2(54^\circ 44' 08,2'') + 70^\circ 31' 43,6'' = 180^\circ};$$

cioè le due facce sono allineate e formano una faccia quadrata del cubo.

Prima di proseguire ricordiamo il significato di alcuni termini. Il prefisso: "Cis", contrapposto al prefisso: "trans", significa: "al di qua"; mentre "trans" significa: "al di là". (per es. Cisalpina, transalpina).

Nei solidi (riferendosi ad un solido regolare come base) si usa scrivere (per es.): "triacistetraedro" intendendo che: "al di qua" (al di sopra) delle facce del tetraedro vi sono "tria" (tre facce); cioè il solido avrà:  $4 \times 3 = 12$  facce. Analogamente il termine: "triacisottaedro" vuol dire che sopra le facce dell'ottaedro si sono tre facce, cioè su ogni faccia vi è sovrapposta una piramide a base triangolare uguale alla faccia dell'ottaedro, ed il totale facce sarà:  $3 \times 8 = 24$ .

È ovvio che questa terminologia è incompleta, perché le piramidi, a base triangolare identica alle facce del tetraedro, dell'ottaedro, dell'icosaedro, sono infinite; e fra esse vi sono quelle che hanno allineate le facce con la piramide adiacente, esattamente, come abbiamo visto ricoprendo il tetraedro con gli angoloidi (piramidi) che costituiscono l'ottaedro, ottenendo il cubo (sei facce e non  $3 \times 4 = 12$ ). Analogamente ricoprendo l'ottaedro con gli angoloidi (piramidi) che costituiscono il tetraedro otteniamo il rombododecaedro (12 facce e non  $3 \times 8 = 24$ ).

Ricoprendo il cubo con piramidi a base quadrata otteniamo i tetracisesaedri ( $4 \times 6 = 24$  facce), ma se le piramidi a base quadrata sono quelle che costituiscono il cubo stesso, si ottiene ancora il "rombododecaedro" (12 facce e non  $4 \times 6 = 24$ ). Ove il lato del cubo è la diagonale minore del rombo e la diagonale di una faccia del cubo equivale alla diagonale maggiore del rombo, ed allo spigolo del tetraedro.

Per definire il "triacistetraedro" non possiamo avvalerci della condizione che sia inscrittibile in una sfera perché, come abbiamo visto, si ottiene un cubo; quindi definiremo il "triacistetraedro" il solido ottenuto sovrapponendo alle facce del tetraedro piramidi tali da sottostare ad altre condizioni.

# IL TRIACISTETRAEDRO

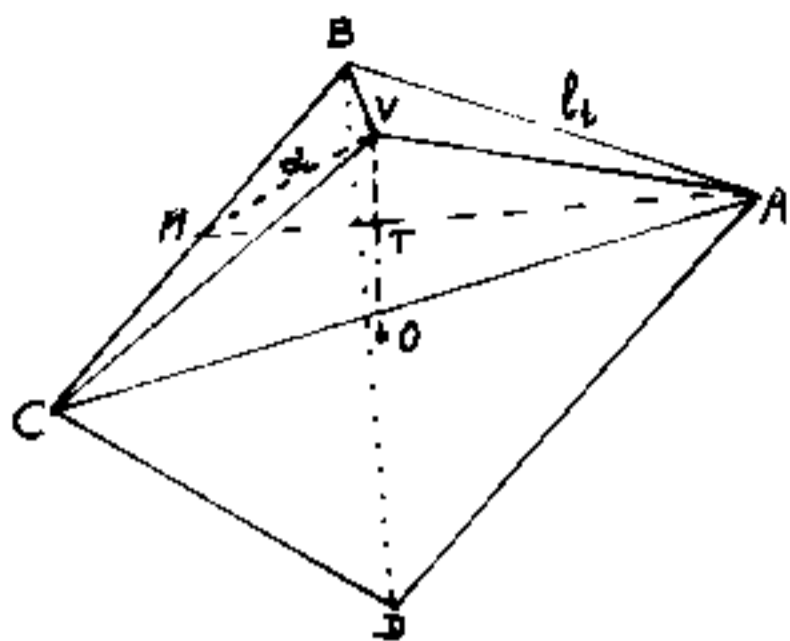
Consideriamo quindi il solido ottenuto dal tetraedro sovrapponendo, alle facce dello stesso, delle piramidi aventi per base, la faccia del tetraedro, e per vertice un punto "al di qua" della faccia stessa.

Queste dizioni non consentono di individuare un solido, perché le posizioni del vertice sono infinite. Vediamo di precisarle con alcune condizioni:

1) Le facce aggiunte, che saranno le facce del triacistetraedro debbono essere tutte uguali.

Ciò implica che il vertice  $V$  della piramide debba insistere sul prolungamento del raggio  $r_i = OT$  della sfera inscritta nel tetraedro, ove  $T$  è il punto di tangenza con la faccia del tetraedro. Quindi:  $\overline{TV}$  è l'altezza della piramide aggiunta. Sia:  $\overline{TV} = K l_t$  ove  $l_t$  è lo spigolo del tetraedro, e  $K$  un coefficiente numerico, con  $K < 0$  il vertice è interno al tetraedro;  $K = 0$ , si ha il tetraedro stesso,  $K > 0$  il vertice è esterno al tetraedro.

Consideriamo il nostro  $K$  come un parametro per individuare il solido, e calcoliamo in funzione di  $K$  gli elementi del triacistetraedro.



Sia ABCD il tetraedro,

ove:  $l_t = AB = AC = AD = BC = BD = CD$

$\overline{OV_3} = r_3 = l_t \sqrt{6}/4 =$  sfera circoscritta

$\overline{OT} = r_i = l_t \sqrt{6}/12 =$  " inscritta

$\overline{TV} = K l_t$ ;  $TV_3 = l_t/\sqrt{6}$ ;  $K_3 = 1/\sqrt{6}$

$a = \overline{MV} = l_t \sqrt{K^2 + \frac{1}{12}}$ ;  $a = \frac{l_t}{2} \sqrt{\frac{1+12K^2}{3}}$

$$s = \overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = \sqrt{\overline{VT}^2 + \overline{TA}^2} = l_t \sqrt{K^2 + \frac{1}{3}} = \boxed{s = l_t \sqrt{\frac{1+3K^2}{3}}}$$

angoli piani delle facce:

a) vertice  $(\widehat{BVC}) = 2 \arcsen\left(\frac{l_t/2}{s}\right) = 2 \arcsen\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1+3K^2}}\right)$

alla base  $(\widehat{CBV}) = \arccos\left(\frac{l_t/2}{s}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1+3K^2}}\right)$

angoli diedri:

fra faccia e base delle piramidi  $= (\widehat{VMT}) = \alpha_1 = \arctg\left(\frac{\overline{TV}}{\overline{TM}}\right) =$   
 $\boxed{\alpha_1 = \arctg(2K\sqrt{3})} = \underline{\arctg(K\sqrt{6})}$

fra facce aventi in comune  $l_t$ :

$$\widehat{D}_{l_t} = 2\alpha_1 + \text{diedro del tetraedro}$$

$$\boxed{\widehat{D}_{l_t} = 2 \arctg(K\sqrt{6}) + \arctg(\sqrt{3})}$$

fra facce aventi in comune  $s$ :

$$\widehat{D}_s = 2 \arcsen\left(\frac{l_t/2}{h_s}\right) \quad (h_s = \text{altezza su } s: h_s = \frac{l_t \cdot a}{s} = \frac{l_t}{2} \sqrt{\frac{1+12K^2/3}{1+3K^2}})$$

$$\boxed{\widehat{D}_s = 2 \arcsen\left(\sqrt{\frac{1+3K^2}{1+12K^2}}\right)}$$

Ora possiamo imporre un'altra condizione che definisca univocamente il solido; (cio' equivale a definire un particolare  $\kappa$ ). Poniamo la condizione:

2) Gli angoli diedri siano uguali. ( $\hat{D}_6 = \hat{D}_3$ )

$$2 \operatorname{arctg}(\kappa\sqrt{12}) + \operatorname{arctg}(\sqrt{8}) = 2 \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{1+3\kappa^2}{1+12\kappa^2}}\right) = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3\kappa^2}}{3\kappa}\right)$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3\kappa^2}}{3\kappa}\right) - \operatorname{arctg}(\kappa\sqrt{12}) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{8}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

cioè:  $\frac{1}{2}(\hat{D}_3 - \alpha_1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{35^\circ 15' 51",8}$

$$\operatorname{tg}(\hat{D}_3 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \hat{D}_3 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \hat{D}_3} = \frac{(\sqrt{1+3\kappa^2}/3\kappa) - (\kappa\sqrt{12})}{1 + (\kappa\sqrt{12})(\sqrt{1+3\kappa^2}/3\kappa)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sqrt{2}\sqrt{1+3\kappa^2} - 6\sqrt{6} = 3\kappa + 2\sqrt{3}\kappa\sqrt{1+3\kappa^2}$$

$$(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\kappa)\sqrt{1+3\kappa^2} = 3\kappa + 6\sqrt{6}\kappa^2 \text{ elevando a quadrato e semplificando:}$$

$$180\kappa^4 + 48\sqrt{6}\kappa^3 - 9\kappa^2 + 4\sqrt{6}\kappa - 2 = 0 \text{ (equazione di 4° grado)}$$

scomponibile in:  $(180\kappa^3 + 15)(\kappa^2 + \frac{4}{15}\sqrt{6}\kappa - \frac{2}{15}) = 0$

Il primo fattore dà due radici immaginarie  $\pm i\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$ ;

il secondo fattore dà due radici reali  $\kappa = \begin{cases} +\sqrt{6}/15 \rightarrow \kappa^2 = \frac{2}{15} \\ -\sqrt{6}/3 \rightarrow \kappa^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

Verifichiamo l'equazione per  $\kappa = \sqrt{6}/15$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3\kappa^2}}{3\kappa}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{81/75}}{\sqrt{6}/15}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 64^\circ 45' 38",15 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{D}_3\right)$$

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{12}\kappa) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{12} \cdot \frac{\sqrt{6}}{15}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{8}}{5}\right) = 29^\circ 29' 46",35 = (\alpha_1)$$

$$\underline{\underline{35^\circ 15' 51",8}}$$

angoli diedri:

alla base biamidi =  $2\alpha_1 = 58^\circ,99241699$

spigolo tetraedro =  $70^\circ,52877937$

$$\hat{D}_6 = 129^\circ,52119636;$$

$$\hat{D}_3 = 2(64^\circ 45' 38",15)$$

$$\hat{D}_6 = 129^\circ 31' 16",30$$

$$\hat{D}_3 = 129^\circ 31' 16",30$$

verifichiamo l'equazione con la seconda radice ( $\kappa = \frac{\sqrt{6}}{3}$ )

$$\arctg\left(\frac{\sqrt{1+3\kappa^2}}{3\kappa}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{6}}\right) = \arctg\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 144,7356103 = \left(\frac{1}{2}\hat{D}_3\right)$$

$$\arctg(\sqrt{12}\kappa) = \arctg(-\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}) = \arctg(-\sqrt{8}) = 109,4712206 = (\alpha_1)$$

$$\underline{\underline{35,26438967 = 35^\circ 15' 51,8''}}$$

### angoli diedri

alla base delle piramidi =  $(2\alpha_1) = 218,9424413$

allo spigolo del tetraedro =  $70,52877937$

$$\hat{D}_{L_4} = 289,4712206$$

$\hat{D}_{L_4} = 289^\circ 28' 16,3''$
$\hat{D}_3 = 289^\circ 28' 16,3''$

$$\hat{D}_3 = 2(144,7356103)$$

$$=$$

Trattandosi di angoli diedri maggiori di  $180^\circ$  sono angoli che presentano concavità verso l'esterno, del resto  $\kappa$  negativo indica che il vertice  $V$  anziché sollevarsi sul punto  $T$  della faccia, entra nel tetraedro, altrimenti non avrebbe senso un'altezza ( $\overline{TV} = \kappa l_4$ ) negativa delle piramidi aggiunte. (sottratte?). L'argomento sarà meglio chiarito quando dimostreremo che fissati gli otto vertici di un triacistetraedro convesso, se togliamo gli spigoli del tetraedro iniziale e aggiungiamo i segmenti che uniscono i vertici delle piramidi, si ottiene un'altro triacistetraedro concavo avente gli stessi vertici, ma diverso  $\kappa$ .



Calcoliamo gli elementi del triacistetraedro  
a diedri uguali. ( $\kappa = \sqrt{6}/15$ ).

$$\overline{TV} = \sqrt{6}/15 l_t \quad \text{ove } l_t = \text{lato o spigolo del tetraedro.}$$

diedri:  $\hat{D}_{l_t} = \hat{D}_s = 129^\circ 31' 16",3$  (convessi)

spigoli delle piramidi:  $s = \sqrt{\overline{TA}^2 + \overline{TV}^2} = \sqrt{\left(\frac{l_t}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{l_t \sqrt{6}}{15}\right)^2} =$

$$s = \sqrt{l_t^2 \left(\frac{25+2}{3 \cdot 25}\right)} \quad \boxed{s = \frac{3}{5} l_t}$$

apotema delle facce:  $a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_t}{2}\right)^2} = l_t \sqrt{\frac{9}{25} - \frac{1}{4}} =$

$$a = l_t \sqrt{\frac{36-25}{100}}; \quad \boxed{a = \frac{l_t}{10} \sqrt{11}}$$

distanza fra i vertici di due piramidi:  $l_v = 2a \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{D}_{l_t}}{2}\right)$

$$l_v = 2 \frac{l_t}{10} \sqrt{11} \operatorname{sen}\left(\arctg \frac{3}{\sqrt{11}}\right) = l_t \left(\frac{\sqrt{11}}{5}\right) \left(\frac{3/\sqrt{11}}{\sqrt{1+(3/\sqrt{11})^2}}\right) =$$

$$l_v = l_t \frac{\sqrt{11}}{5} \frac{3}{\sqrt{2+9}} = l_t \frac{\sqrt{11}}{5} \frac{3}{\sqrt{11}} =$$

$$\boxed{l_v = \left(l_t \frac{3}{5}\right) = s}$$

Superficie laterale:  $S = (12) \frac{1}{2} (l_t \cdot a) =$

$$S = l_t^2 \frac{6}{10} \sqrt{11} \quad \boxed{S = l_t^2 \frac{3}{5} \sqrt{11}}$$

Volume:  $V = \text{volume tetraedro} + \text{volume 4 piramidi} =$

$$V = l_t^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right) + 4 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{l_t^2}{4} \sqrt{3}\right) \left(\frac{\sqrt{6}}{15} l_t\right) = l_t^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{15}\right) = l_t^3 \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) =$$

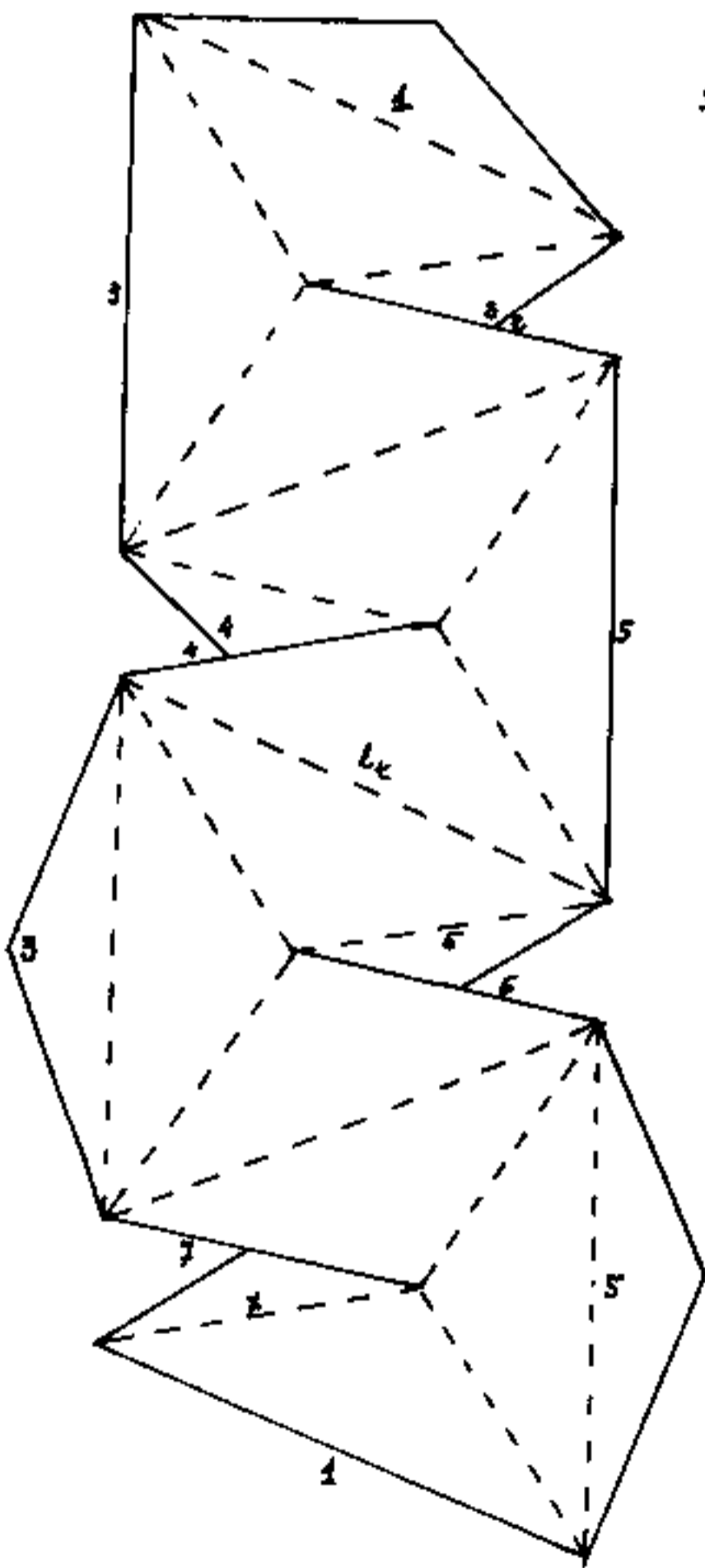
$$\boxed{V = l_t^3 \frac{3}{20} \sqrt{2}}$$

angoli delle facce:

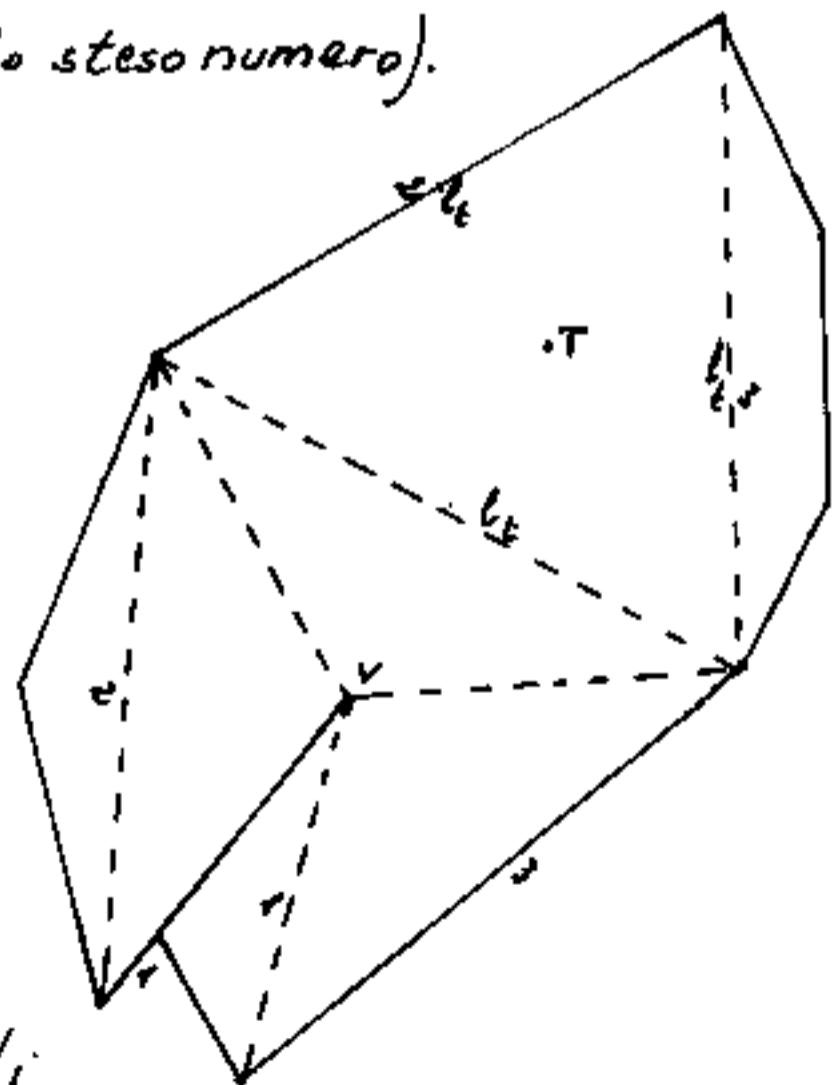
al vertice  $2 \arccos\left(\frac{lt}{2s}\right) = 2 \arccos\left(\frac{5}{6}\right) = 112^\circ, 8853805$   
 $\hat{V} = \underline{\underline{112^\circ 53' 07'', 37}}$

alla base  $\arccos\left(\frac{5}{6}\right) = \underline{\underline{33^\circ, 55730976}} = \underline{\underline{30^\circ 33' 26'', 315}}$

Sviluppo del triacistetraedro  
a diedri uguali ( $\kappa = \sqrt{6}/15$ )

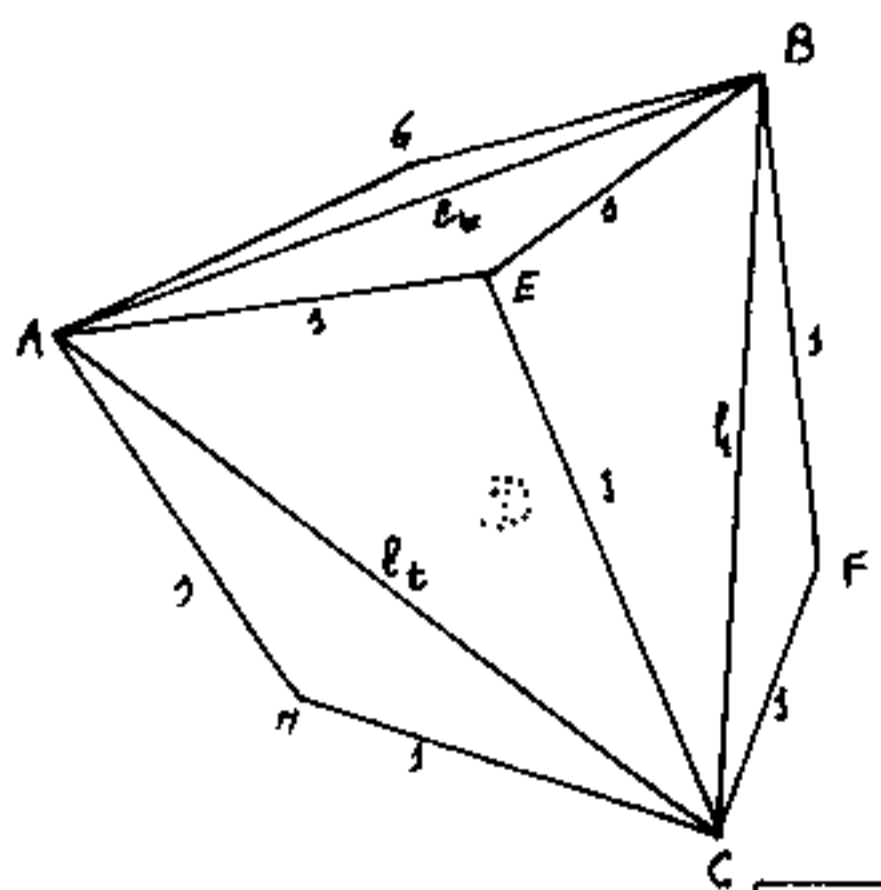


tagliare lungo le linee inte  
re, piegare lungo le linee  
tratteggiate, incollare le  
linguette facendo combaciare  
e gli spigoli omonimi. (con  
lo stesso numero).



si è fatto anche lo sviluppo di  
una delle 4 piramidi da sovrapporre al tetraedro.  $\overline{TV} = \kappa l_2$

Sovrapponendo alle facce del tetraedro le piramidi di angoli di  $\frac{\pi}{4}$  che costituiscono il tetraedro stesso, otteniamo un nuovo triacistetraedro in cui lo spigolo  $s = \frac{\pi}{4} H$  (ove  $H = \frac{l\sqrt{6}}{3}$  è l'altezza del tetraedro), cioè  $s = \frac{l\sqrt{6}}{4}$  è lo spigolo delle piramidi sovrapposte.



L'altezza delle piramidi aggiunte  $TV = H/4 = \frac{l\sqrt{6}}{12}$  cioè:

$$k = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

gli angoli diedri

$$\hat{D}_3 = 120^\circ; \quad \hat{D}_4 = \frac{2D_t}{2} + D_t$$

ove  $D_t = 70^\circ 31' 44''$  è il diedro del tetraedro e  $\frac{D_t}{2}$  il diedro fra la base e le facce delle

piramidi aggiunte;  $D_{l_t} = 141^\circ 03' 28''$ . Il volume del solido è ovviamente il doppio del volume del tetraedro

$$2 \left( \frac{l^3 \sqrt{6}}{12} \right) = \frac{l^3 \sqrt{6}}{6}; \quad \text{l'apotema } a = \frac{l\sqrt{2}}{4} \quad \text{l'area laterale è}$$

$$S' = \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) l^2 \quad \text{gli angoli delle facce: } \hat{\alpha} \text{ al vertice} = 109^\circ 38' 16''$$

$$\hat{\alpha} \text{ alla base} = 35^\circ 15' 52'' \quad \text{I quattro vertici delle piramidi}$$

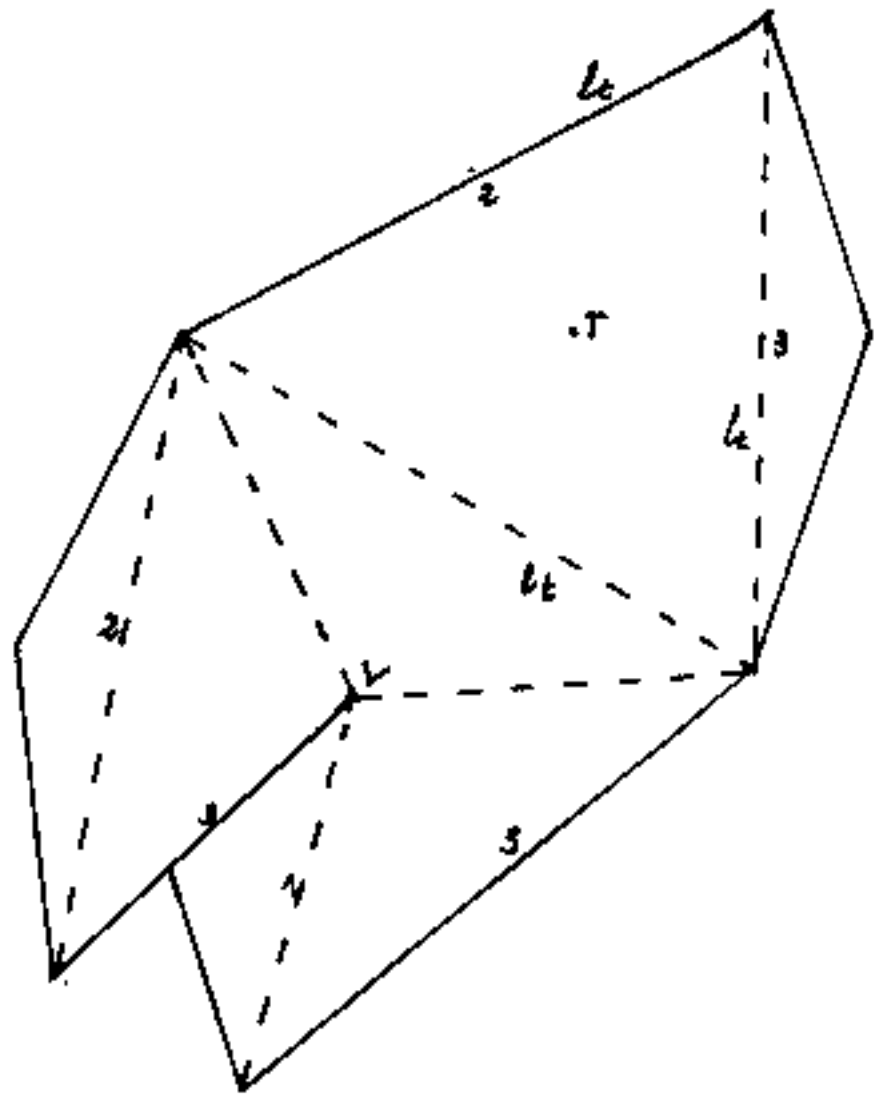
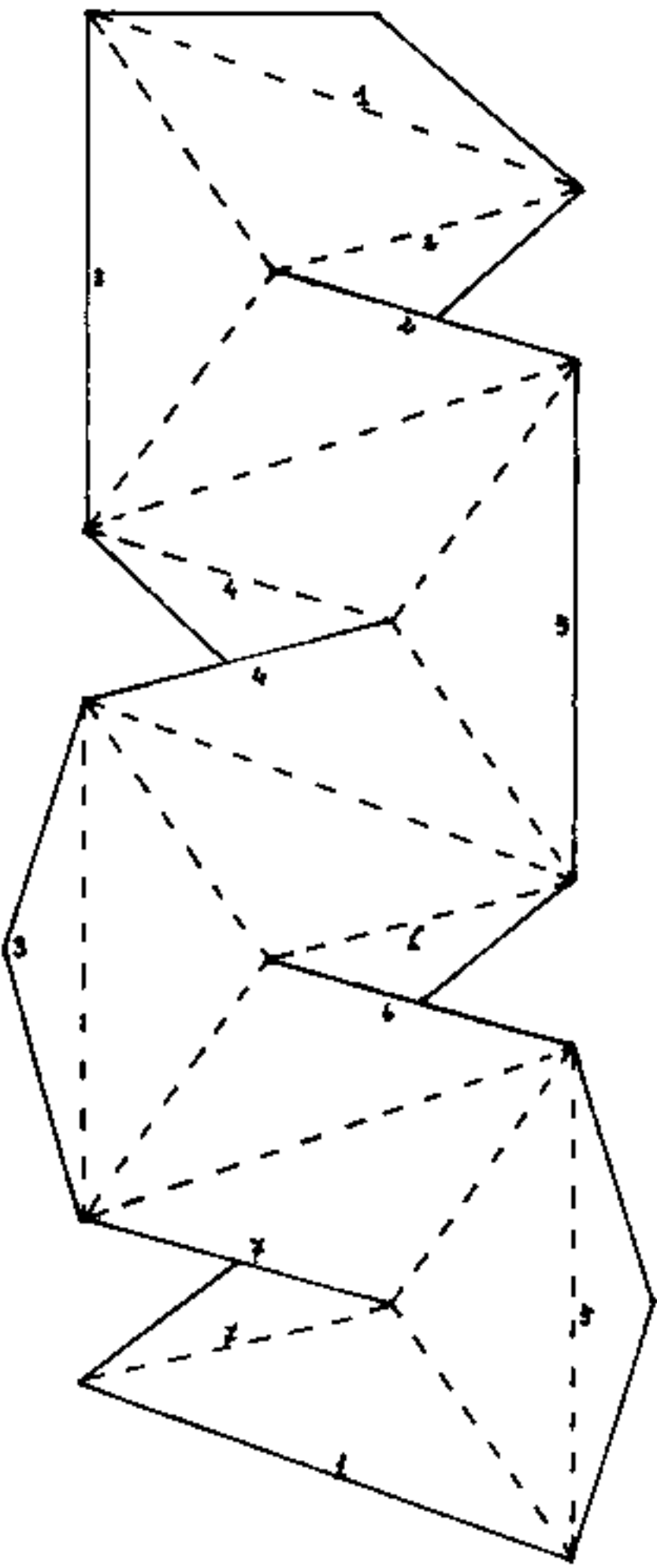
aggiunte, in figura sono: E, F, G, H.

Aumentando gradatamente l'altezza delle piramidi aggiunte (aumentando  $k$ ) aumenta l'angolo diedro  $\hat{D}_4$  e diminuisce l'angolo diedro  $\hat{D}_3$ . Si è già visto che quando  $\hat{D}_4 = 180^\circ$  il solido triacistetraedro diventa un cubo.

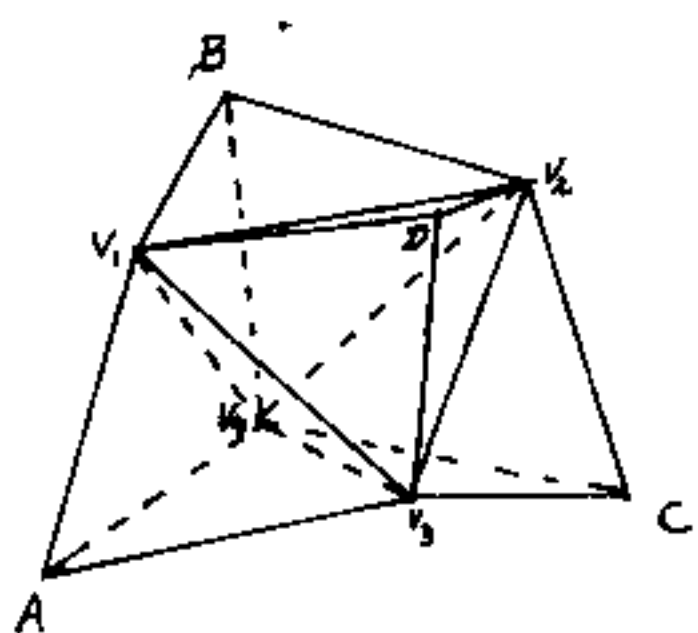
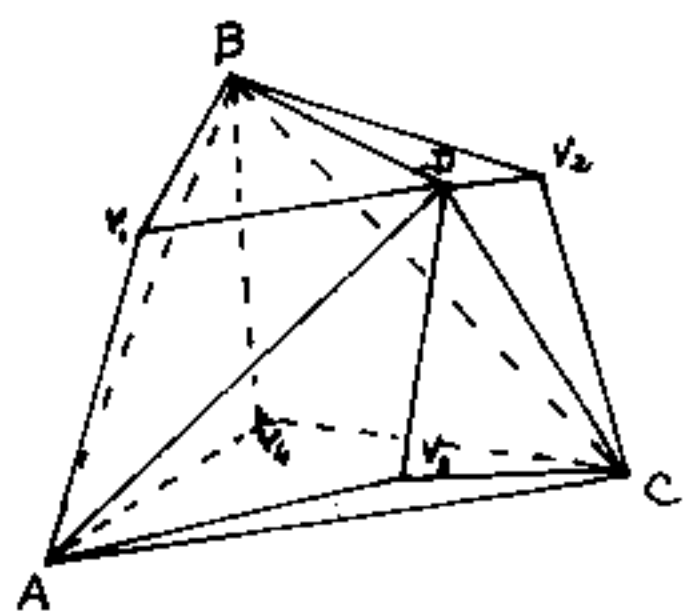
Sviluppo del triacistetaedro ottenuto con l'aggiunta delle piramidi angoloidi che costituiscono il tetraedro stesso. (Solido convesso del volume doppio del tetraedro base). ( $K = \frac{\sqrt{6}}{12}$ )

Si disegna anche lo sviluppo di una delle quattro piramidi aggiunte, al tetraedro.

Facendo otto modellini di queste piramidi possiamo con 4 fare il tetraedro base e con le altre 4 aggiunte fare il triacistetaedro. Se aggiunte alle 8 facce di un ottaedro si ottiene il rombododecaedro.

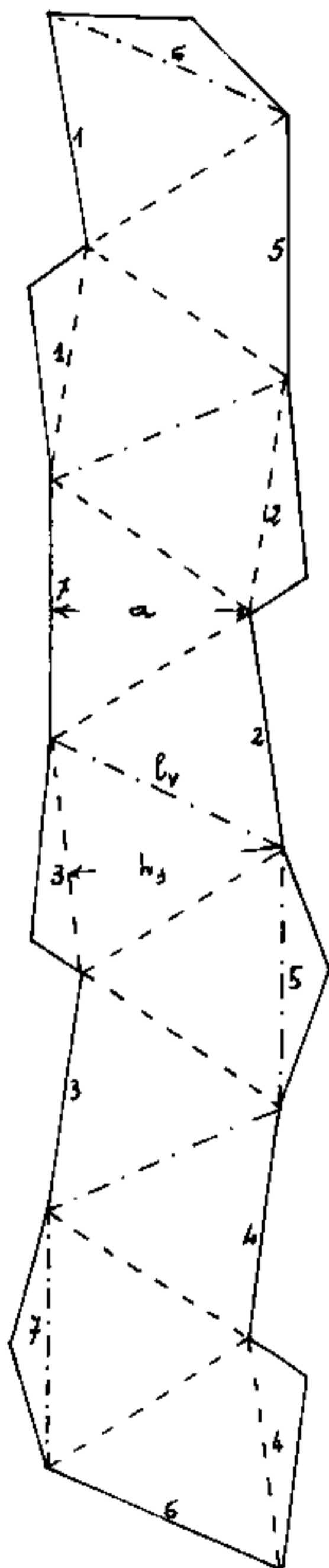


È opportuno rilevare subito che, aggiunte le piramidi alle facce del solido base, fermi restando i vertici del solido base e delle piramidi aggiunte, cioè resa immutabile la loro reciproca posizione, e anziché congiungere tali vertici con gli spigoli del solido base, congiungiamo fra loro i vertici delle piramidi adiacenti, otteniamo un altro solido che ha gli stessi vertici, lo stesso numero di facce triangoli isosceli con gli stessi lati obliqui ma con diversa base (anziché lo spigolo del solido base, si ha la distanza fra due vertici). Se il solido base era un tetraedro anche i segmenti congiungenti i vertici delle piramidi danno un nuovo tetraedro (di dimensioni diverse).



Nelle due figure, al tetraedro di vertici A, B, C, D, si sono aggiunte le sue piramidi angolari ottenendo i vertici  $V_1, V_2, V_3, V_4$ ; ferme restando le posizioni mutue di tutti i vertici, nella seconda figura si sono collegati fra loro i vertici delle piramidi, anziché i vertici del tetraedro base.

Riportiamo, lo sviluppo del solido di cui alla seconda figura, della prima ne abbiamo già dato lo sviluppo. (Abbiamo, per i due sviluppi, assunto lo stesso tetraedro base, per dimostrare che i vertici sono gli stessi). Quindi  $l_t$ , ed  $s = l_t \sqrt{6}/4$ , restano invariati. Sia  $l_v$  la distanza fra i vertici delle piramidi aggiunte cioè:  $\overline{V_1 V_2}$



$$\overline{V_1 V_3} = \overline{V_1 V_4} = \overline{V_2 V_3} = \overline{V_2 V_4} = \overline{V_3 V_4} = l_t \frac{2x_i}{\rho} = \boxed{l_v = \frac{2}{3} l_t}$$

Si noti che  $l_v$  è anche lo spigolo di un nuovo tetraedro, sulla base del quale calcoliamo le caratteristiche:  $s = l_v \frac{3\sqrt{6}}{8}$ ;  $a = \frac{l_v \sqrt{38}}{3}$

$$\overline{TV} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_v}{\sqrt{3}}\right)^2} = \boxed{\overline{TV} = \left(\frac{7\sqrt{6}}{24}\right) l_v}; \quad (K = \frac{7\sqrt{6}}{24}) = 0,44634508$$

$$\boxed{h_s = \frac{l_v \sqrt{19}}{3}} \quad (\text{altezza delle facce rispetto ad } s)$$

### Angoli delle facce

al vertice :=  $2 \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{56}}\right) = \underline{65^\circ 57' 28,53}$

alla base :=  $\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{56}}\right) = \underline{57^\circ 01' 15,74}$

### Angoli diedri

$$\hat{D}_4 = 2 \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{38}}\right) = \underline{153^\circ 28' 28,7} \quad (\text{concavo})$$

$$\hat{D}_3 = 2 \arcsin\left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{19}}\right) = \underline{73^\circ 10' 24,78}$$

Tagliare lungo la linea intera, piegare concavo

le linee a tratto e punto, piegare con-

verso le linee a tratteggio, incollare le linguette su spigoli omonimi.

Abbiamo già trattato la condizione per cui quattro punti, nello spazio tridimensionale siano complanari. Nel nostro caso gli otto vertici:  $A, B, C, D, V_1, V_2, V_3, V_4$  danno luogo ai seguenti quadrilateri:  $AV_1BV_2$ ;  $AV_1CV_3$ ;  $AV_2DV_3$ ;  $BV_1CV_4$ ;  $BV_2DV_4$ ;  $CV_3DV_4$ ; i cui lati sono gli spigoli "s" delle piramidi aggiunte, mentre le congiungenti vertici opposti sono  $l_t$  ed  $l_v$ . (Non possiamo chiamare diagonali  $l_t$  ed  $l_v$  perché i quadrilateri non sono piani). Quando, aumentando  $\overline{TV}$  si ha:  $l_t = l_v$  il solido triacistetraedro diventa un cubo, è inscrittibile in una sfera, ed è il limite dei triacistetraedri convessi. Continuando ad aumentare  $\overline{TV}$  i solidi diventano concavi. (Ricordiamo che a parità di  $l_t$ , aumentare  $\overline{TV}$  significa aumentare  $K = \frac{\overline{TV}}{l_t}$ ). Cioè  $l_v$  è diventato maggiore di  $l_t$ ; ed a parità di spigoli "s" (lati del quadrilatero) scambiare  $l_t$  con  $l_v$  significa passare da un triacistetraedro convesso ad uno concavo o viceversa. (Dipende da  $K$  se  $K > \frac{1}{\sqrt{6}}$ ; ove  $\frac{l_t}{\sqrt{6}} = \frac{l_v}{\sqrt{6}} = \overline{TV}$  del cubo). Cerchiamo la correlazione fra i  $K$  dei due solidi, a tal fine, detto  $K_1$  il  $K$  del primo solido, avremo:  $\overline{TV} = K_1 l_t$ ;  $\overline{TA} = K_2 l_v$   
 $l_v = 2a \operatorname{sen} \left( \frac{\widehat{D_2}}{2} \right) = 2a \operatorname{sen} \left( \arctg(K_1 \sqrt{2}) + \arctg \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = 2a \operatorname{sen} \left( \arctg \left( \frac{K_1 \sqrt{2} + 1/\sqrt{6}}{1 - K_1 \sqrt{6}} \right) \right)$ ;

$$\tan(\hat{D}_{u/2}) = \frac{K_1 \sqrt{12} + 1/\sqrt{2}}{1 - K_1 \sqrt{6}}; \quad \text{da cui:}$$

$$\sin(\hat{D}_{u/2}) = \frac{(K_1 \sqrt{12} + 1/\sqrt{2}) / (1 - K_1 \sqrt{6})}{\sqrt{1 + \left(\frac{K_1 \sqrt{12} + 1/\sqrt{2}}{1 - K_1 \sqrt{6}}\right)^2}} = \frac{(K_1 \sqrt{12} + 1/\sqrt{2})}{\sqrt{1 + K_1^2 \cdot 6 - 2K_1 \sqrt{6} + K_1^2 \cdot 12 + \frac{1}{2} + 2K_1 \sqrt{6}}}$$

$$\sin(\hat{D}_{u/2}) = \frac{(K_1 \sqrt{12} + 1/\sqrt{2})}{\sqrt{18K_1^2 + 3/2}} = \frac{K_1 \sqrt{24} + 1}{\sqrt{3} \sqrt{(K_1 \sqrt{12})^2 + 1}} = \frac{2K_1 \sqrt{6} + 1}{\sqrt{3} \sqrt{12K_1^2 + 1}};$$

$$a = \frac{l_t}{2} \sqrt{\frac{12K_1^2 + 1}{3}} \quad \text{per cui:} \quad l_v = l_t \sqrt{\frac{12K_1^2 + 1}{3}} \cdot \frac{2K_1 \sqrt{6} + 1}{\sqrt{3} \sqrt{12K_1^2 + 1}} =$$

$$l_v = l_t \left( \frac{2K_1 \sqrt{6} + 1}{3} \right)$$

$$s = l_t \sqrt{\frac{1 + 3K_1^2}{3}}$$

Le altezze delle nuove piramidi ottenute utilizzando  $l_v$  anziché  $l_t$  sono  $\overline{T_2 A} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_v}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{l_t^2}{3}(1 + 3K_1^2) - \frac{l_v^2}{3}} =$

$$\overline{T_2 A} = \sqrt{\frac{l_t^2}{3}(1 + 3K_1^2) - \frac{1}{3} l_t^2 \left(\frac{24K_1^2 + 1 + 4K_1 \sqrt{6}}{9}\right)} = \frac{l_t}{3} \sqrt{3 + 9K_1^2 - \left(\frac{24K_1^2 + 4K_1 \sqrt{6} + 1}{3}\right)} =$$

$$\overline{T_2 A} = \frac{l_t}{3} \sqrt{K_1^2 - 2K_1 \sqrt{\frac{8}{3}} + \frac{8}{3}} = \frac{l_t}{3} (\sqrt{\frac{8}{3}} - K_1) \quad \Rightarrow \quad \overline{T_2 A} = l_v \frac{(\sqrt{\frac{8}{3}} - K_1)}{(2K_1 \sqrt{6} + 1)}$$

perciò:  $K_2 = \frac{\overline{T_2 A}}{l_v}; \quad K_2 = \frac{(\sqrt{\frac{8}{3}} - K_1)}{(2K_1 \sqrt{6} + 1)} = \boxed{K_2 = \frac{1}{3} \frac{(2\sqrt{6} - 3K_1)}{(2\sqrt{6}K_1 + 1)}}$

calcoliamo  $K_2$  per i diedri uguali.

$$K_1 = \frac{\sqrt{6}}{15}; \quad K_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}/5}{\frac{12}{15} + 1} \right) = \frac{10\sqrt{6} - \sqrt{6}}{27} = \left( K_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

l'equazione portava a  $-\frac{\sqrt{6}}{3}$  (negativo), verifichiamo l'altro  $K_1$

$$K_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}; \quad K_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}/4}{1 + 1} \right) = \left( K_2 = \frac{7}{24} \sqrt{6} \right) \quad (\text{come già calcolato})$$



Consideriamo il solido con  $\kappa = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ;  $\kappa^2 = \frac{2}{3}$

$$\overline{VT} = \frac{\sqrt{6}}{3} l_t; \quad a = \frac{l_t}{2} \sqrt{1 + 12 \left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{l_t}{2} \sqrt{3}; \quad \boxed{a = \frac{l_t}{2} \sqrt{3}}$$

$$s = l_t \sqrt{\frac{1+2}{3}}; \quad \boxed{s = l_t} \quad \boxed{l_3 = a}$$

angoli piani delle facce

$$\text{al vertice: } 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

$$\text{alla base: } \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

angoli diedri

$$\text{fra faccia e base piramidi: } \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{2}\right) = \arctan(\sqrt{2}) = \underline{70^\circ 31' 43",61}$$

$$\text{fra facce su "l": } \hat{D}_{l_t} = (3)(70,52877937) = \hat{D}_{l_t} = \underline{211^\circ 35' 10",8}$$

$$\text{fra facce su "s": } \hat{D}_s = 2 \arcsin\left(\frac{l_t/2}{l_t/\sqrt{3}}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad (2 \text{ soluzioni})$$

$$2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{cases} 2(35,26438968) = \underline{70^\circ 31' 43",61} \\ 2(144,7356103) = \underline{289^\circ 28' 16",39} \quad (\text{opplementare}) \end{cases}$$

Si tratta di un tetraedro cui sono aggiunti 4 tetraedri uguali.

$$\text{applicando la formula: } \kappa_2 = \frac{(\sqrt{3} - \kappa_1)}{(2\kappa_1\sqrt{6} + 1)} \text{ abbiamo: } \kappa_2 = \frac{(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{3})}{(2\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{6} + 1)}$$

$$\kappa_2 = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}}{5} = \frac{\sqrt{6}}{15}; \quad \text{torna l'altro } \kappa \text{ iniziale.}$$

cioè dalla  $\kappa_2 = \frac{\sqrt{3} - \kappa_1}{2\kappa_1\sqrt{6} + 1}$  risolvendo rispetto a  $\kappa_1$  abbiamo:

$$\kappa_2 \cdot 2\kappa_1\sqrt{6} + \kappa_1 = \sqrt{3} - \kappa_2 \quad \text{cioè: } \kappa_1 = \frac{(\sqrt{3} - \kappa_2)}{(2\kappa_2\sqrt{6} + 1)} \text{ identica!}$$

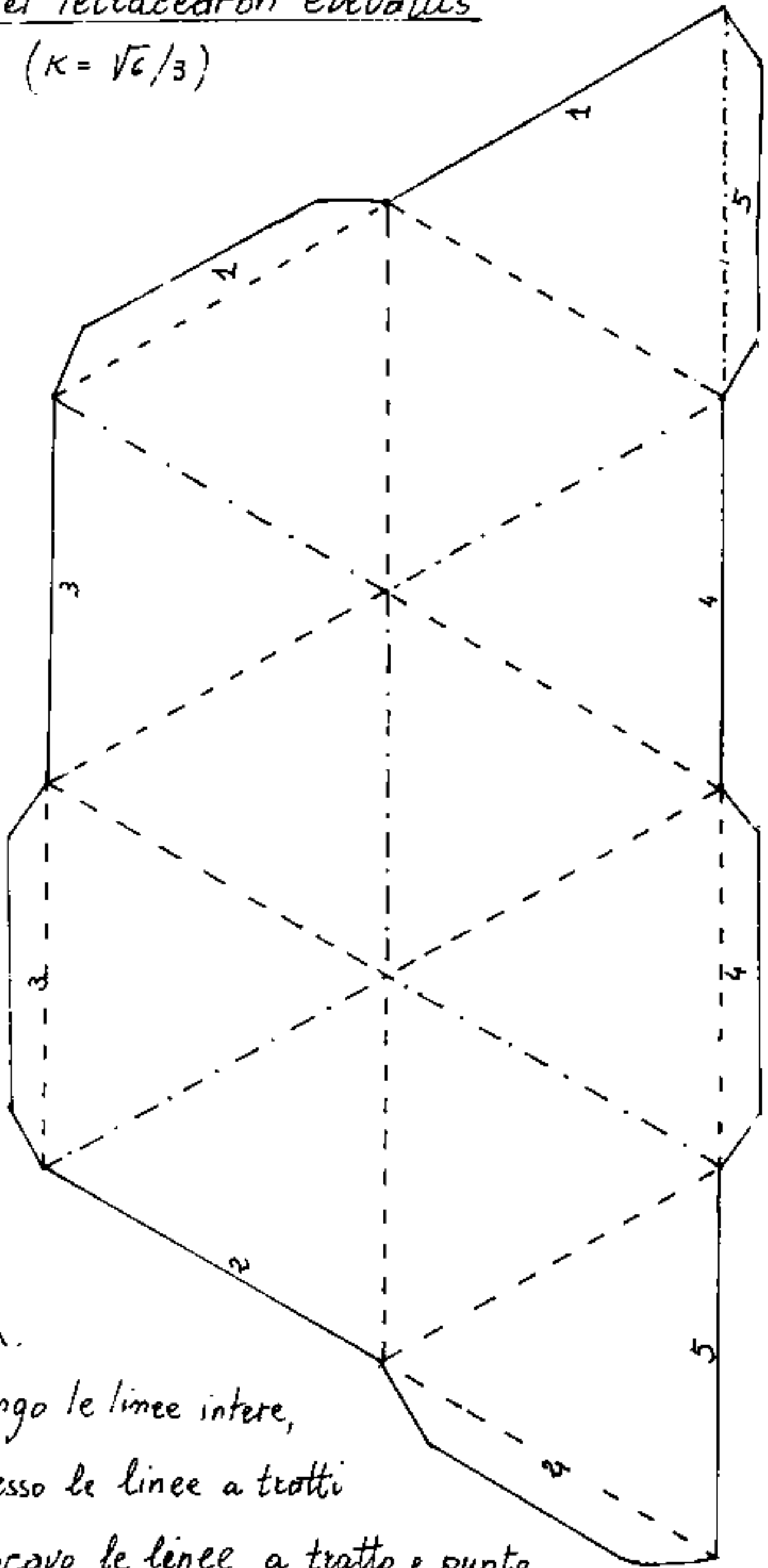
$$\text{Superficie laterale: } S = 12 \frac{l_t^2}{4} \sqrt{3}; \quad \boxed{S = l_t^2 3\sqrt{3}}$$

$$\text{Volume} = 5 \frac{\sqrt{2}}{12} l_t^3; \quad \boxed{V = l_t^3 \frac{5\sqrt{2}}{12}}$$

Questo triacistetraedro è anche detto Tetradron elevatus.

# Siluppo del Tetracedron elevatus

$$(\kappa = \sqrt{6}/3)$$



Nota.

Tagliare lungo le linee intere,

piegare convesso le linee a tratti

piegare concavo le linee a tratto e punto

incollare le linguette in modo da far corrispondere gli spigoli

goli omonimi.

Inizialmente il tetraedro è inscritto in una sfera, i vertici del tetraedro restano sulla superficie sferica al crescere dell'altezza delle piramidi aggiunte i cui vertici inizialmente non arrivano a toccare la superficie sferica; quando si aggiungono le piramidi dei poliedri dell'ottaedro, si ha il cubo; sulla sfera vi sono, con i vertici del tetraedro, quelli delle piramidi aggiunte. Da questo punto in poi, sulla sfera circoscritta, vi saranno solo i vertici delle piramidi aggiunte.

Consideriamo ora il triacistetraedro con le piramidi dei poliedri costituenti l'icosaedro.

Per l'icosaedro, il raggio della sfera inscritta (altezza delle piramidi  $\overline{TV}$ ) =  $r_i = \frac{l_t(3+\sqrt{5})}{4\sqrt{3}}$ . Il raggio della sfera circoscritta = (spigolo  $s$  delle piramidi) è:  $r_s = \frac{l_t\sqrt{5+\sqrt{5}}}{3}$  (ove  $l_t$  è il lato dell'icosaedro)

$$\underline{\underline{K = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right) = 0,755761314}}$$

$$a = \frac{l_t}{2} \sqrt{\frac{1+12K^2}{3}} = \frac{l_t}{2} \sqrt{\frac{1}{3} + 4\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$a = \frac{l_t}{3} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \boxed{a = \frac{l_t}{4}(\sqrt{5}+1)}$$

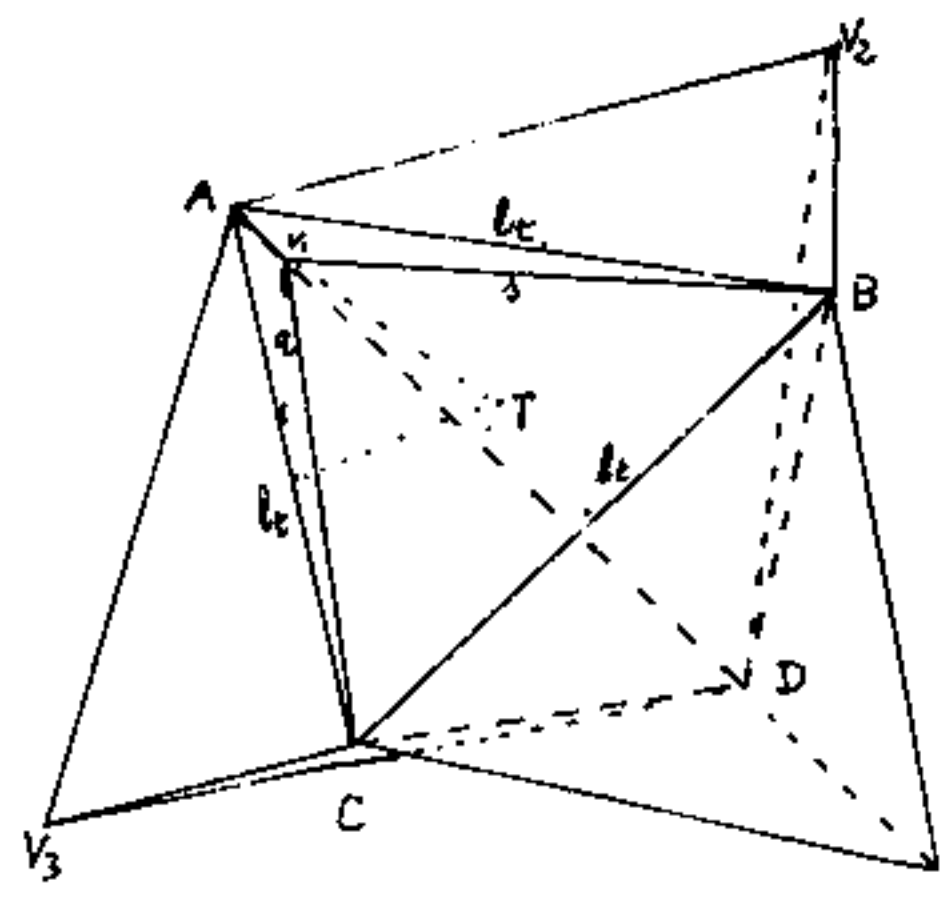
angoli delle facce:  $\alpha_3 = \frac{l_t(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2\sqrt{3}}$   
al vertice:  $2 \arccos\left(\frac{l_t}{2s}\right) = \underline{\underline{63^\circ 26' 51,82''}}$

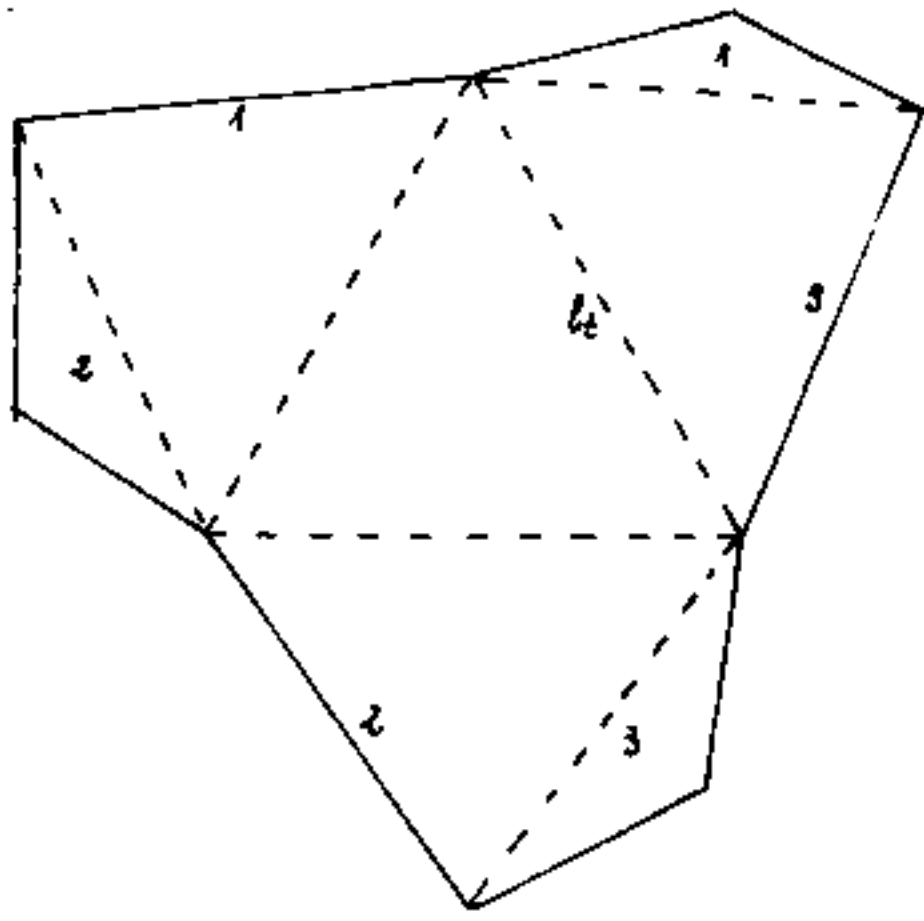
alla base:  $\arccos\left(\frac{l_t}{2s}\right) = \underline{\underline{58^\circ 16' 57,09''}}$

Diedri:  $\hat{D}_3 = 2 \arccos\left(\frac{l_t}{2s}\right) = \underline{\underline{72^\circ 00' 00''}}$

$\hat{D}_{l_t} = 208^\circ 43' 06,47'' > 180^\circ$  spazio interno

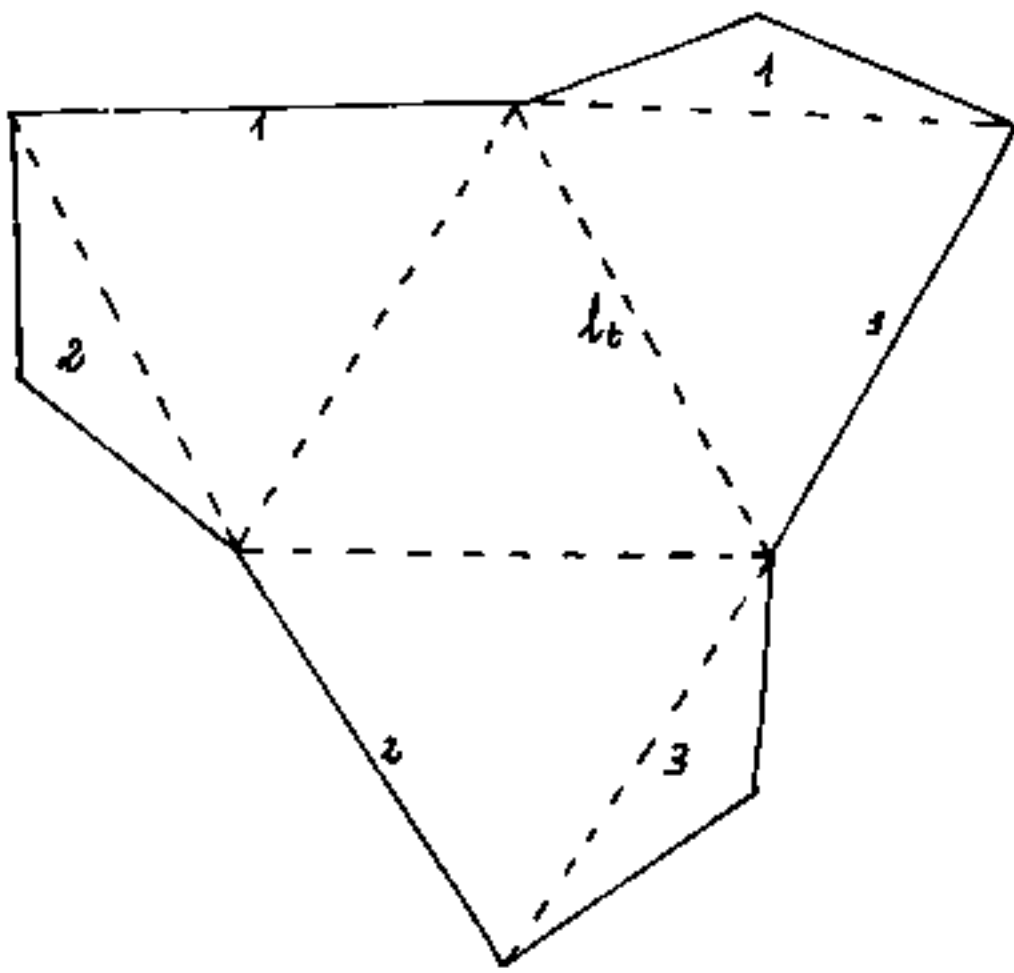
$\hat{D}_{l_t} = -151^\circ 16' 53,5''$  conveo verso l'esterno.





Sviluppo delle piramidi  
costituenti l'ottaedro, so-  
vrapposte al tetraedro  
danno un cubo.

Sotto diamo lo schema di  
sviluppo delle piramidi  
angoloidi costituenti  
l'icosaedro. (per fare



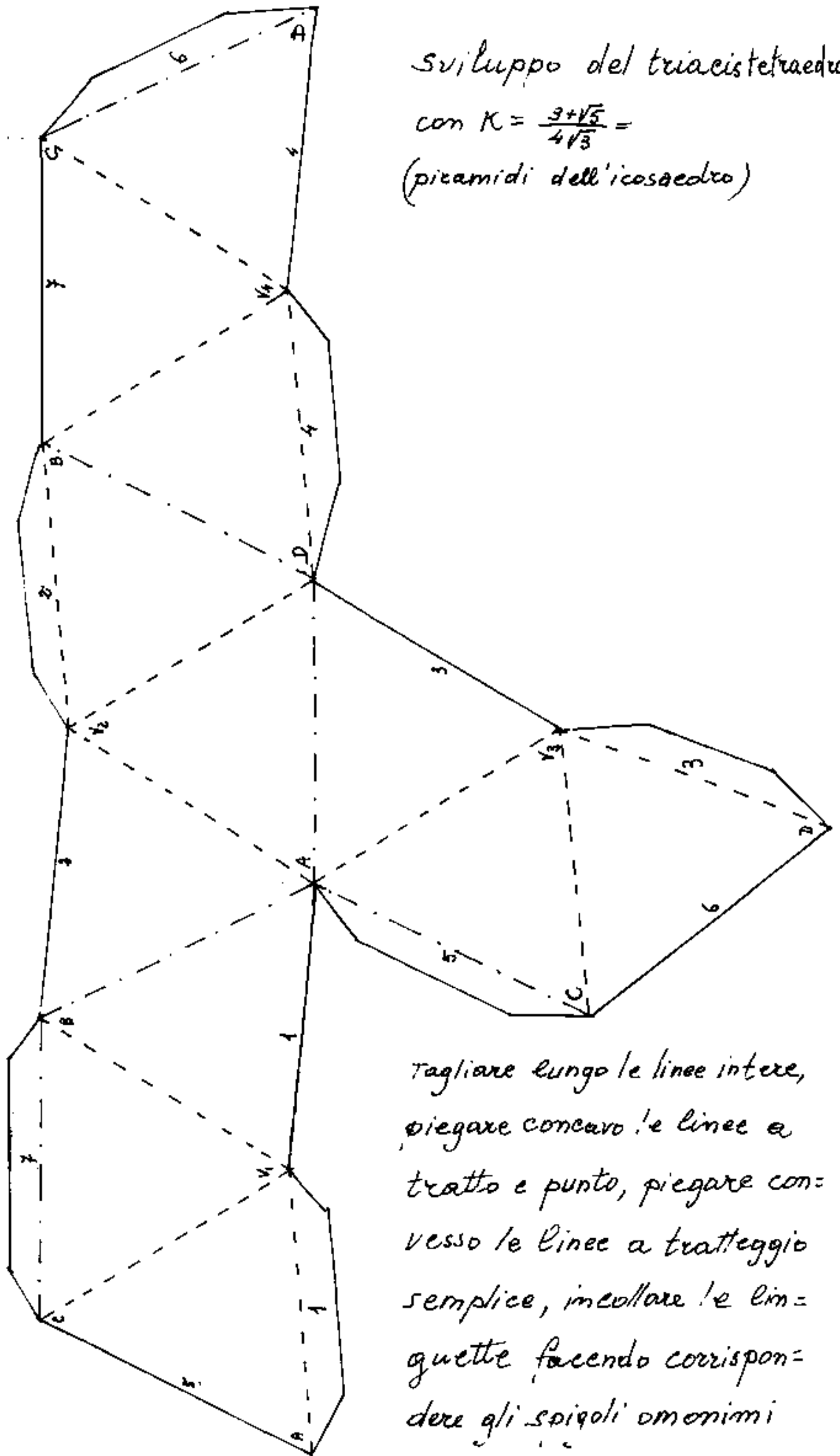
l'icosaedro ne occorrono  
venti, se con quattro  
di queste ricopriamo  
il tetraedro, ottenia-  
mo il triacistetraedro  
ora trattato, indivi-  
duato dal  $\kappa = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right)$ .  
Può interessare il con-  
fronto.

Lo sviluppo completo per fare il modello di questo triacis-  
tetraedro lo diamo alla pagina seguente.

$$31 \quad \kappa_2 = \left( \frac{\sqrt{63} - \kappa_1}{2\sqrt{6}\kappa_1 + 1} \right) \text{ ove sostituendo si ha: } \kappa_2 = \frac{8\sqrt{2} - \sqrt{5} - 3}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + 1\right)4\sqrt{3}}$$

$$\kappa_2 = \frac{16 - \sqrt{10} - 3\sqrt{2}}{(\sqrt{5} + \sqrt{2} + 3)4\sqrt{3}} = 0,186547467 \approx \sqrt{6}/13,13065131.$$

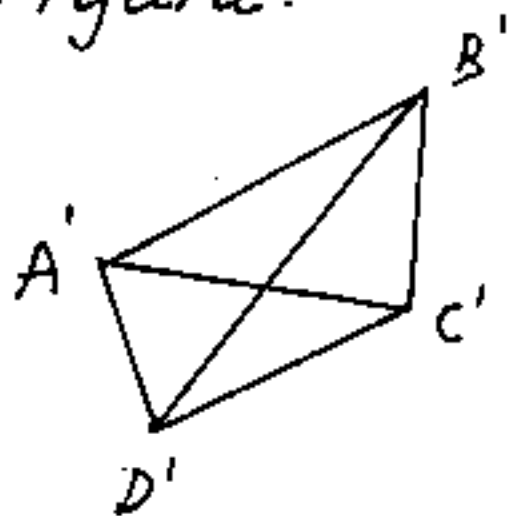
Sviluppo del triacistetraedro  
 con  $K = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} =$   
 (piramidi dell'icosaedro)



Tagliare lungo le linee intere,  
 piegare concavo le linee a  
 tratto e punto, piegare con-  
 vesso le linee a tratteggio  
 semplice, incollare le lin-  
 guette facendo corrispon-  
 dere gli spigoli omonimi

Anche per questo solido possiamo considerare immutata la posizione dei vertici, non collegare fra loro i vertici del tetraedro  $A, B, C, D$ , ed invece collegare fra loro i vertici  $V_1, V_2, V_3, V_4$  delle piramidi aggiunte. Prima di fare ciò, è bene chiarire il problema di quattro vertici non complanari. Abbiamo già trattato il problema dei poligoni inscrittibili o non inscrittibili in una sfera, nel capitolo sulla misura degli angoli solidi. Ora invece riguardiamo quattro punti non complanari, indipendentemente da essere o meno inscrittibili in una sfera determinata.

Siano  $A, B, C, D$  i quattro punti, che in una certa proiezione possiamo vedere come in figura.



Siano date le vere distanze:

$$\overline{AB} = l_1 ; \quad \overline{BC} = l_2 ; \quad \overline{CD} = l_3$$

$$\overline{DA} = l_4 ; \quad \overline{AC} = l_5 ; \quad \overline{BD} = l_6$$

(non misurabili in proiezioni)

Per primo calcolo possiamo prendere cinque vere distanze e calcolare la sesta, se questa sesta misura calcolata corrisponde alla vera distanza, il quadrilatero è piano, i quattro punti sono complanari. Se è diversa dalla vera, i quattro punti non sono complanari. Se non sono

complanari è sempre possibile far passare una sfera per quattro punti, ciò non implica che un solido sia inscrivibile infatti i punti vertice presi quattro a quattro possono dar luogo a sfere diverse.

Se  $ABCD$  è il perimetro (sulla sfera) ed  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  le diagonali, e supponiamo  $\overline{BD} > \overline{AC}$ , se i quattro punti rimangono sulla superficie di una semisfera la corda  $\overline{BD}$  è più vicina al centro della corda  $\overline{AC}$ . In generale le 6 vere distanze



possono considerarsi corde di cerchi massimi e saranno tanto più vicine al centro quanto più sono grandi.

Ogni tre punti si ha un piano perciò possiamo considerare le seguenti coppie di triangoli del quadrilatero:

$ABC$ e $ADC$	aventi in comune $\overline{AC}$	linea di piega (varia $BD$ )
$ABD$ e $BDC$	" "	$\overline{BD}$ " " (" $AC$ )
$ABC$ e $ABD$	" "	$\overline{AB}$ " " (" $DC$ )
$ABC$ e $BCD$	" "	$\overline{BC}$ " " (" $AD$ )
$ABD$ e $ACD$	" "	$\overline{AD}$ " " (" $BC$ )
$ACD$ e $BCD$	" "	$\overline{DC}$ " " (" $AB$ )

cioè se disponiamo in piano i due triangoli provocando una rotazione relativa intorno alla linea di piegatura, otteniamo un quadrilatero piano in cui risultano vere cinque dimensioni, ma risulta variata la sesta.

Calcolando questi quadrilateri come piani, risultano veri gli angoli opposti alla linea di piegatura e falsati quelli opposti alla distanza variata.

Questi calcoli sono necessari per fare lo sviluppo del solido in modo da poter dare lo schema per la costruzione di un modello in carta.

Calcoliamo ora il triacistetraedro avente gli stessi vertici di quello ottenuto con le piramidi angolari dell'icosaedro, ma ove è scambiato  $l_t$  con  $l_v$ .

Sia  $l_t$  lo spigolo comune del tetraedro e dell'icosaedro;  $r = r_t = \frac{l_t}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$  = raggio della sfera circoscritta all'icosaedro = spigolo piramidi aggiunte al tetraedro;  $r_{it} = \overline{TV} = \frac{l_t}{4} \left( \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right)$  = raggio della sfera inscritta nell'icosaedro = altezza delle piramidi aggiunte;  $r_{it} = \frac{l_t}{12} \sqrt{6}$  = raggio della sfera inscritta nel tetraedro. Perciò  $\overline{OV} = r_{it} + r_{it} = \left( \frac{l_t}{4} \left( \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right) + \frac{l_t}{12} \sqrt{6} \right) = r_v$  = distanza dei vertici  $V$  dal centro  $O$  del solido =  $\frac{l_t}{4} \left( \frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \right)$

$\widehat{V_1OV_2}$  = angolo fra le direzioni dei centri faccia del tetraedro  $\widehat{V_1OV_2} = 109^\circ 28' 16,3''$ . La distanza:  $\overline{V_1V_2} = l_v$ , fra i due vertici e nuovo spigolo del solido sarà data:

$$l_v = 2r_v \sin \frac{1}{2} (109^\circ 28' 16,3'') = \frac{l_t}{2} \left( \frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \right) \sin 54^\circ 44' 08,152'' =$$

$$l_v = \frac{l_t}{2} \left( \frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{\frac{2}{3}} = \boxed{l_v = l_t (3\sqrt{2} + \sqrt{10} + 2)/6} = \boxed{l_v = (1,567486391) l_t}$$

$$s_v = \frac{l_t}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = (0,951056516) l_t = \underline{(0,606739887) l_v}$$



I nuovi spigoli " $l_v$ " formeranno triangoli equilateri che costituiranno il nuovo tetraedro. La sfera inscritta in questo tetraedro ha per raggio  $r_v = \frac{l_v}{12} \sqrt{6}$

cioè:  $r_v = \overline{OT_1} = \frac{l_t}{6} (\sqrt{2} \cdot 3 + \sqrt{10} + 2) \frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{l_t}{12} (\sqrt{3} + \sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}})$ ; l'altezza delle nuove piramidi che hanno i vertici in A, B, C, D,

sarà:  $(S_t - r_v) = \frac{\sqrt{6}}{4} l_t - \frac{l_t}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{l_t}{4} \left( \sqrt{6} - \frac{(3 + \sqrt{5} + \sqrt{2})}{3\sqrt{3}} \right)$

Cioè =  $l_t (0,292410615)$  da cui  $K = \frac{T_1 A}{l_v} = \frac{l_t (0,292410615)}{\frac{l_t}{6} (1,56748639)}$

Le facce del solido saranno triangoli isosceli di base  $l_v$  e lati obliqui  $s$ . l'apotema delle facce

$$a_v = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_v}{2}\right)^2} = l_t \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8}\right) - \left(\frac{8 + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{36}\right)} = \frac{l_t}{2} \sqrt{\frac{45 + 9\sqrt{5} - 16 - 6\sqrt{5} - 6\sqrt{2} - 10}{18}}$$

$$a_v = \frac{l_t}{2} \sqrt{\frac{29 + 3\sqrt{5} - 6\sqrt{2} - 2\sqrt{10}}{2}} = (0,538753283) l_t = (0,343705238) l_v$$

angoli delle facce

al vertice =  $2 \arcsin \left(\frac{l_v}{2s}\right) = 110^\circ 59' 23",7$

alla base =  $\arccos \left(\frac{l_v}{2s}\right) = 34^\circ 30' 18",14$

altezza relativa ad  $s$  =  $h_s = \frac{a_v l_v}{s} = 0,566478725 l_v$

angoli diedri

sullo spigolo  $s$   $\hat{D}_s = 2 \arcsin \left(\frac{l_v}{2h_s}\right) = 123^\circ 55' 34",8$

sullo spigolo  $l_v$   $\hat{D}_{l_v} = 2 \text{ diedri base} + \text{diedro tetraedro}$

Diedro base =  $\arccos \left(\frac{l_v}{2h_s}\right) = \arccos \left(\frac{l_t \cdot 1,567486391}{2\sqrt{3} \cdot 0,538753283 l_t}\right) = 32^\circ 52' 16",78$

Diedro base =  $32^\circ 52' 16",78$ ;  $\hat{D}_{l_v} = 65^\circ 44' 33",56 + 70^\circ 31' 43",61 =$

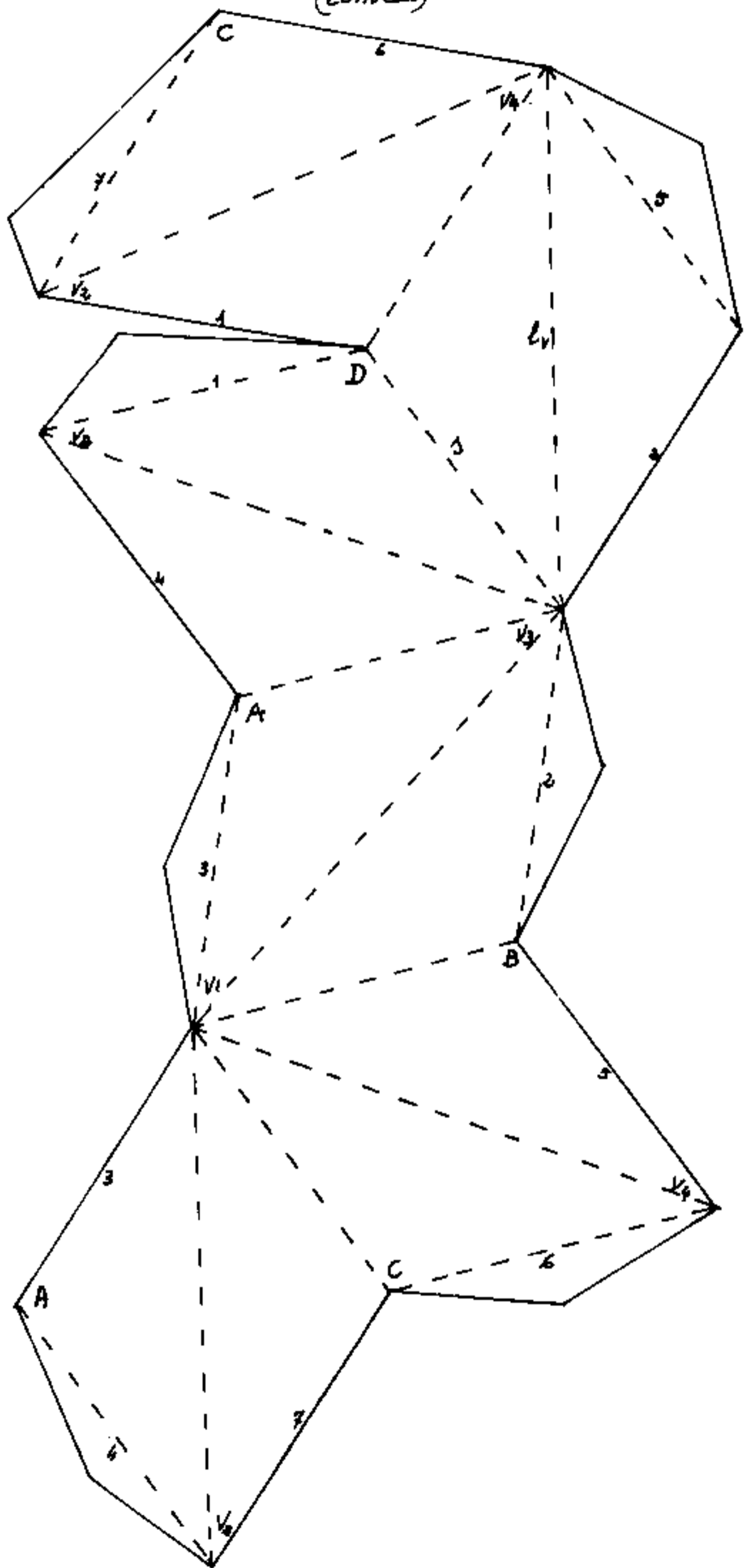
$\hat{D}_{l_v} = 136^\circ 16' 17",1$

$K = 0,186547467$

verifichiamo  $K = K_2 = \frac{1}{3} \frac{(2\sqrt{6} - 3K_1)}{(1 + \sqrt{6}K_1 + 1)}$  ove:  $K_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3}} = 0,755761314$

Schema di triacistetraedro avente gli stessi vertici  
 di quello ottenuto sovrappponendo le piramidi  
 dell'icosaedro pero'  $K = 0.186547467$ .

(convesso)



Tagliare lungo le linee intere, piegare lungo le linee tratteggiate, incollare le  
 linguette facendo corrispondere gli spigoli omonimi.

A, B, C, D = tetraedro di spigolo  $l$ ;  $V_1, V_2, V_3, V_4$  = tetraedro di spigolo  $l$ .

## Considerazioni sul $K$ dei triacistetraedri.

Se per  $K < 0$  intendiamo  $\overline{TV}$  penetrante nel tetraedro di spigolo  $l_t$ , non sarebbe piú ortodosso il prefisso Cis = al di qua, in ogni caso:  $(-\frac{2}{3}) < K < 0$ ;  $(-x_1 = \frac{-\sqrt{6}}{12} = -0,204124)$ . ( $K_2 = \infty$ )

Per  $K \geq 0$  per ogni altezza  $\overline{TV} = Kl_t$  si hanno 8 vertici i quali ammettono un'altro triacistetraedro il cui  $K$  è

$$K_2 = \frac{\sqrt{6} - K_1}{2\sqrt{6}K_1 + 1} = \frac{1}{3} \frac{(2\sqrt{6} - 3K_1)}{(2\sqrt{6}K_1 + 1)}$$

Per  $K_1 = 0$ ;  $\rightarrow K_2 = \frac{2}{3}\sqrt{6} = 1,63299316$

per  $K_1 = \frac{\sqrt{6}}{15} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{(2\sqrt{6} - \sqrt{6}/5)}{\frac{4}{5} + 1} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{9\sqrt{6}}{9} \right) = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,81649658$

per  $K_1 = \frac{\sqrt{6}}{12} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}/4}{1 + 1} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{7\sqrt{6}}{8} \right) = \frac{7}{24}\sqrt{6} = 0,71443508$

per  $K_1 = \frac{\sqrt{6}}{6} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}/2}{2 + 1} \right) = \frac{1}{3} \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6} = 0,40824829$

per  $K_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{2\sqrt{6} - \frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}}{\frac{2\sqrt{6}(3+\sqrt{5})}{4\sqrt{3}} + 1} \right) = \frac{8\sqrt{6} - (3+\sqrt{5})}{\frac{\sqrt{6}(3+\sqrt{5}) + \sqrt{3}}{2}} = \frac{16 - \sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}(3+\sqrt{2}+\sqrt{5})} = 0,18654767$

per  $K_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} + 1} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{6}}{5} \right) = \frac{\sqrt{6}}{15} = 0,163299316$

per  $K_1 = 1 \rightarrow K_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{2\sqrt{6} - 3}{2\sqrt{6} + 1} \right) = 0,107305537$

per  $K_1 = \frac{2}{3}\sqrt{6} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{6}}{8 + 1} \right) = 0$

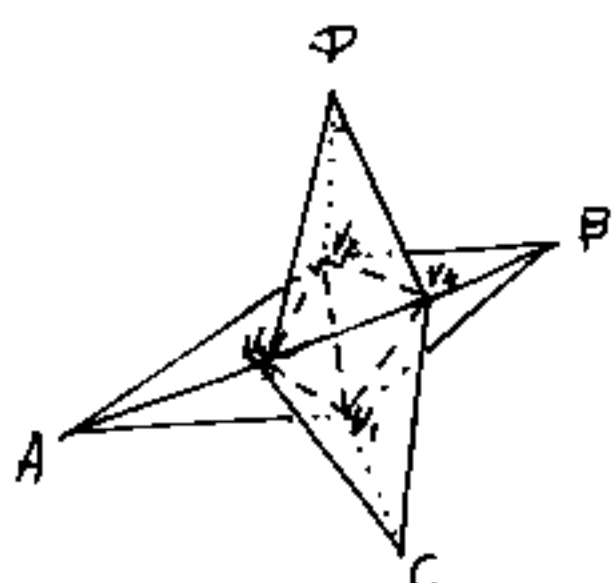
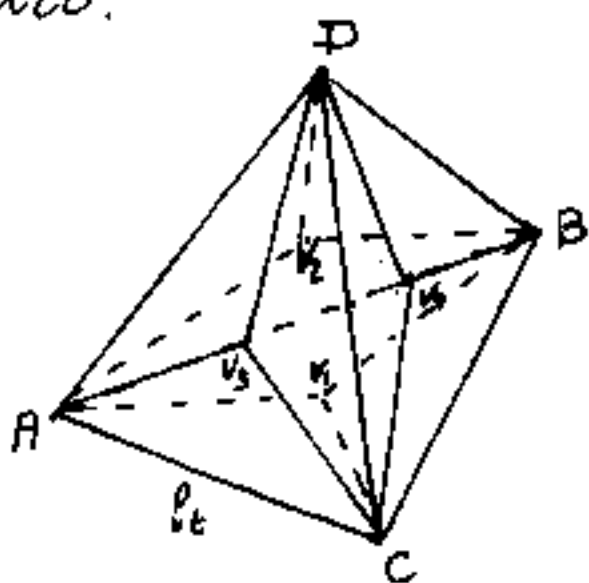
per  $K_1 = \sqrt{6} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{2\sqrt{6} - 3\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{6} + 1} \right) = \frac{-1}{3} \left( \frac{\sqrt{6}}{13} \right) = -0,0628$

lim.  $K_1 \rightarrow \infty \rightarrow K_2 = \frac{-\sqrt{6}}{12} = -0,204124$ . (vedi sopra).

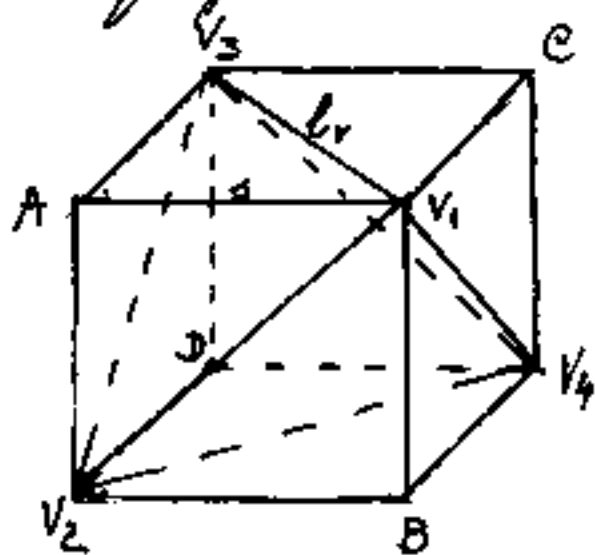
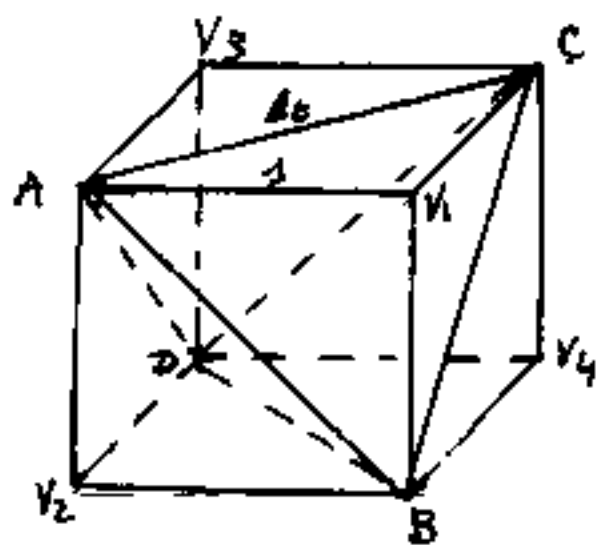
$K$  quindi può variare da  $-r_i = -\sqrt{6}/12 = -0,204124$  a più infinito. A due a due i  $K$  sono abbinati nel senso che con la stessa posizione dei vertici possiamo avere due triacistetraedri.

$K = -\frac{\sqrt{6}}{12}$  è tale che le piramidi sottratte arrivano col vertice al centro del tetraedro di cui rimangono i soli poliedri angolari. Il suo  $K_2 = +\infty$  in cui, rispetto ad  $\infty$ , spariscono le dimensioni in campo reale e si hanno quattro semirette che sono le rette di giacitura dei piani paralleli alle facce del tetraedro, partono dal centro  $O$  ed hanno l'altro estremo  $V$  all'infinito.

Il campo dei  $K$  minori di zero ha abbinati i  $K$  che da  $\infty$  scendono a  $\frac{2}{3}\sqrt{6} = K = 1,63299316$  per  $K = 0$  (caso limite) ove il solido è un tetraedro ove le piramidi aggiunte, essendo  $\overline{TV} = 0$ , si presentano con gli spigoli disegnati sulle facce del tetraedro stesso unendo i vertici col centro faccia. il  $K$  abbinato  $(\frac{2}{3}\sqrt{6})$  porta ad un  $l_v$  pari alla distanza fra i centri faccia del tetraedro.



Il campo di maggior interesse è quello che va da  $K=0$  a  $K=\frac{2}{3}\sqrt{6}=1,63299316$ . ove i  $K$  crescenti da 0 a  $(\frac{\sqrt{6}}{6})$  ed i corrispondenti  $K$  decrescenti da  $\frac{2}{3}\sqrt{6}$  a  $\frac{\sqrt{6}}{6}$  trovano negli 8 vertici del cubo lo stesso solido con lo stesso  $K$ ; dalle figure è possibile



vedere come  $l_t = l_v$  siano le due diagonali delle facce del cubo ove è guardato come triacistetraedro essendo il diedro  $\hat{D}_t = \hat{D}_v = 180^\circ$  ogni faccia del cubo comprende due facce dei due triacistetraedri.

Oltre questo caso limite i due solidi aventi gli stessi vertici risultano uno convesso e l'altro concavo.

consideriamo ora alcuni valori caratteristici del parametro  $K$ , e raggruppiamo i risultati in una tabella.

### TAVOLA dei TRIACISTETRAEDRI

$TV = K l_t$	$s$	$\hat{D}_{l_t}$	$\hat{D}_s$	angoli delle facce		NOTE
				al vertice	alla base	
0	$l_t / \sqrt{3}$	$70^\circ 31' 44''$	$180^\circ$	$120^\circ$	$30^\circ$	tetraedro a facce rigate
$(\sqrt{6}/15) l_t$ <small>0,1632993162 · <math>l_t</math></small>	$\frac{3}{5} l_t$ <small>0,6 <math>l_t</math></small>	$129^\circ 31' 16''$	$129^\circ 31' 16''$	$112^\circ 53' 07''$	$33^\circ 33' 26''$	TRIACISTETRAEDRO a diedri uguali
$(\sqrt{6}/12) l_t$ <small>0,204124145 <math>l_t</math></small>	$\frac{\sqrt{6}}{4} \cdot l_t$ <small>0,423724364 <math>l_t</math></small>	$141^\circ 03' 28''$	$180^\circ$	$109^\circ 28' 16''$	$35^\circ 15' 52''$	Le piramidi aggiunte sono gli angoloidi del tetraedro stesso.
$(\sqrt{6}/6) l_t$ <small>0,408248290 <math>l_t</math></small> $K l_t = (p_2 - r_1)$ vertice sulla sfera.	$\frac{1}{\sqrt{2}} l_t$ <small>0,707106781 <math>l_t</math></small>	$180^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$	CUBO con facce rigate da diagonali Le piramidi aggiunte sono gli angoloidi dell'ottaedro.
$(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}) l_t$ <small>0,755761314 · <math>l_t</math></small>	$(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}) l_t$ <small>0,951056517 · <math>l_t</math></small>	$208^\circ 43' 07''$ concavo esternamente	$72^\circ$	$63^\circ 26' 06''$	$58^\circ 16' 57''$	SOLIDO che presenta concavità ottenuto sovrapponendo gli angoloidi dell'icosaedro
$(\sqrt{6}/3) l_t$ <small>0,81649658 · <math>l_t</math></small>	$1 \cdot l_t$ <small>1,00000 · <math>l_t</math></small>	$211^\circ 35' 12''$ concavo esternamente	$70^\circ 31' 44''$	$60^\circ$	$60^\circ$	TETRACEDRON ELEVATUS ottenuto sovrapponendo tetraedri stessi.

# Il tetracisesaedro

Consideriamo ora i solidi che nascono dal cubo (esaedro); se pensiamo di aggiungere al cubo piramidi a base quadrata avremo la classe di solidi detti: tetracisesaedri.  $\left( \begin{array}{l} F + V = 5 + 3 \\ 24 + 14 = 26 + 2 \end{array} \right)$

Consideriamo il nostro cubo inscritto in una sfera e sia  $l_c$  lo spigolo del cubo ed  $\rho_s = \frac{l_c \sqrt{3}}{2}$  il raggio della sfera circoscritta. Se dal centro delle facce del cubo, tracciamo le perpendicolari fino ad incontrare la superficie sferica avremo che il segmento:  $(\rho_s - \frac{l_c}{2}) = \frac{l_c}{2}(\sqrt{3} - 1)$ , sarà l'altezza delle piramidi:  $\overline{TV} = l_c(0,366025403)$ , che aggiunte al cubo danno il tetracisesaedro inscrivibile in una sfera.

Gli spigoli di tali piramidi saranno:  $s = \sqrt{\overline{TV}^2 + (\frac{l_c}{\sqrt{2}})^2}$

$$s = \sqrt{\left[\frac{l_c}{2}(\sqrt{3}-1)\right]^2 + \left[\frac{l_c}{\sqrt{2}}\right]^2} = \boxed{\frac{l_c}{2}\sqrt{6-2\sqrt{3}}} = s = l_c(0,796225217).$$

L'apotema di una faccia:  $a = \sqrt{s^2 - (\frac{l_c}{2})^2} = \boxed{\frac{l_c}{2}\sqrt{5-2\sqrt{3}}} = a$

$a = l_c(0,619655837)$ . Angolo diedro alla base delle piramidi,

fra base e faccia:  $\hat{D}_b = \arccos\left(\frac{l_c}{2a}\right) = \underline{36^\circ 42' 21,48''}$

diedro su  $l_c = \hat{D}_{l_c} = (2\hat{D}_b + 90^\circ)$ ;  $\hat{D}_{l_c} = \underline{162^\circ 24' 43,3''}$

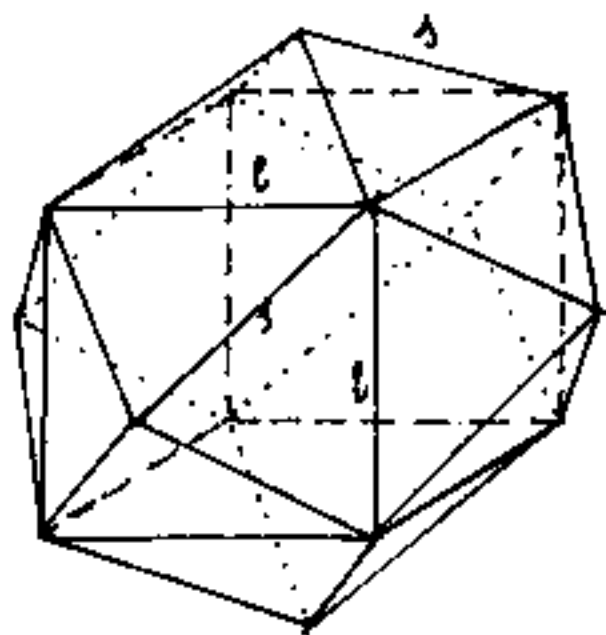
$h_s = \frac{l_c a}{s} = \frac{l_c}{2} \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}} = l_c(0,77824317)$ ; diedro su  $s =$

$\hat{D}_s = 2 \arccos\left(\frac{l_c/\sqrt{2}}{h_s}\right) = 2 \arccos\left(\sqrt{\frac{6}{9-\sqrt{3}}}\right) = \underline{130^\circ 37' 24,3''}$

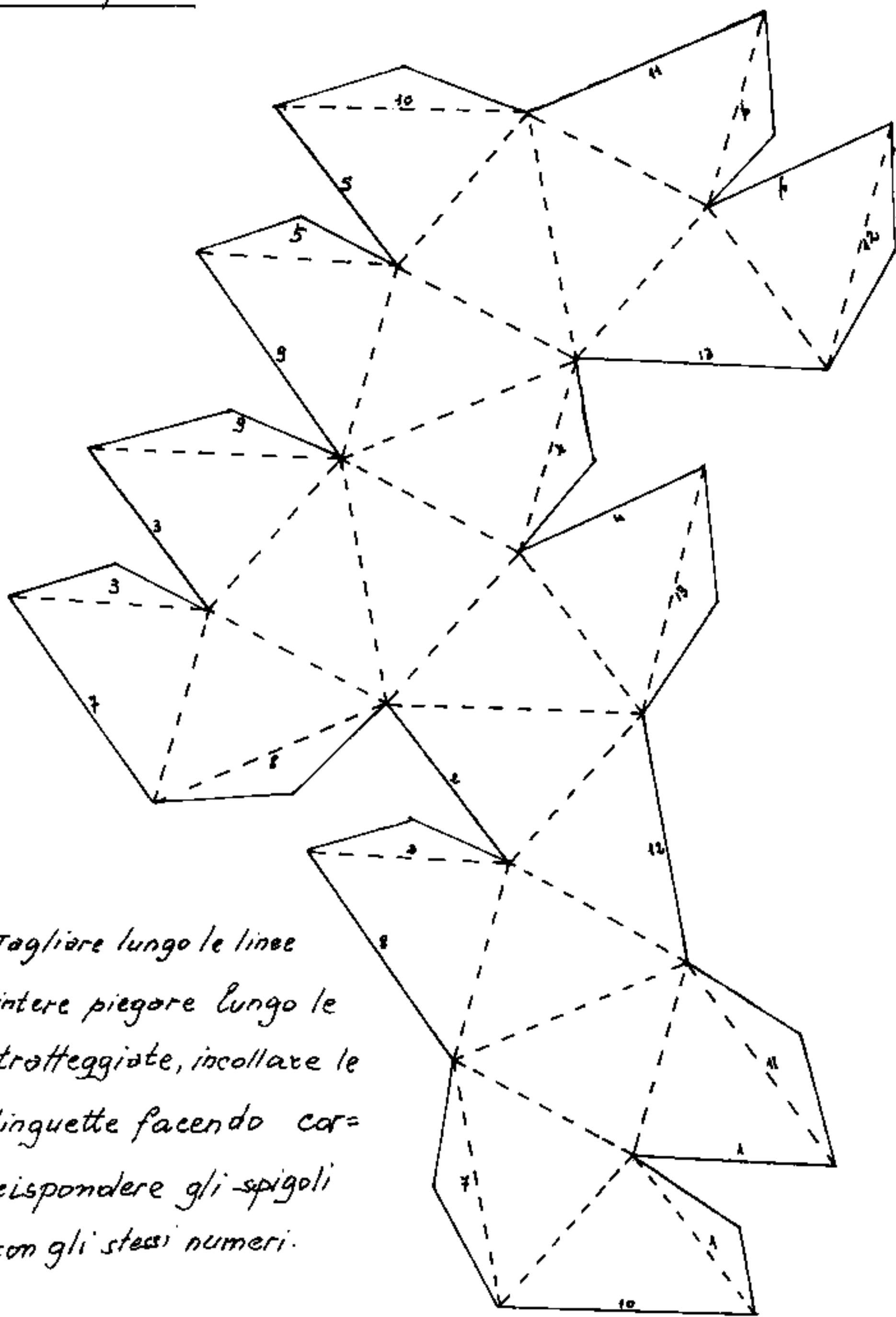
angoli delle facce:

al vertice  $\hat{V} = 2 \arccos\left(\frac{l_c}{2s}\right) = \underline{77^\circ 47' 59,19''} \approx 77^\circ 48'$

alla base  $\alpha = \arccos\left(\frac{l_c}{2a}\right) = \underline{51^\circ 06' 00,01''} \approx 51^\circ 06'$



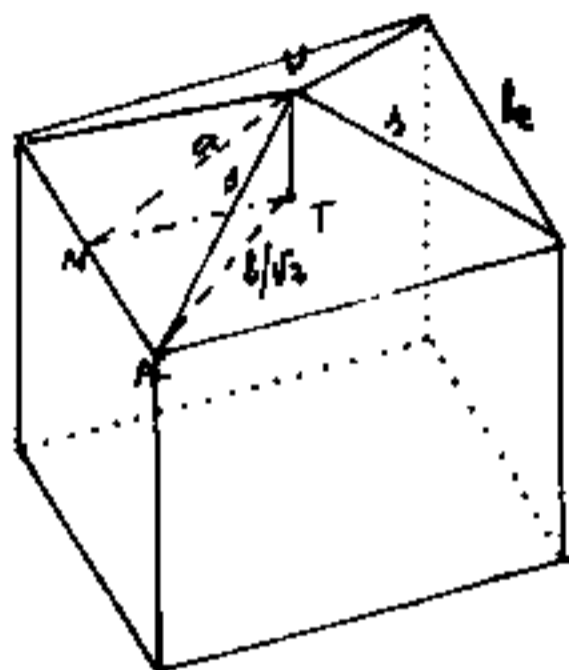
sviluppo del tetracosaedro inscritto in  
una sfera (convesso)



Tagliare lungo le linee  
interiere piegare lungo le  
tratteggiate, incollare le  
linguette facendo cor-  
rispondere gli spigoli  
con gli stessi numeri.



Analogamente a quanto abbiamo detto per il trica-  
cistetraedro, indichiamo con  $l_c K = \overline{TV}$  l'altezza delle  
piramidi aggiunte. Su tale base calcoliamo gli ele-  
menti del tetracisesaedro.



$$\overline{TV} = K l_c$$

$$\overline{MV} = a = l_c \sqrt{K^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\overline{AV} = s = l_c \sqrt{K^2 + \frac{1}{2}}$$

$$a = \frac{l_c}{2} \sqrt{1 + 4K^2}$$

$$s = \frac{l_c}{2} \sqrt{2 + 4K^2}$$

$$l_c = \frac{2s}{\sqrt{2 + 4K^2}}$$

(s = spigolo)

Angoli delle facce: =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{al vertice} = 2 \arcsen\left(\frac{l_c}{2s}\right) = 2 \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2 + 4K^2}}\right) \\ \text{alla base} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2 + 4K^2}}\right) \end{array} \right.$

Area delle facce:  $A_f = \frac{l_c a}{2} = \frac{l_c^2 \sqrt{1 + 4K^2}}{4} = \frac{s^2 \sqrt{1 + 4K^2}}{(2 + 4K^2)}$

altezza relativa ad s:  $h_s = \frac{2A_f}{s} = l_c \sqrt{\frac{1 + 4K^2}{2 + 4K^2}}$

Area della superficie del solido:  $S = l_c^2 6\sqrt{1 + 4K^2}$

Volume di una piramide:  $V_p = \frac{K l_c^3}{3}$

volume del solido:  $V = l_c^3 (1 + 2K)$

Angoli diedri:

$\alpha_s$  = delle facce della piramide con la base =  $\arctg\left(\frac{K l_c}{l_c/2}\right) = \alpha_s = \arctg(2K)$

$\hat{D}_s$  = (fra le facce della piramide) =  $2 \arcsen\left(\frac{l_c/\sqrt{2}}{h_s}\right) = \hat{D}_s = 2 \arcsen\left(\sqrt{\frac{1 + 2K^2}{1 + 4K^2}}\right)$

$\hat{D}_s = 2 \arccos\left(\frac{2K}{\sqrt{2 + 8K^2}}\right)$ ;  $\hat{D}_s = 2 \arctg\left(\frac{1}{K} \sqrt{\frac{1 + 2K^2}{2}}\right)$

$\hat{D}_{l_c} = (2\alpha_s + 90^\circ)$  sullo spigolo  $l_c$ :  $\hat{D}_{l_c} = 2 \arctg(2K) + 90^\circ$

Passiamo ora determinare  $k$  affinché il solido abbia angoli diedri uguali. (cioè:  $\hat{D}_s = \hat{D}_e$ ), avremo:

$$2 \arctg\left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{1+2k^2}{2}}\right) = 2 \arctg(2k) + 90^\circ$$

$$\arctg\left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{1+2k^2}{2}}\right) - \arctg(2k) = 45^\circ ; (\alpha - \beta) = 45^\circ$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{\sqrt{\frac{1+2k^2}{2}}}{1 + 2\sqrt{\frac{1+2k^2}{2}}} - 2k}{1 + 2\sqrt{\frac{1+2k^2}{2}}} = 1 ; \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1+2k^2}{2}} - 2k = 1 + 2\sqrt{\frac{1+2k^2}{2}}$$

$$\frac{(1-2k)\sqrt{1+2k^2}}{k} = 1+2k ; \left(\frac{1+2k^2}{2}\right) = \left(\frac{k+2k^2}{1-2k}\right)^2 ; (1+2k^2)(1-2k)^2 = 2(k)^2(1+2k)^2$$

$$(1+2k^2)(1+4k^2-4k) = 2k^2(1+4k^2+4k) ; 1+4k^2-4k+2k^2+8k^3-8k^3 = 2k^2+8k^3+8k^3$$

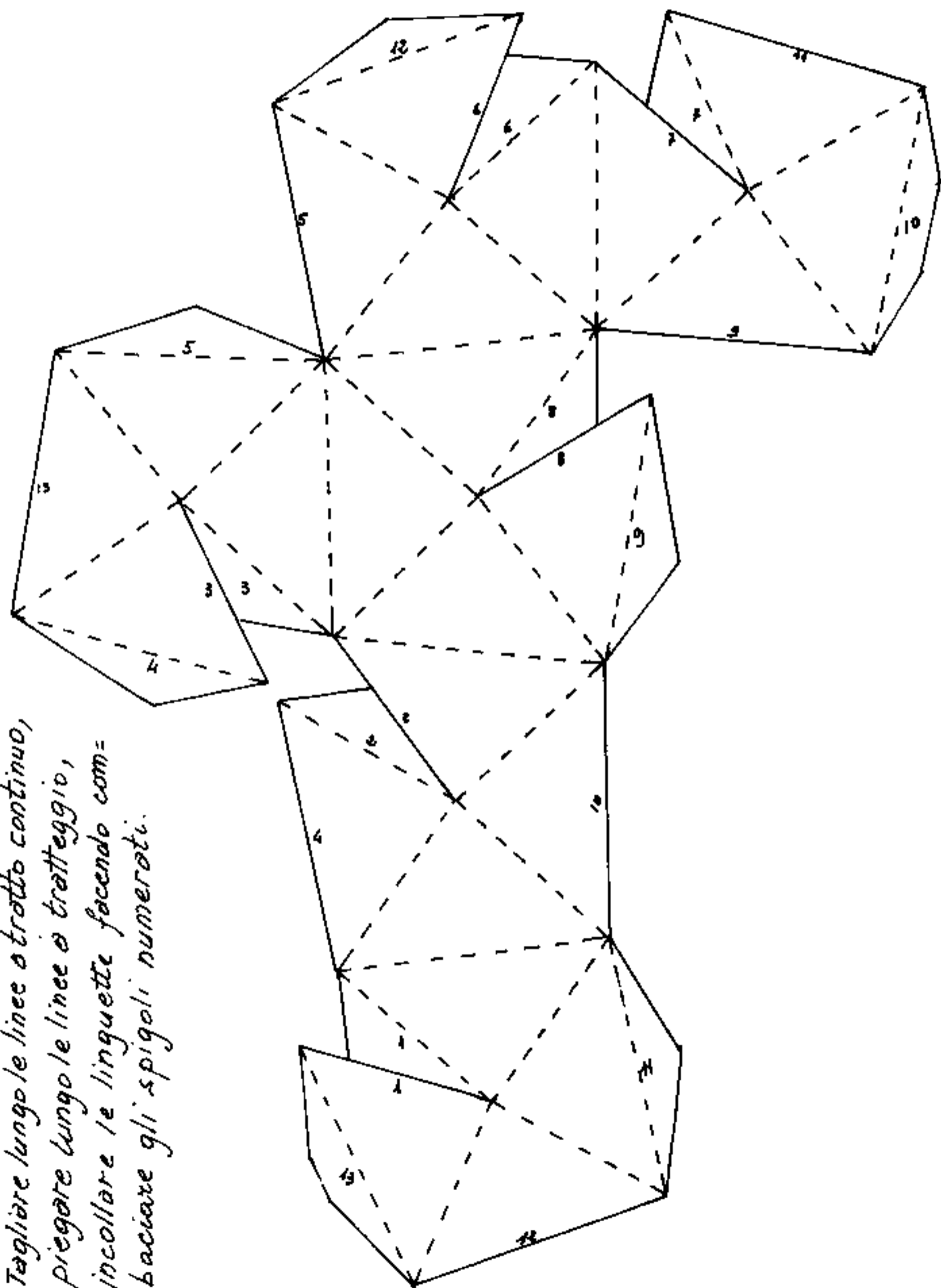
$$16k^3 - 4k^2 + 4k - 1 = 0 ; \text{unica radice reale : } \underline{k = 0,25}$$

Riportiamo gli elementi del solido al variare di  $k$

TABELLA dei TETRACISESAEDRI

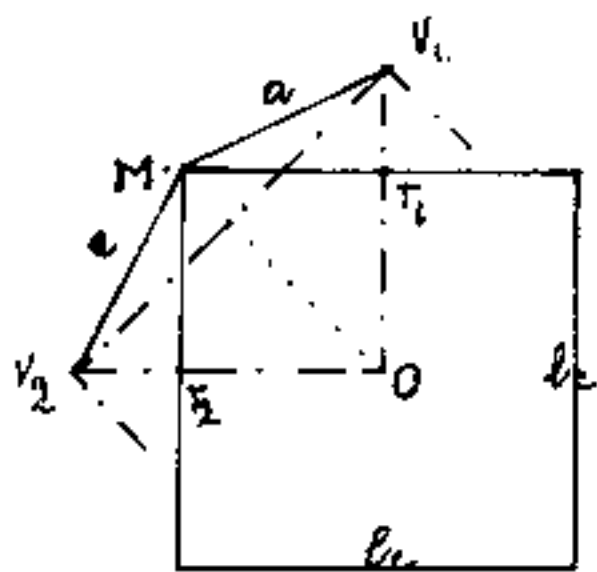
K	s/l <sub>e</sub>	$\hat{D}_e$	$\hat{D}_s$	angoli delle facce		NOTE
				al vertice	alla base	
0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$90^\circ$	$180^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$	Cubo a facce rigate delle diagonali
0,15	0,7228416147	$123^\circ 33' 54,56''$	$156^\circ 33' 12''$	$87^\circ 31' 55''$	$46^\circ 14' 02''$	
0,25	0,75	$143^\circ 07' 48,263''$	$143^\circ 07' 48,263''$	$83^\circ 37' 14''$	$48^\circ 11' 22,24''$	<u>TETRACISESAEDRO</u> a diedri uguali
$\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$ 0,366025404	0,79622521	$162^\circ 24' 43,366''$	$130^\circ 37' 24,24''$	$77^\circ 47' 53,98''$	$51^\circ 06' 00''$	<u>TETRACISESAEDRO</u> inscrittibile in una sfera
0,4	0,824038409	$167^\circ 19' 10,443''$	$127^\circ 34' 18,743''$	$75^\circ 58' 13,266''$	$52^\circ 00' 53,111''$	
0,5	0,8660254038	$180^\circ$	$120^\circ$	$70^\circ 31' 43,1669''$	$54^\circ 44' 08,111''$ $(109^\circ 28' 15'')$	<u>RHOMBODODECAEDRO</u> a facce rigate secondo la diagonale minore.
$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	1	$199^\circ 28' 16,09''$ (concavo)	$109^\circ 28' 16,09''$	$60^\circ$	$60^\circ$	<u>TETRACISESAEDRO</u> a facce equilatera solido con concavità (EXACEDRON ELEVATUS)

Schema di sviluppo del tetracisesaedro  
a diedri uguali.



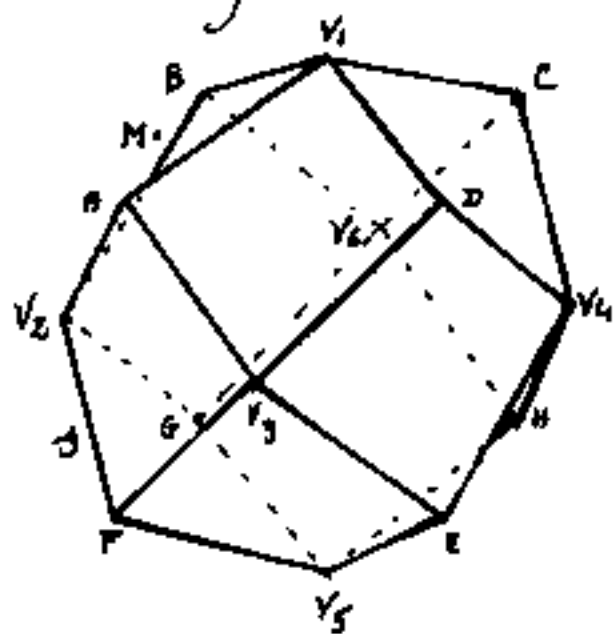
Tagliare lungo le linee a tratto continuo,  
piegare lungo le linee a tratteggio,  
incollare le linguette facendo com=  
baciare gli spigoli numerati.

Anche per il tetracisesaèdro possiamo considerare immutata la posizione dei vertici e tracciare il segmento che congiunge i vertici delle piramidi anziché i lati di base delle piramidi. Se sezioniamo il



solido con un piano parallelo alle facce del cubo e passante per il centro O del cubo stesso, noi tagliamo le facce del tetracisesaèdro secondo le apoteme "a" =  $\overline{MV_1} = \overline{NV_2}$ .

Dalla figura notiamo che:  $\overline{V_1V_2} = \overline{OV} \sqrt{2} = l_c \left(\frac{1}{2} + K\right) \sqrt{2} = l_v$ , indicando con  $l_v = \overline{V_1V_2}$  lo spigolo sostituito ad  $l_c$ , mentre la lunghezza dello spigolo "s" resta invariata, e



resta invariata anche la sua posizione in quanto congiunge vertici invariati. Si noti però che i vertici del cubo (indicati con lettere) sono 8 (A, B, C, D, E, F, G, H),

mentre i vertici delle piramidi aggiunte sono solo 6, ( $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ ). ciò vuol dire che congiungendo i vertici delle piramidi aggiunte al cubo otteniamo un ottaedro e quindi il solido ottenuto con tutti i vertici scambiando  $l_c$  con  $l_v$  è un triacisottaedro ed il solido limite è il rombododecaedro.

Un tetracisesoedro concavo è un triacisottaedro convesso, e viceversa. Il rombododecaedro avendo due facce triangolari sullo stesso piano ha l'angolo diedro  $\hat{D}_e = 180^\circ$  che è il passaggio da solido concavo a convesso o viceversa.

Per i tetracisesoedri il  $\kappa$  che dà il rombododecaedro è  $\boxed{\kappa = 0,5}$ .

Notiamo che per il triacistetraedro il solido di transizione è il cubo ed un triacistetraedro concavo diventa convesso o viceversa scambiando  $l_t$  con  $l_v$ , ma è sempre un triacistetraedro perché sia l'unione dei vertici lettere, sia l'unione dei vertici di piramidi aggiunte, si ha sempre un tetraedro, più grande o più piccolo, solo nel cubo i due tetraedri sono uguali. Per i triacistetraedri il  $\kappa$  che dà il cubo è  $\boxed{\kappa = \sqrt{6}/6}$ .

Ricordiamo che il cubo è ottenuto aggiungendo al tetraedro le piramidi che sono gli angoli poliedri che formano l'ottaedro.

Si noti come il rombododecaedro visto come solido di transizione acquisti notevole importanza.

"Lo spazio può essere in soli rombododecaedri senza soluzione di continuità, oppure in soli cubi, e nessun altro solido ha questa proprietà"

# IL Rombododecaedro

Notiamo che non possiamo sovrapporre al cubo le piramidi dei poliedri angoloidi che costituiscono il tetraedro, l'ottaedro, l'icosaedro perché sono a base triangolare non sovrapponibile alla base quadrata del cubo. Lo stesso per il dodecaedro che ha facce (base delle piramidi) pentagonali. Non rimane quindi che sovrapporre le piramidi dei poliedri che costituiscono il cubo stesso; ed avremo:  $l_c =$  spigolo del cubo;  $s = \frac{l_c \sqrt{3}}{2} = s$  = semidiagonale del cubo = raggio della sfera circoscritta = spigolo delle piramidi da sovrapporre;  $a = \sqrt{s^2 - (\frac{l_c}{2})^2}$  = apotema delle facce =  $a = \frac{l_c \sqrt{2}}{2}$  = semidiagonale della faccia del cubo. Altezza delle piramidi:  $TV = \frac{l_c}{2}$ . Angolo diedro fra le facce della piramide e la base  $\hat{D}_s = 45^\circ$ ; quindi l'angolo diedro su  $l_c = \hat{D}_{l_c} = 2\hat{D}_s + \hat{D}_{\text{cubo}} = 2(45^\circ) + 90^\circ = \hat{D}_{l_c} = 180^\circ$  cioè le due facce delle due piramidi risultano avere un angolo diedro di  $180^\circ$ , cioè sono complanari e formano un'unica faccia rombica di lato  $s = \frac{l_c \sqrt{3}}{2}$  di diagonale minore =  $l_c$ ; di diagonale maggiore =  $2a = l_c \sqrt{2}$  = diagonale di faccia del cubo. Il solido (convesso) è un rombododecaedro (12 facce anziché 24 come i tetracisesaedri) ( $12F + 14V = 24S + 2$ ). Ultimo solido convesso al crescere dell'altezza delle piramidi.

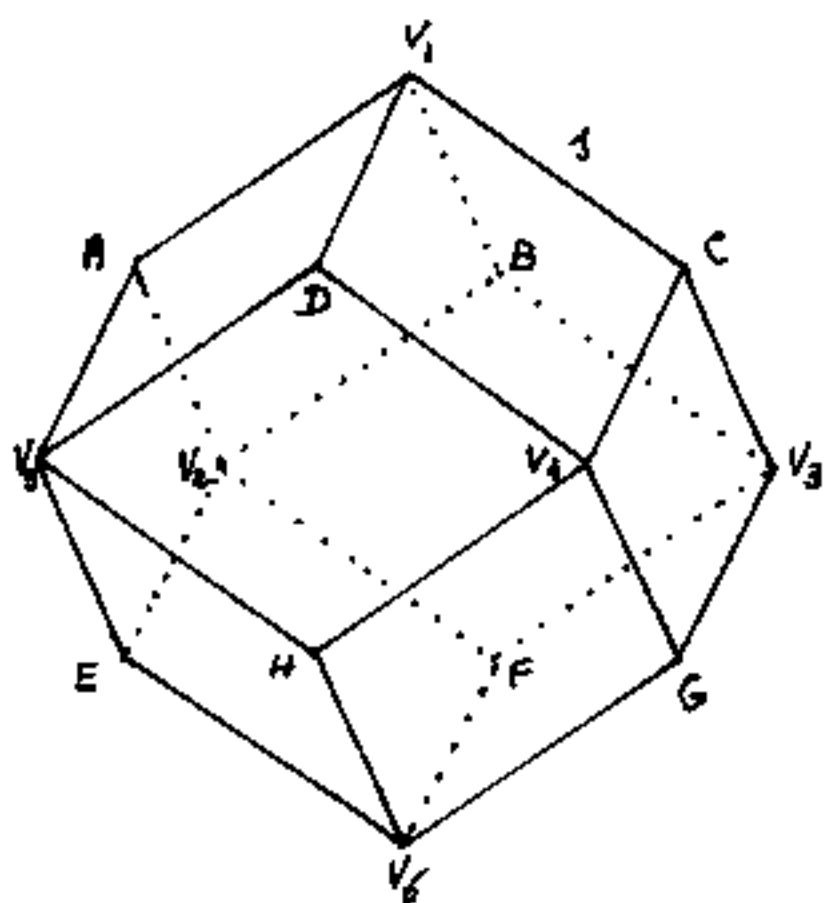
Una ulteriore crescita di tali altezze porterebbe alla formazione di tetracosaedri aventi concavo il diedro su  $l_c$  ( $\hat{D}_c$ ); perché le facce triangolari delle piramidi, superato l'allineamento sul piano per formare le facce del rombododecaedro, formerebbero concavità verso l'esterno. Nel rombododecaedro abbiamo:

Angoli diedri :  $\hat{D}_s = 120^\circ$  ;  $\hat{D}_c = 180^\circ$

Angoli delle facce rombiche

al vertice delle triangolari =  $2 \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 70^\circ 31' 43,61$

doppio angolo di basi triangolari affacciate =  $2 \arctg(\sqrt{2}) = 109^\circ 28' 16,3$



Il rombododecaedro non è inscrittibile in una sfera, infatti i vertici  $V$  da cui si dipartono i quattro spigoli  $s$ , distano dal centro  $O$  del solido ( $\rho = \frac{l_c + TV}{2} = l_c$ ); mentre i vertici da cui si dipartono tre spigoli distano

dal centro  $\frac{l_c}{\sqrt{3}} = 0,8660254 l_c < l_c$ , e non possono quindi arrivare alla superficie sferica degli altri vertici.

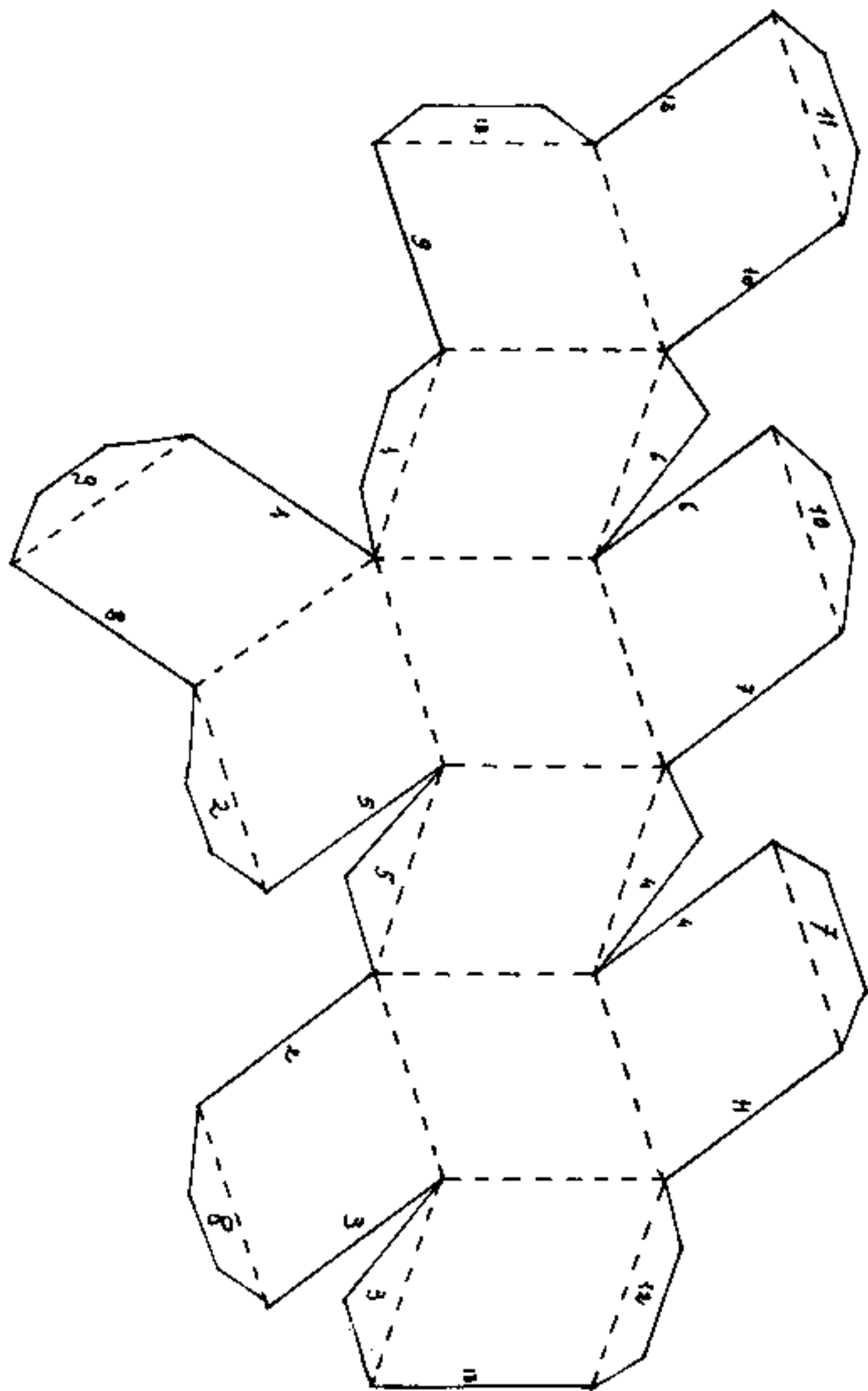
$s$  = lato face del rombo =  $\frac{l_c}{\sqrt{3}}$ ;  $l_c$  = lato cubo = diagonale minore del rombo =  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{BF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = \overline{HD} = \overline{GC} = \overline{FB}$ ; diagonale maggiore =  $2a = l_c \sqrt{2}$ .

Area di una faccia =  $\frac{S}{12} = \frac{l^2}{\sqrt{2}}$  ;

distanza fra due lati paralleli :  $(l^2/\sqrt{2})(2/l^2) = l\sqrt{2/3}$  ;

Superficie laterale del solido :  $S = l^2 \frac{12}{\sqrt{2}}$       $S = (6\sqrt{2})l^2$

Volume del solido (doppio volume del cubo)      $V = 2l^3$



Schema di rombocubododecaedro

NB. tagliare lungo le linee intere, piegare le tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati.



# 31 triacisottaedro $(24F + 14V = 36S + 2)$

Consideriamo i solidi che nascono dall'ottaedro per sovrapposizioni di piramidi, cioè la classe dei solidi: triacisottaedri.

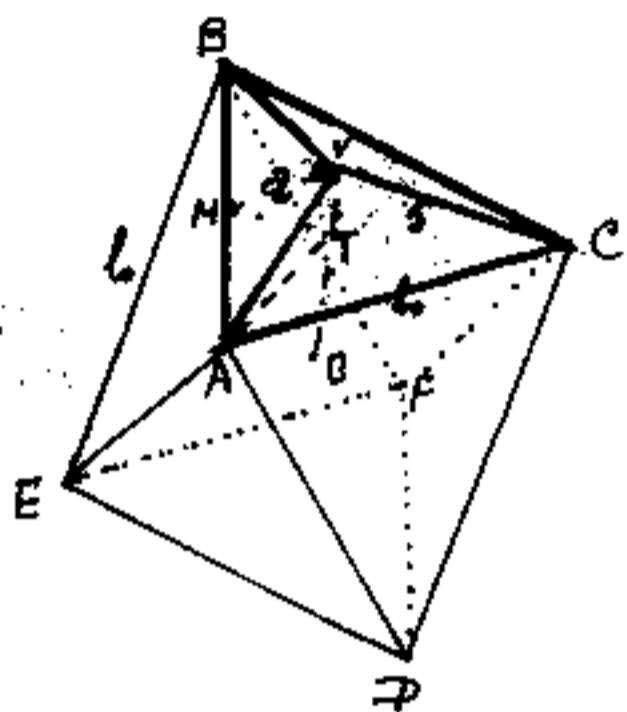
Per l'ottaedro sappiamo che il raggio della sfera circoscritta è:  $\rho_s = \frac{l_0}{\sqrt{2}}$ , (ove:  $l_0$  = spigolo dell'ottaedro). Poiché il raggio della sfera inscritta è:  $r_i = \frac{l_0}{\sqrt{6}}$  avremo che se:  $\overline{TV} = K l_0$  è l'altezza delle piramidi aggiunte; affinché anche il loro vertice sia sulla sfera circoscritta dovrà essere:  $r_i + TV = \rho_s$ , cioè:  $\overline{TV} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) l_0$  od anche:  $K = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,29885849$  è il coefficiente dei triacisottaedri inscrittibili in una sfera.

Sappiamo che aggiungendo all'ottaedro le piramidi dei poliedri angoloidi che formano il tetraedro si ottiene il combododecaedro. L'altezza di tali piramidi è  $\overline{TV} = \frac{l_0}{2\sqrt{6}}$ , ( $K = \frac{1}{2\sqrt{6}} = 0,204124145$ ). Essendo il combododecaedro anche solido di transizione fra i triacisottaedri convessi, ed i triacisottaedri concavi, essendo:  $0,204124145 < 0,29885849$ , si ha che il triacisottaedro inscritto in una sfera è concavo.

Abbiamo già visto che un triacisottaedro concavo, ha gli stessi vertici di un tetracisesaedro convesso.

(vedi capitolo tetracisesaedri)

Analogamente agli altri solidi, cerchiamo di determinare gli elementi in funzione di  $K$ . ed indichiamo con  $l_0$  lo spigolo dell'ottaedro.



Si noti che le piramidi avendo la stessa base triangolare equilatera di quelle sovrapposte al tetraedro, quindi le espressioni in funzione di  $K$  saranno uguali, salvo il diedro  $\hat{D}_0$ , perché il diedro dell'ottaedro

l'ottaedro ( $109^\circ 28' 16''$ ) è diverso dal diedro del tetraedro ( $70^\circ 31' 44''$ ). Avremo quindi:  $\overline{VT} = K l_0$  ;  $\overline{MV} = a = l_0 \sqrt{K^2 + \frac{1}{12}}$

$$\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = s = l_0 \sqrt{K^2 + \frac{1}{3}} \quad ; \quad h_3 = \frac{l_0}{2} \sqrt{\frac{1+12K^2}{1+3K^2}}$$

angoli delle facce:

- al vertice =  $2 \arcsin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{K^2 + \frac{1}{3}}}\right)$
- alla base =  $2 \arccos\left(\frac{1}{2} \sqrt{K^2 + \frac{1}{3}}\right)$

angoli diedri:

fra faccia e base delle piramidi:  $\hat{D}_L = \arctg(2K\sqrt{3})$

fra facce su  $s$ :  $\hat{D}_s = 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+3K^2}{1+12K^2}}\right) = \hat{D}_s = 2 \arccos\left(\frac{3K}{\sqrt{1+12K^2}}\right)$

$$\hat{D}_s = 2 \arctg\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right)$$

fra facce aventi in comune  $l_0 = \hat{D}_0 = (2\hat{D}_L + \text{diedro dell'ottaedro})$

$$\hat{D}_0 = 2 \arctg(2K\sqrt{3}) + 2 \arctg(\sqrt{2})$$

affinche' gli angoli diedri siano uguali dovrà essere:

$$\boxed{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right) - \operatorname{arctg}(K\sqrt{12}) = \operatorname{arctg}(\sqrt{2})}$$

Il  $K$  che soddisfa l'equazione è:  $K = 0,0990576457$ ;  
 $K^2 = 0,0098124172$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right) = 73^\circ 40' 30'',1202$$

$$\operatorname{arctg}(K\sqrt{12}) = 18^\circ 56' 21'',9830$$

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{2}) = \underline{\underline{54^\circ 44' 08'',1972}} \quad (\text{Verificato})$$

calcoliamo gli elementi del solido a diedri uguali ( $K = 0,0990576457$ );  $l_0 =$  spigolo ottaedro.

$$\underline{\text{spigolo piramidi}} = s = l_0(0,585786437)$$

$$\underline{\text{apotema}} \quad a = l_0(0,305197887)$$

angoli delle facce:

$$\underline{\text{al vertice}} = \underline{147^\circ 12' 02'',05}$$

$$\underline{\text{alla base}} = \underline{37^\circ 23' 58'',97}$$

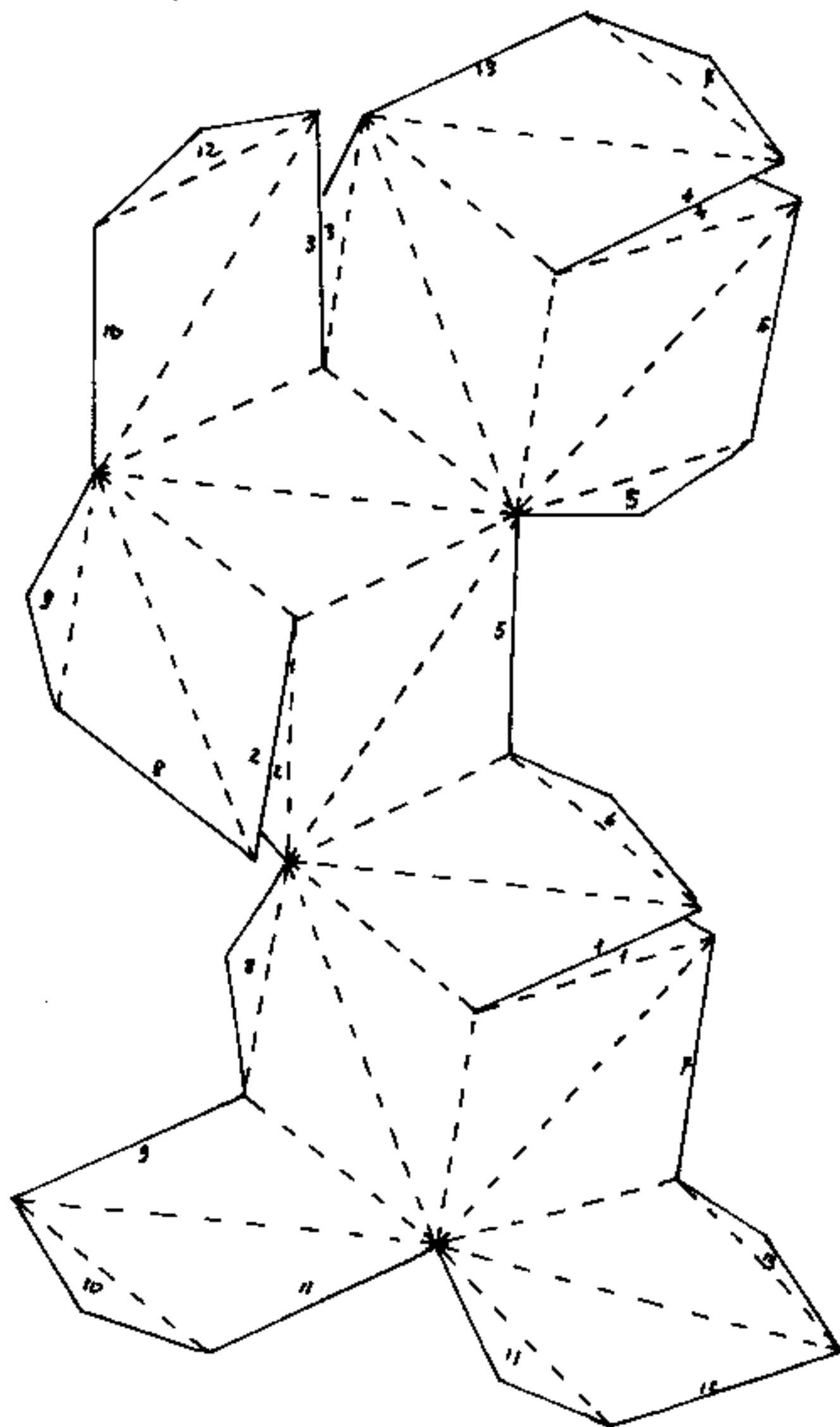
angoli diedri

$$\hat{D}_s = \underline{\underline{147^\circ 21' 00'',36}}$$

$$\hat{D}_l = 37^\circ 52' 43'',97 + 109^\circ 28' 16'',39 = \underline{\underline{147^\circ 21' 00'',36}}$$

# Schema di triacisottaedro a diedri uguali

( $\kappa = 0,0990576457$ )



Tagliare lungo le linee intere, piegare lungo le tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati.

Abbiamo visto che l'altezza  $\overline{TV}$  delle piramidi da aggiungere all'ottaedro, affinché tutti i vertici siano sulla sfera di raggio:  $r_s = \frac{l_0}{\sqrt{2}}$ , è  $\overline{TV} = l_0 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$   
 $\overline{TV} = l_0(0,29885849)$  da cui, essendo le piramidi a base triangolare equilatera di lato  $l_0$ , avremo:

$$\text{spigolo} = s = \sqrt{\overline{TV}^2 + \left(\frac{l_0}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right)l_0^2} = s = l_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\text{apotema} = a = \sqrt{\overline{TV}^2 + \left(\frac{l_0}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\right)l_0^2} = a = \frac{l_0}{2} \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{altezza rispetto ad } s = h_s = \frac{a l_0}{s} = \frac{l_0}{2} \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{3}{3-\sqrt{3}}\right) = h_s = \frac{l_0}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{3}}{2}}$$

### Angoli piani

di una faccia  $\left\{ \begin{array}{l} \text{al vertice} = 2 \arccos\left(\frac{4a}{s}\right) = 2 \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\right) = \\ \text{alla base} = \arccos\left(\frac{e/2}{s}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{3-\sqrt{3}}}\right) = \end{array} \right.$

al vertice =  $100^\circ 32' 43",046$

alla base =  $39^\circ 43' 38",48$

Angoli diedri: fra faccia e base della piramide =  $\hat{D}_2$

$$\hat{D}_2 = \arctg\left(\frac{\overline{TV}}{\frac{l_0}{2\sqrt{3}}}\right) = \arctg(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = \hat{D}_2 = 45^\circ 59' 34",70$$

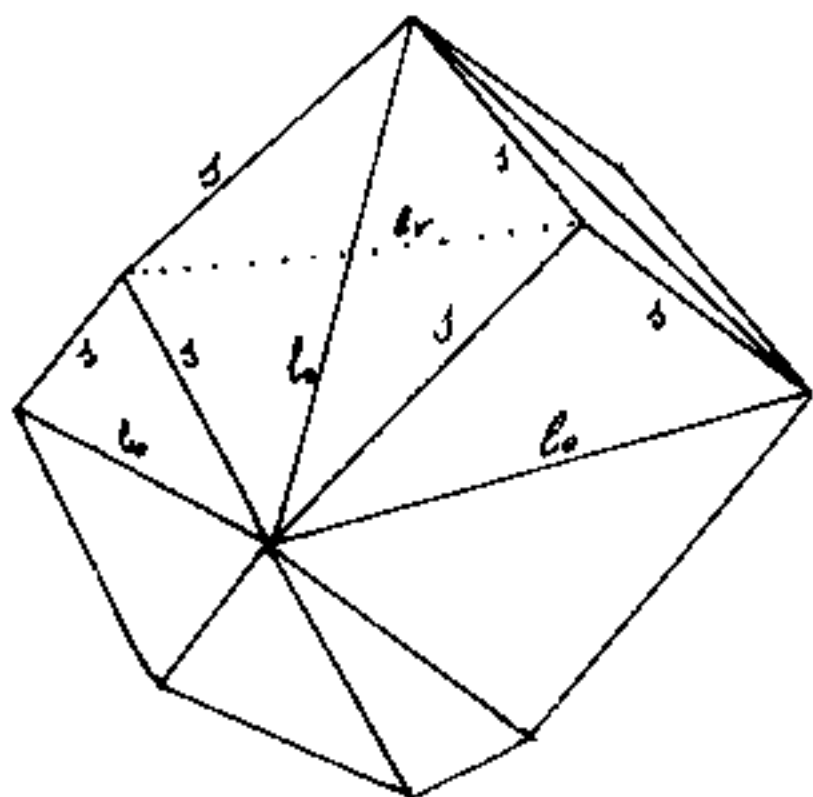
$$\hat{D}_e = 2\hat{D}_2 + \text{Dottaedro} = (91^\circ 59' 9",4 + 109^\circ 28' 16",39) = \hat{D}_e = 201^\circ 27' 25",8$$

angolo concavo verso l'esterno:  $(360^\circ - \hat{D}_e) = 158^\circ 32' 34",2$

$$\hat{D}_3 = 2 \arccos\left(\frac{l_0/2}{l_0}\right) = 2 \arccos\left(\sqrt{\frac{3}{5-\sqrt{3}}}\right) \quad \hat{D}_3 = 102^\circ 56' 40",6$$

Se, fermi restando gli spigoli  $s$  delle piramidi, anziché unire i vertici dell'ottaedro uniamo i vertici delle piramidi, si ottiene un solido convesso di 24 facce triangolari. Detta  $l_v$  la distanza di tali vertici, calcoliamo  $l_v$  ed avremo:

$$l_v = 2 \int_4 \sin\left(\frac{70^\circ 31' 43''}{2}\right) = l_0 (0,81649658), \text{ ove } 70^\circ 31' 43'' \text{ è}$$



l'angolo dei due raggi che dal centro vanno ai vertici delle piramidi:  $(180^\circ - 109^\circ 28' 16'' 33)$ .

Oppure:  $l_v = 2a \sin\left(\frac{\hat{D}_4}{2}\right)$  cioè:

$$l_v = \frac{2l_0}{2} \sqrt{\frac{2-4\sqrt{3}}{3}} \sin\left(\frac{158^\circ 33' 34'' 2}{2}\right) =$$

$$l_v = l_0 (0,81649658)$$

Il solido che ne risulta è

un tetracisesaedro inscrittibile in una sfera (ha gli stessi vertici del triacisottaedro ove si è scambiato  $l_v$  con  $l_0$ ).

$l_v = l_c$  è lo spigolo del cubo base al quale sono sovrapposte piramidi a base quadrata. Lo spigolo delle piramidi è immutato:  $s = l_0 \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = l_0 (0,650115167)$

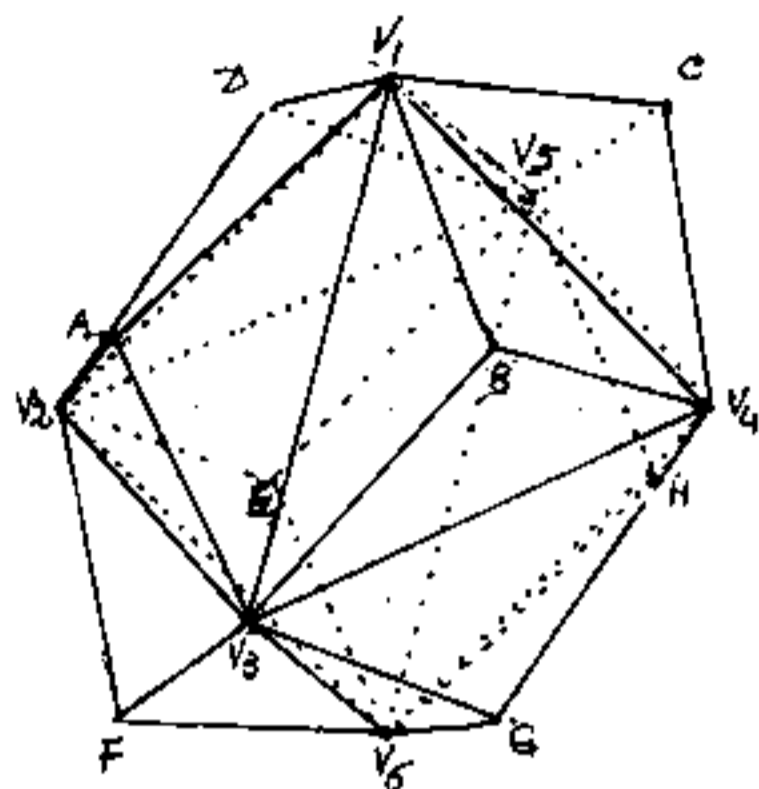
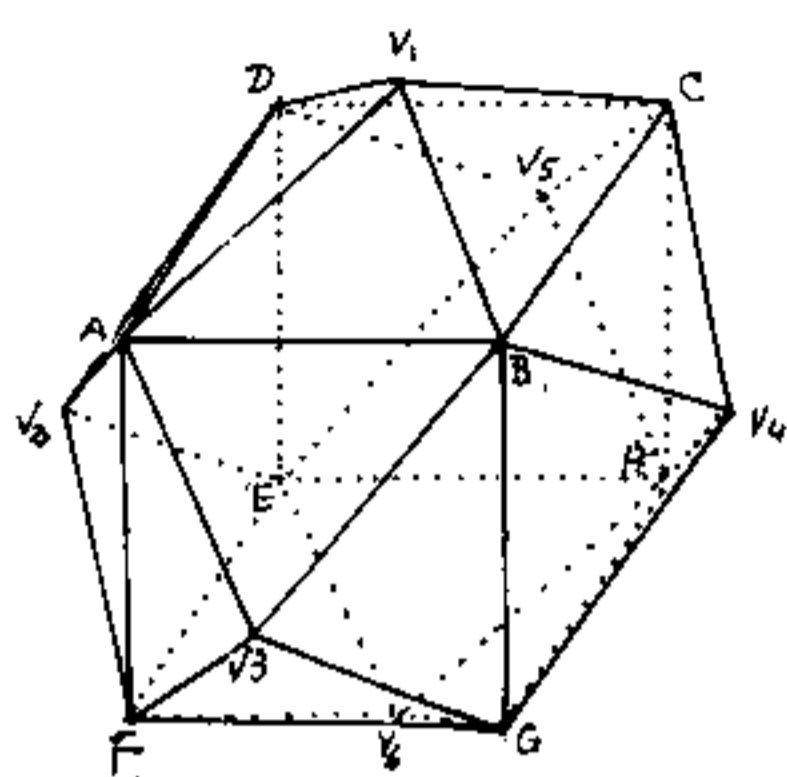
e sostituendo:  $l_0 = l_v / 0,81649658$  si ha  $s = l_v \frac{0,650115167}{0,81649658}$

$s = l_v (0,796225217)$  valore che abbiamo già trovato trattando i solidi derivati dal cubo.

I 14 vertici che sono sulla superficie sferica (8 vertici del cubo e 6 vertici dell'ottaedro) corrispondono al tetraedro inscritto nella sfera, (4 vertici) a cui aggiungiamo i raggi che dal centro vanno ai centro-faccia del tetraedro (4 vertici) ed i raggi che passano per il punto medio degli spigoli del tetraedro (6 vertici). I punti intercettati sulla superficie sferica sono gli stessi vertici del

triacisottaedro o del tetracisesaedro

In figura diamo il disegno separato dei due solidi



che hanno gli stessi vertici. Notiamo che dai vertici del tetracisesaedro si dipartono o 4 spigoli o 6 spigoli. Dai vertici del triacisottaedro si dipartono o 3 spigoli od 8 spigoli. (Qui si sono indicati con le lettere A, B, C, D, E, F i vertici dell'ottaedro, e con la V numerata da 1 ad 8 i vertici del cubo). Si noti che gli spigoli delle piramidi aggiunte sono, nei due solidi, gli stessi.

Se consideriamo il tetraedro come solido base sulle sue quattro facce si installano sei facce cosicché questi due solidi sono anche chiamati: esocistetraedri. Quindi vi sono due esocistetraedri aventi gli stessi vertici. Se consideriamo la faccia del tetraedro ACG, ove dal centro faccia si erge il vertice B la figura sovrapposta è: AV<sub>1</sub>CV<sub>4</sub>GV<sub>3</sub>. diverso nei due casi: (concavo o convesso).

Se consideriamo un sistema di assi cartesiani  $o, x, y, z$ , l'intersezione con una sfera al centro di raggio  $\rho_s = \frac{l_0}{\sqrt{2}}$ , determina su ciascun asse un vertice dell'ottaedro.

Ma tali assi possono anche riguardarsi come le rette di giacitura dei piani delle facce del cubo. La distanza  $s$  fra i vertici del cubo ed i vertici dell'ottaedro sono gli spigoli delle due classi di solidi (triacisottaedri e tetracisesaedri). Consideriamo fisso lo spigolo:  $s = 1$ ; e sia inizialmente  $l_0 = 0$ , cioè l'ottaedro è ridotto ad un punto al centro assi, il cubo avrà uno spigolo:  $l_c = (\frac{2}{3}\sqrt{3})s$ , ed il tetracisesaedro avrà  $\kappa_c < 0$  cioè  $\kappa_c = -\frac{l_c}{s}$ ;  $\boxed{\kappa_c = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$ .

Quando  $\kappa_c = 0$  i vertici dell'ottaedro giacciono al centro delle facce del cubo;  $l_c = (\sqrt{2})s$ ;  $l_0 = s$ ; il triacisottaedro avrà:  $\kappa_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ; il tetracisesaedro si identifica col cubo a facce rigate dalle diagonali. Da questo punto in poi i vertici dell'ottaedro che erano inizialmente interni al cubo ( $\kappa_c < 0$ ) diventano esterni; teniamo fisso lo spigolo  $s$ , arriveremo che lo spigolo  $l_0$  dell'ottaedro uguaglia lo spigolo  $l_c$  del cubo:  $l_0 = l_c = \frac{2s}{\sqrt{5-\sqrt{3}}}$ , poi  $l_0$  diventa maggiore di  $l_c$ , si arriva al punto che i vertici dell'ottaedro e del cubo sono sulla stessa superficie sferica, ove:  $l_0/l_c = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ;  $l_0 = s \cdot \sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{3}}}$ ;  $l_c = s \sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{3}}}$ .



Per ora il tetracisesaedro si mantiene convesso, mentre il triacisottaedro presenta diedri concavi, finché i due solidi si unificano nel rombododecaedro le 24 facce triangolari diventano 12 rombiche, di spigolo "s":  $l_o = s\sqrt{\frac{2}{3}}$  ;  $l_c = s\sqrt{\frac{4}{3}}$  ; solido convesso.

Nel rombododecaedro:  $l_c/l_o = \sqrt{2}$  ; fermo restando lo spigolo s, continuando a crescere lo spigolo  $l_o$  dell'ottaedro rispetto a quello del cubo, il triacisottaedro diventa convesso, il tetracisesaedro presenterà diedri concavi.

Quando i vertici del cubo stanno sui centri delle facce dell'ottaedro il triacisottaedro il cui  $K_o = 0$  diventa un ottaedro a facce rigate, mentre il tetracisesaedro il cui  $K_c = 1$  è un cubo con sovrapposte piramidi alte quanto lo spigolo l del cubo.

$$l_o = s\sqrt{3} ; \quad l_c = s\sqrt{\frac{2}{3}} ;$$

Da qui in poi il  $K_o$  dell'ottaedro diventa negativo  $K_o < 0$ , fino al limite:  $K_o = -\frac{1}{\sqrt{6}}$  ; ove i vertici delle piramidi aggiunte (tolte) sono al centro dell'ottaedro;  $l_o = -s\sqrt{2}$  ;  $l_c = 0$  ; il cubo è divenuto puntiforme al centro dell'ottaedro svuotato, cui è rimasta la superficie degli angoloidi che lo compongono.

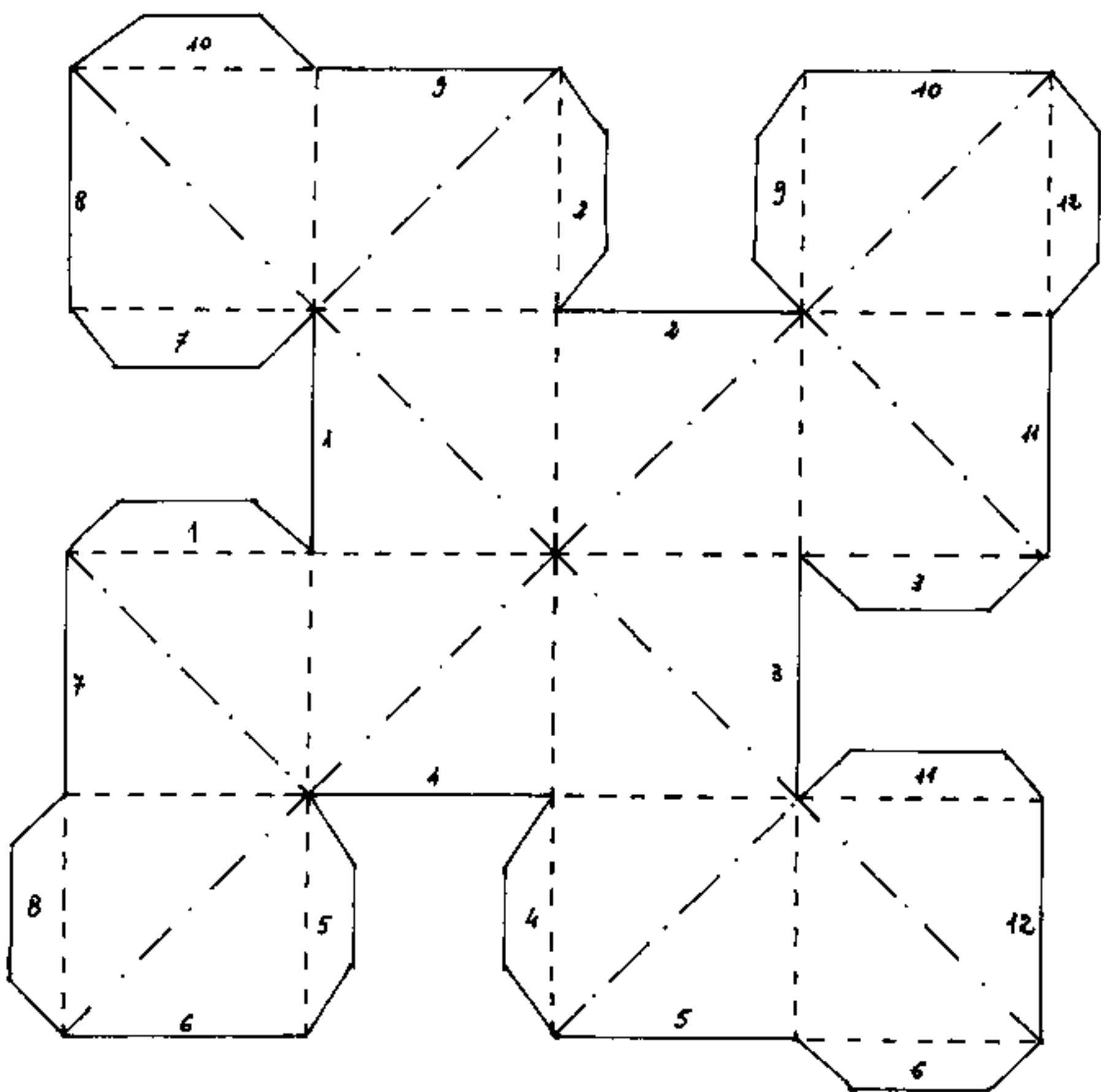
$K_c = \infty$  ; "il tetracisesaedro è ridotto a sei segmenti uscenti da un punto lunghi s e disposti come gli assi cartesiani  $\pm x$  ;  $\pm y$  ;  $\pm z$  .

# TABELLA dei Tricisottaedri

K	s/e.	$\hat{D}_L$	$\hat{D}_S$	angoli delle facce		NOTE	TETRACISEAEDRI - stessi Vertici		
				al vertice	alla base		K	s/e.	NOTE
0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ 0,577350269	109° 28' 16"	180°	120°	30°	ottaedro a facce rigate	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$ 0,471404521	cubo con sovrapposte piramidi alte $l_c = l$ concavo
$\sqrt{3} - \sqrt{3}$ 0,0990576457	$2 - \sqrt{2}$ 0,5857864376	147° 21' 00",36	147° 31' 00",66	117° 12' 02",05	31° 23' 59"	triacisottaedro a diedri uguali	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	$2 - \sqrt{2}$ 0,5857864376	a facce equilateri exaedron elevatus
$\frac{\sqrt{6}}{12}$ 0,2041241452	$\frac{\sqrt{6}}{4}$ 0,6123724357	180°	120°	109° 28' 16",314	35° 15' 51",80	Rombododecaedro a facce rigate secondo la diagonale maggiore	$\frac{1}{2}$ 0,5	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	Rombododecaedro a facce rigate secondo la diagonale minore
$(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}})$ 0,288584907	$\sqrt{1 - \frac{1}{3}}$ 0,650851673	201° 27' 25",774 (concavo) 158° 32' 34",202	102° 56' 40",619	100° 32' 43",416	39° 43' 38",477	triacisottaedro con concavità inscrittibile in una sfera	$(\sqrt{3} - 1)/2$ 0,3660254038	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 0,577350269	tetracisesaedro convesso inscrittibile in una sfera
$\frac{1}{\sqrt{6}}$ 0,40824829	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	218° 56' 32",7 (concavo) 141° 03' 27",21	90°	90°	45°	triacisottaedro a diedri retti e facce con angolo retto	$\frac{1}{4}$ 0,25	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 0,942809	Tetracisesaedro a diedri uguali (convesso)
$\frac{\sqrt{11} - \frac{1}{3}}{12}$ 0,457777113	$\frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$ 0,736812879	225° 00' 00" (concavo) 135° 00' 00"	85° 48' 3",08	85° 28' 6",31	47° 15' 56",85	triacisottaedro avente $l_0 = l_c$ $l_0 =$ spigolo ottaedro $l_c =$ " cubo	$\frac{(\sqrt{2} - 1)}{2}$ 0,207106781	1	tetracisesaedro avente $l_c = l_0$ $l_c =$ spigolo cubo $l_0 =$ " ottaedro
$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 0,81649658	1	350° 51' 43",6 (concavo) 109° 28' 16",3	70° 31' 43",61	60°	60°	triacisottaedro con piramidi tetraedriche intersezione di due tetraedri ortocedrus elevatus.	0	$\sqrt{2}$ 1,414213562	cubo a facce rigate delle diagonali
1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$ 1,154700538	257° 16' 01",8 (concavo) 102° 43' 58",82	67° 22' 48",09	57° 19' 04",13	67° 20' 27",34	triacisottaedro con piramidi alle $l_0$	-0,130304379	1,621051	cubo scavato dalle piramidi

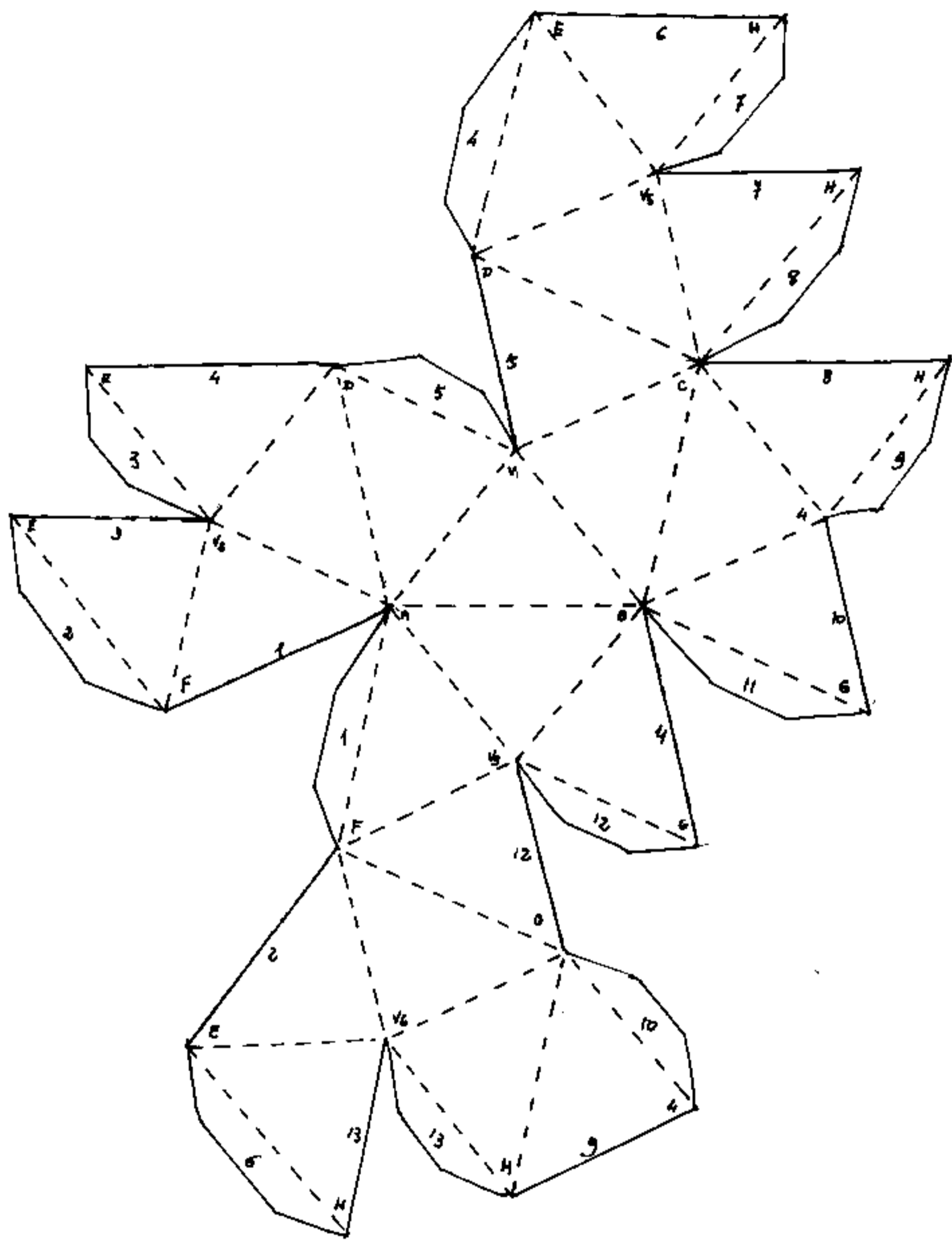
Schema di triacisottaedro ( $\kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ) avente gli stessi vertici (e lo stesso  $s = 3 \text{ cm.}$ ) del tetracisesaedro a diedri uguali ( $\kappa_0 = \frac{1}{4}$ ) (vedi cap. tetracisesaedri).

$$s = l_0/\sqrt{2} ; a = l_0/2 ; \text{Area} = 12l_0^2 ; V = \frac{l_0^3}{3}(\sqrt{3} + \frac{8}{\sqrt{6}}) ; l_V = l_0 = 4 \text{ cm.}$$



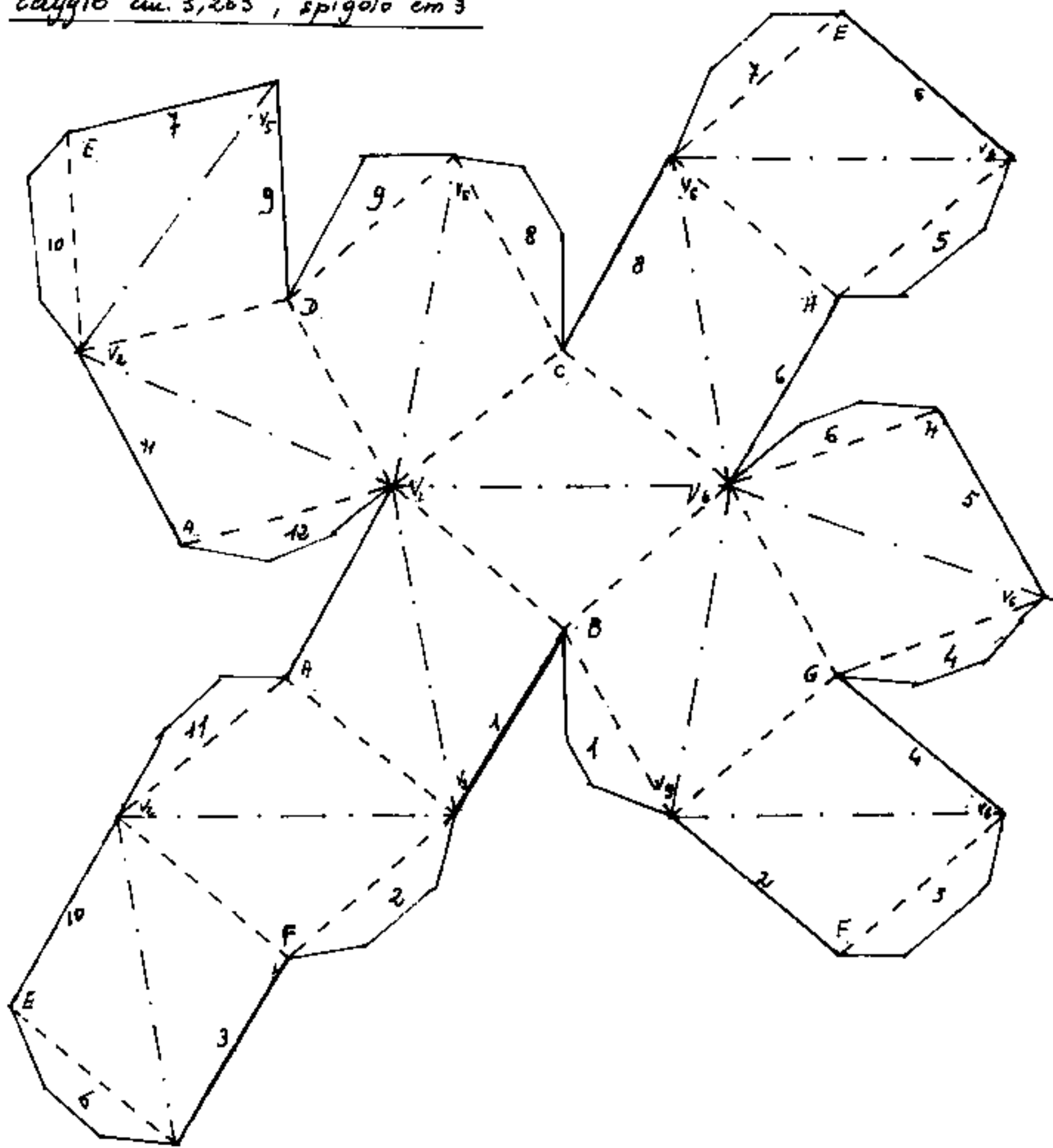
n.B. Tagliare lungo le linee intere, piegare convesso le linee a tratteggio semplice, piegare concavo le linee a tratto e punto, incollare le linguette facendo coincidere gli spigoli con lo stesso numero. Per avere piegature nitide incidere le linee della parte convessa.

Schema di tetracosiesaedro inscritto in una sfera  
di raggio cm 3,263 ; spigolo cm 3



Tagliare lungo le linee intere, piegare le tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati. (stessi rettilici del triacosotetraedro r.)

Schema di triacisottaedro inscrittibile in una sfera di  
raggio cm. 3,263 ; spigolo cm 3



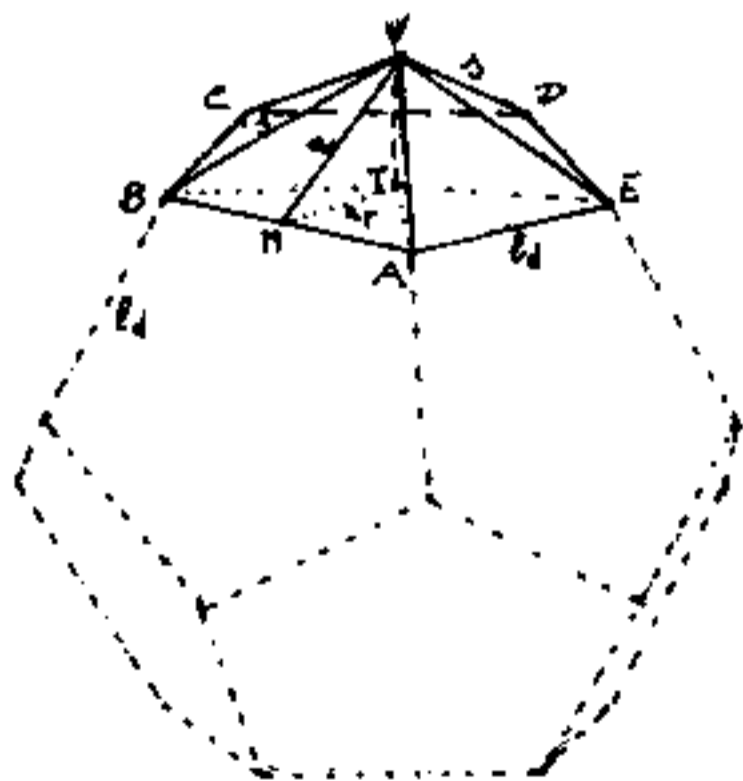
N.B - tagliare lungo le linee intere, piegare convesso le linee a semplice tratteggio, piegare concavo le linee a tratto e punto, incollare le linguette facendo coincidere gli spigoli portanti lo stesso numero. (piegature più nitide si hanno se incidiamo col rifilatore le linee dalla parte convessa) (stessi vertici del tetracisesaedro V.)

# 11 Pentacisdodecaedro

Aggiungendo piramidi pentagonali alle facce del dodecaedro, si ha la classe dei solidi detta dei pentacisdodecaedri. Sono solidi di  $5 \times 12 = 60$  facce;  $20 + 12 = 32$  vertici;  $30 + 5 \times 12 = 90$  spigoli;  $(F+V=5+2)$  ( $60+32=90+2$ ).

A seconda dell'altezza  $\overline{TV}$  delle piramidi aggiunte, si possono avere solidi con caratteristiche particolari, determinati dalle condizioni imposte:

- 1) a diedri uguali (solido convesso)
- 2) inscrittibile in una sfera ( " " )
- 3) facce rombiche (diedro  $180^\circ$  - 30 facce di due triangoli)
- 4) facce triangolari equilateri (solido concavo detto anche: Duodecedron Elevatus Solidus.)



$l_d$  = spigolo del dodecaedro

$\overline{TV} = Kl_d$  = altezza piramidi

$$\overline{NT} = a_p = \frac{l_d}{2} \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\overline{MV} = a = \sqrt{\overline{TV}^2 + \overline{NT}^2} = \boxed{a = \frac{l_d}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}} + 4K^2}}$$

$$\overline{AT} = R_p = l_d \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

$$\overline{AV} = s = \sqrt{\overline{TV}^2 + \overline{AT}^2} = \boxed{s = l_d \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + K^2}}$$

diagonale del pentagono =  $\overline{AC} = d_p = l_d \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$

altezza relativa allo spigolo  $s = h_s = \frac{l_d \cdot a}{s} = \boxed{h_s = l_d \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}+20K^2}{10+2\sqrt{5}+20K^2}}}$

## Angoli delle facce

$$\underline{\text{al vertice}} = 2 \arcsen\left(\frac{h_d}{2s}\right) = \boxed{2 \arcsen\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + K^2}}\right)}$$

$$\underline{\text{alla base}} = \arccos\left(\frac{h_d}{2s}\right) = \boxed{\arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + K^2}}\right)}$$

## Angoli diedri

$$\underline{\text{Del dodecaedro}} = \hat{D}_d = \arctg(-2) = 3 \arctg\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \underline{116^\circ 33' 54", 18}$$

$$\hat{D}_{d/2} = \underline{1,017221968 \text{ rad} = 58^\circ 16' 57", 09}$$

$$\underline{\text{Alla base delle piramidi}} = \hat{D}_b = \widehat{MT} = \arctg\left(\frac{\overline{TV}}{\overline{MT}}\right) =$$

$$\boxed{\hat{D}_b = \arctg\left(2K\sqrt{5-\sqrt{20}}\right)}$$

$$\underline{\text{Fra le facce delle piramidi}} = \hat{D}_s = 2 \arcsen\left(\frac{d_p}{2h_s}\right)$$

$$\boxed{\hat{D}_s = 2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} \sqrt{\frac{10+\sqrt{20}+20K^2}{5+\sqrt{20}+20K^2}}\right)}$$

$$\boxed{\hat{D}_s = 2 \arctg\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3,2}+(3+\sqrt{5})K^2}{(5-\sqrt{5})K^2}}\right)}$$

$$\underline{\text{sullo spigolo del dodecaedro}} = \hat{D}_e = (\hat{D}_d + 2\hat{D}_b)$$

$$\boxed{\hat{D}_e = 2 \arctg\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + 2 \arctg\left(2K\sqrt{5-\sqrt{20}}\right)}$$

La condizione di uguaglianza dei diedri:  $(\hat{D}_s = \hat{D}_e)$   
porta all'equazione: (dividendo per 2)

condizione: a diedri uguali

$$\arctg\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}, 2+(3+\sqrt{5})K^2}{(5-\sqrt{5})K^2}}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \arctg\left(2K\sqrt{5-\sqrt{20}}\right)$$

che può scriversi:  $\frac{\hat{D}_3}{2} - \hat{D}_2 = \hat{D}_4/2$

poiché:

$$\tan\left(\frac{\hat{D}_3}{2} - \hat{D}_2\right) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

cioè:

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}, 2+(3+\sqrt{5})K^2}{(5-\sqrt{5})K^2}}\right) - \left(2K\sqrt{5-\sqrt{20}}\right)}{1 + \left(2K\sqrt{5-\sqrt{20}}\right)\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}, 2+(3+\sqrt{5})K^2}{(5-\sqrt{5})K^2}}\right)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

L'equazione risulta soddisfatta per  $K = 0,2515255344147$

sostituendo si ha:

angoli delle facce  $\left\{ \begin{array}{l} \text{al vertice } 68^\circ 37' 7'',395 \\ \text{alla base } 55^\circ 41' 26'',302 \end{array} \right.$

angoli diedri:  $\hat{D}_3 = 156^\circ 43' 06'',79$

$$\hat{D}_2 = 20^\circ 04' 36'',3 \rightarrow 2\hat{D}_2 = 40^\circ 09' 12'',61$$

$$\hat{D}_4 = 116^\circ 33' 54'',18$$

$$\hat{D}_4 = 156^\circ 43' 06'',79$$

che verifica:  $\hat{D}_3 = \hat{D}_4$

$a = l_4(0,732715423)$ ;  $s = l_4(0,887057998)$ ;



Calcoliamo il pentadodecaedro inscrittibile in una sfera.

raggio della sfera circoscritta al dodecaedro =  $\rho_2 = l_d \left( \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \right)$

raggio della sfera inscritta nel dodecaedro =  $r_i = \frac{l_d}{2} \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$

altezza delle piramidi:  $\overline{TV} = (\rho_2 - r_i) = \frac{l_d}{2} \left( \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} \right)$

$\kappa = 0,287742174$

apotema del pentagono =  $a_p = \frac{l_d}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{20}}{5}} = (0,68819096) l_d$

apotema delle facce =  $a = \sqrt{\overline{TV}^2 + a_p^2} = \boxed{a = (0,745923827) l_d}$

spigolo delle piramidi =  $s = \sqrt{a^2 + \left(\frac{l_d}{2}\right)^2} = \boxed{s = (0,897999084) l_d}$

angoli delle facce

- al vertice =  $\arccos\left(\frac{l_d}{2s}\right) = \boxed{67^\circ 40' 7",19}$
- alla base =  $\arccos\left(\frac{l_d}{2s}\right) = \boxed{56^\circ 09' 56",41}$

Angoli diedri (del dodecaedro =  $\hat{D}_d = 116^\circ 33' 54",1$ )

alla base delle piramidi =  $\hat{D}_b = \arctg\left(\frac{\overline{TV}}{a_p}\right) = \boxed{\hat{D}_b = 22^\circ 41' 25",73}$

sullo spigolo delle piramidi =  $\hat{D}_s = \arccos\left(\frac{a_p}{\frac{d_p}{2h_s}}\right) = \boxed{\hat{D}_s = 153^\circ 47' 22"$

sulle facce adiacenti  $l_d = \hat{D}_d = \hat{D}_d + \hat{D}_b = \boxed{\hat{D}_d = 161^\circ 56' 45"$

Essendo diversi gli angoli diedri  $\hat{D}_s \neq \hat{D}_d$  non puo' esistere la sfera inscritta nel solido.

Calcoliamo ora la condizione che le facce  
adiacenti lo spigolo  $l_4$  siano complanari,  
 cioè che:  $\hat{D}_4 = 180^\circ = (\hat{D}_d + 2\hat{D}_b)$ ;

ed anche:  $\hat{D}_b = \frac{1}{2}(180 - D_d) = \boxed{\hat{D}_b = 31^\circ 43' 02'', 908}$

ed essendo:  $\frac{\overline{TV}}{a_p} = \frac{K l_4}{0,68819096 l_4} = \operatorname{tg}(\hat{D}_b) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

avremo:

$$K = (0,68819096) \operatorname{tg}(31^\circ 43' 02'', 908)$$

$$\boxed{K = 0,425325404} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{10 + \sqrt{20}}{5}}$$

$\overline{TV} = K l_4$  ;  $s = \sqrt{R_p^2 + \overline{TV}^2}$  ; ove  $R_p =$  raggio del pentagono

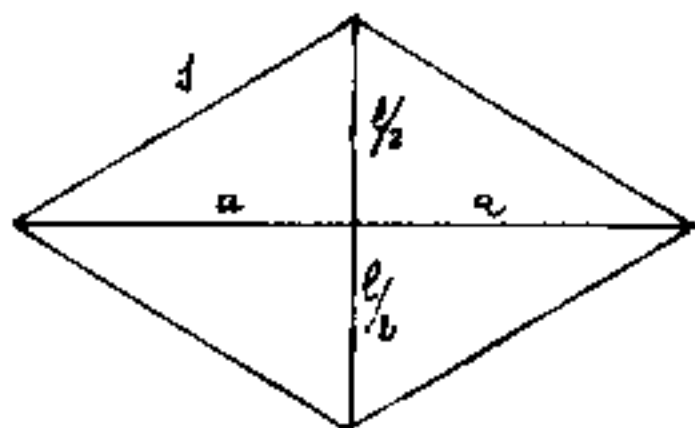
$R_p = l_4 \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} = (0,850650808) l_4$  ;  $\boxed{s = l_4 \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = l_4 (0,951056516)}$

$a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_4}{2}\right)^2}$   $\boxed{a = l_4 (0,809016994)} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \left(\frac{\sqrt{5 + 1}}{4}\right)$

In questo solido  $s =$  lato delle facce rombiche

$l_4 =$  diagonale minore del rombo

$a =$  diagonale maggiore del rombo



angoli delle facce:

$$2 \arctg\left(\frac{l_4}{2a}\right) = 63^\circ 26' 5'', 82$$

$$2 \arctg\left(\frac{2a}{l_4}\right) = 116^\circ 33' 54'', 1$$

angoli diedri

$$l_3 = \frac{l_4 a}{s} = (0,850650808) l_4$$

$$\hat{D}_3 = 2 \arccos\left(\frac{l_4}{2 l_3}\right) = \boxed{\hat{D}_3 = 144^\circ}$$

$$\boxed{\hat{D}_4 = 180^\circ}$$

La condizione che le facce siano triangoli equilateri, si traduce in:  $s = la$

$$\overline{TV} = \sqrt{l^2 - R_p^2} = l \sqrt{1 - \frac{5 + \sqrt{5}}{10}} = \overline{TV} = l \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

$$K = 0,52573112 = \left(\frac{\overline{TV}}{l}\right)$$

$$a = \sqrt{\overline{TV}^2 + a_p^2} = l \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10} + \frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}} = l \sqrt{\frac{10 + 5}{20}} = l \sqrt{\frac{3}{4}} = \left(a = \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$h_s = a = \frac{l\sqrt{3}}{2};$$

angoli delle facce: al vertice = alla base =  $60^\circ$ .

angoli diedri:

alla base delle piramidi  $\hat{D}_2 = \arctg\left(\frac{\overline{TV}}{a_p}\right) = \arctg\left(\sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})^2}{5 + 2\sqrt{5}}}\right)$

$$\hat{D}_2 = \arctg\left(\sqrt{\frac{10 - \sqrt{20}}{5 + \sqrt{20}}}\right) = \arctg\left(\sqrt{14 - 3\sqrt{20}}\right) = \arctg(3 - \sqrt{5}) = \boxed{\hat{D}_2 = 37^\circ 22' 38,53''}$$

$$\hat{D}_4 = 2\hat{D}_2 + \hat{D}_2 = 74^\circ 45' 17,05'' + 116^\circ 33' 54,18'' = \boxed{\hat{D}_4 = 191^\circ 19' 11,2''}$$

(angolo  $> 180^\circ$ ) perciò concavo ( $-168^\circ 40' 48,8''$ ).

$$\hat{D}_3 = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{a_p}{2a}\right) = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{\frac{\sqrt{5} + 1}{4}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{6}\right) =$$

$$\boxed{\hat{D}_3 = 138^\circ 11' 22,8''} \quad (\text{convesso})$$

Il presente solido è anche chiamato  
"Duodecedron Elevatus Solidus"

Determinati i vertici di un pentacisdodecaedro, ci domandiamo, fermi restando gli spigoli uscenti dai vertici delle piramidi, cosa avviene se invece di unire col segmento  $l_d$  i vertici del dodecaedro, uniamo i vertici delle piramidi col segmento  $l_v$ .

Per calcolare " $l_v$ " ricordiamo che l'angolo  $\gamma$  formato dalle due rette normali a due facce consecutive del dodecaedro (rette di giacitura, uscenti dal centro  $O$ ) è supplementare del diedro delle facce.  
 Per il dodecaedro  $\gamma = \arctg(2) = 63^\circ 26' 05,82''$  supplementare a  $\hat{D}_d$ .

La distanza dei vertici delle piramidi dal centro sarà:  $\overline{OV} = \overline{OT} + \overline{TV}$

$$\overline{OV} = \overline{OT} + \overline{TV} = \left( \frac{l_d}{2} \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} + Kl_d \right); \text{ perciò: } \boxed{l_v = 2\overline{OV} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right); \quad \boxed{l_v = l_d \left( \frac{3\sqrt{5}+5}{10} + 2K \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right)}$$

$$\boxed{l_v = l_d \left( 1,170820393 + K \cdot 1,051462224 \right)}$$

### Pentacisdodecaedro

a diedri uguali :  $K = 0,251525534$  ;  $\underline{l_v = l_d(1,43528939)}$

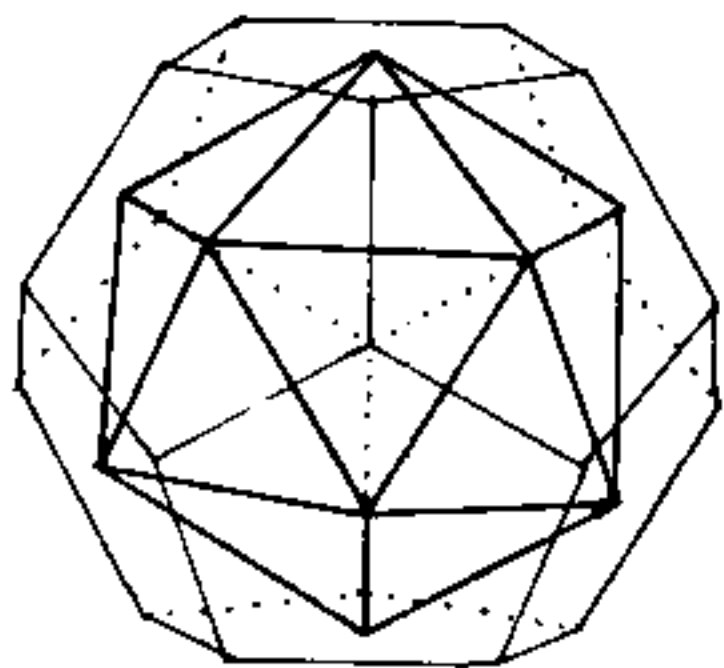
inscrittibile in una sfera :  $K = 0,287742174$  ;  $\underline{l_v = l_d(1,473370419)}$

a facce rombiche :  $K = 0,425325404$  ;  $\underline{l_v = l_d(1,618033988)}$

facce triangoli equilateri  $K = 0,525731112$  ;  $\underline{l_v = l_d(1,73606797)}$

Ma noi sappiamo che ad ogni faccia del dodecaedro (e quindi ad ogni vertice di piramide aggiunta)

Corrisponde un vertice dell'icosaedro, ed alle facce dell'icosaedro corrispondono i vertici del dodecaedro. Quindi i segmenti che uniscono i vertici delle piramidi poste sulle facce del dodecaedro sono gli spigoli di un icosaedro; in questo caso  $l_v = l_i$ , ove, con  $l_i$  si indica lo spigolo dell'icosaedro



esterno. Ma anche unendo i centro faccia del dodecaedro si ottiene un icosaedro, ove è facile vedere come aggiungendo piramidi a base triangolare alle facce dell'icosaedro

i vertici di queste piramidi sono i vertici di un dodecaedro. Questo triacisicosaedro è concavo, mentre il pentacisdodecaedro è convesso ed è al limite  $\kappa_i = 0$ .

Aumentando  $\kappa_d$ , cioè l'altezza  $\overline{TV}_d$  delle piramidi aggiunte al dodecaedro si arriva al caso limite di facce rombiche ove gli spigoli dell'icosaedro e del dodecaedro ne sono le diagonali. Aumentando ancora  $\overline{TV}_d$  il pentacisdodecaedro diventa concavo ed il triacisicosaedro convesso.

Si noti che una volta fissato il  $\kappa_d$  del pentacisdodecaedro, resta univocamente determinato il  $\kappa_i$  dell'icosaedro e viceversa.

Siano  $l_d$  ed  $l_i$  gli spigoli del dodecaedro e dell'icosaedro, solidi base del pentacisdodecaedro e del triacisicosaedro. Questi solidi derivati abbiano gli stessi vertici, e quindi la stessa lunghezza "s" degli spigoli delle piramidi aggiunte.

per la piramide pentagonale:  $s = l_d \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + K_d^2}$

per la piramide triangolare:  $s = l_i \sqrt{\frac{1+3K_i^2}{3}}$

ed essendo:  $l_i = l_d \left( \frac{3\sqrt{5}+5}{10} + 2K_d \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right)$

$$\sqrt{\frac{1+3K_i^2}{3}} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + K_d^2}}{\left( \frac{3\sqrt{5}+5}{10} + 2K_d \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right)}$$

da cui:

$$K_d = 0,251525534 \rightarrow K_i = 0,2205281797$$

$$K_d = 0,287742174 \rightarrow K_i = 0,195295202$$

$$K_d = 0,425325404 \rightarrow K_i = 0,1102610898$$

$$K_d = 0,525731112 \rightarrow K_i = 0,05721908277$$

La discussione sarà completata al capitolo del triacisicosaedro.

Quando i solidi base: dodecaedro ed icosaedro sono inscritti nella stessa sfera, si ha che i vertici sulla superficie sferica sono comuni al pentaisdodecaedro inscrittibile in una sfera e al triaicososaedro inscrittibile in una sfera.

Indicizzando con "d" e con "i" rispettivamente gli elementi sul dodecaedro e sull'icosaedro, abbiamo:  $\rho_{s(d)} = \rho_{s(i)} =$  raggio della sfera circoscritta:

$$\rho_{s(d)} = \frac{l_d}{4} (\sqrt{5} + 1)\sqrt{3} = (1,401258537)l_d; \quad \rho_{s(i)} = \frac{l_i}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = (0,951056517)l_i$$

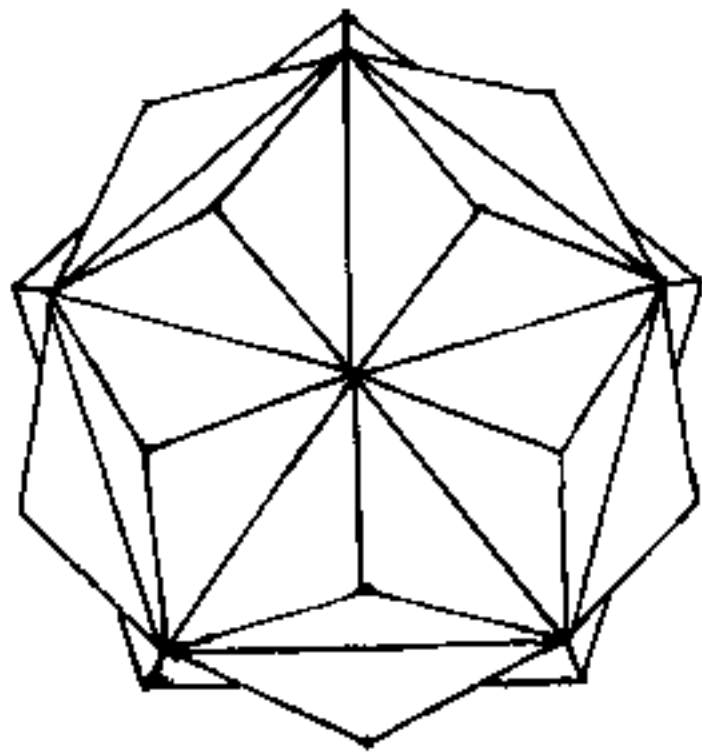
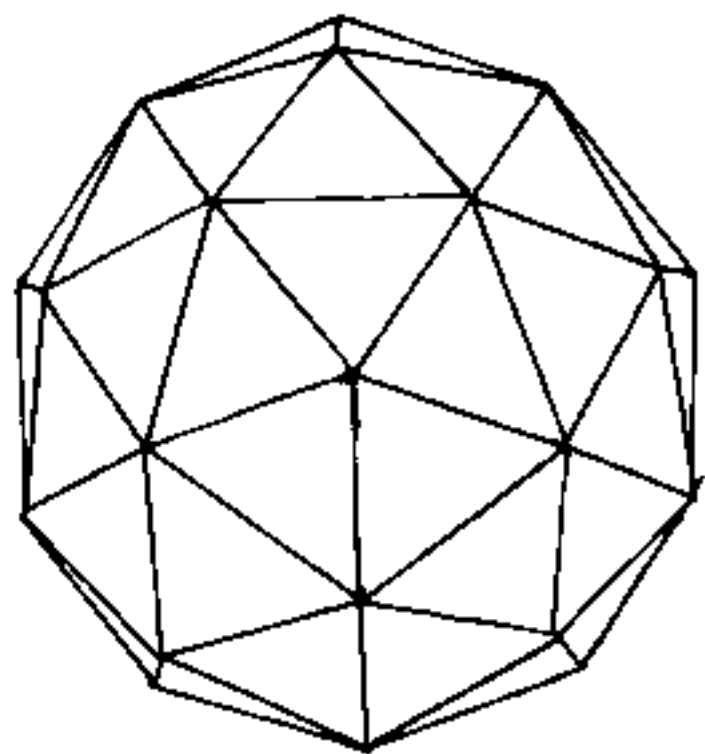
per cui:

$$l_i = (1,475370418)l_d$$

I due solidi:

pentaisdodecaedro

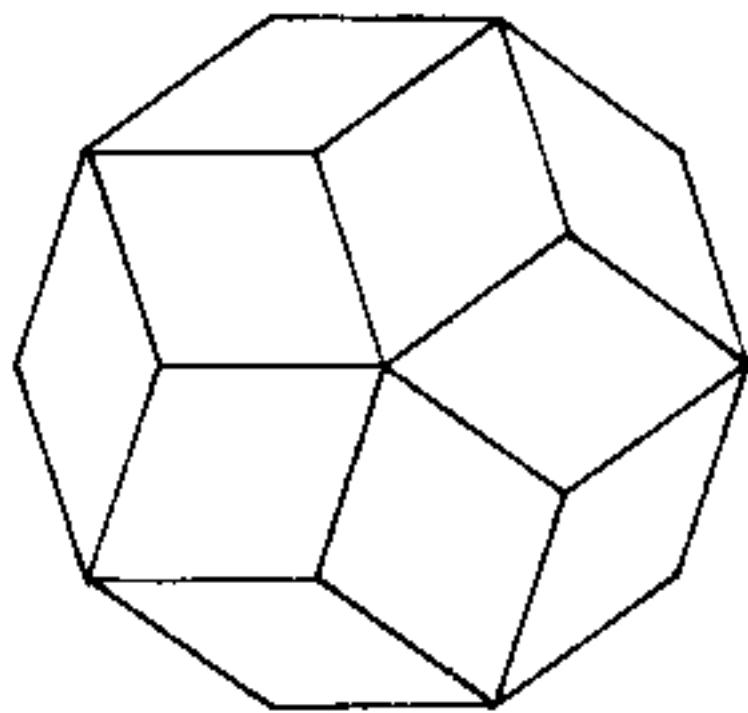
triaicososaedro



rispettivamente convesso e concavo, pur avendo gli stessi vertici assumono aspetti assai diversi. Notare che gli spigoli "3" sono gli stessi nelle due figure.

Quando il quadrilatero di quattro vertici consecutivi diventa piano, il pentacisdodecaedro ed il triacisicosaedro si unificano nel romboedro a 30 facce detto triancontaedro rombico, ove, la diagonale minore delle facce rombiche è lo spigolo del dodecaedro e figura nel pentacisdodecaedro con diedri di  $180^\circ$ . La diagonale maggiore delle facce rombiche è lo spigolo dell'icosaedro e figura nel triacisicosaedro con diedri di  $180^\circ$ .

Si è fatta una sola figura di romboedro a 30 facce senza disegnare le diagonali che nei due casi rigano le facce e cioè la diagonale minore nel pentacisdodecaedro e la diagonale maggiore nel triacisicosaedro.



Abbiamo già calcolato gli elementi del romboedro come caso limite di solido convesso

di pentacisdodecaedro ( $K_4 = 0,425325404$ )

I calcoli saranno ripetuti trattando i triacisicosaedri, ed effettueremo i confronti in tabella.



# Schema di romboedro a 30 facce

(caso limite dei pentacisdodecaedri convessi)

$l_1$  = lato dodecaedro,  $s$  = lato delle facce  $s = l_1 \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

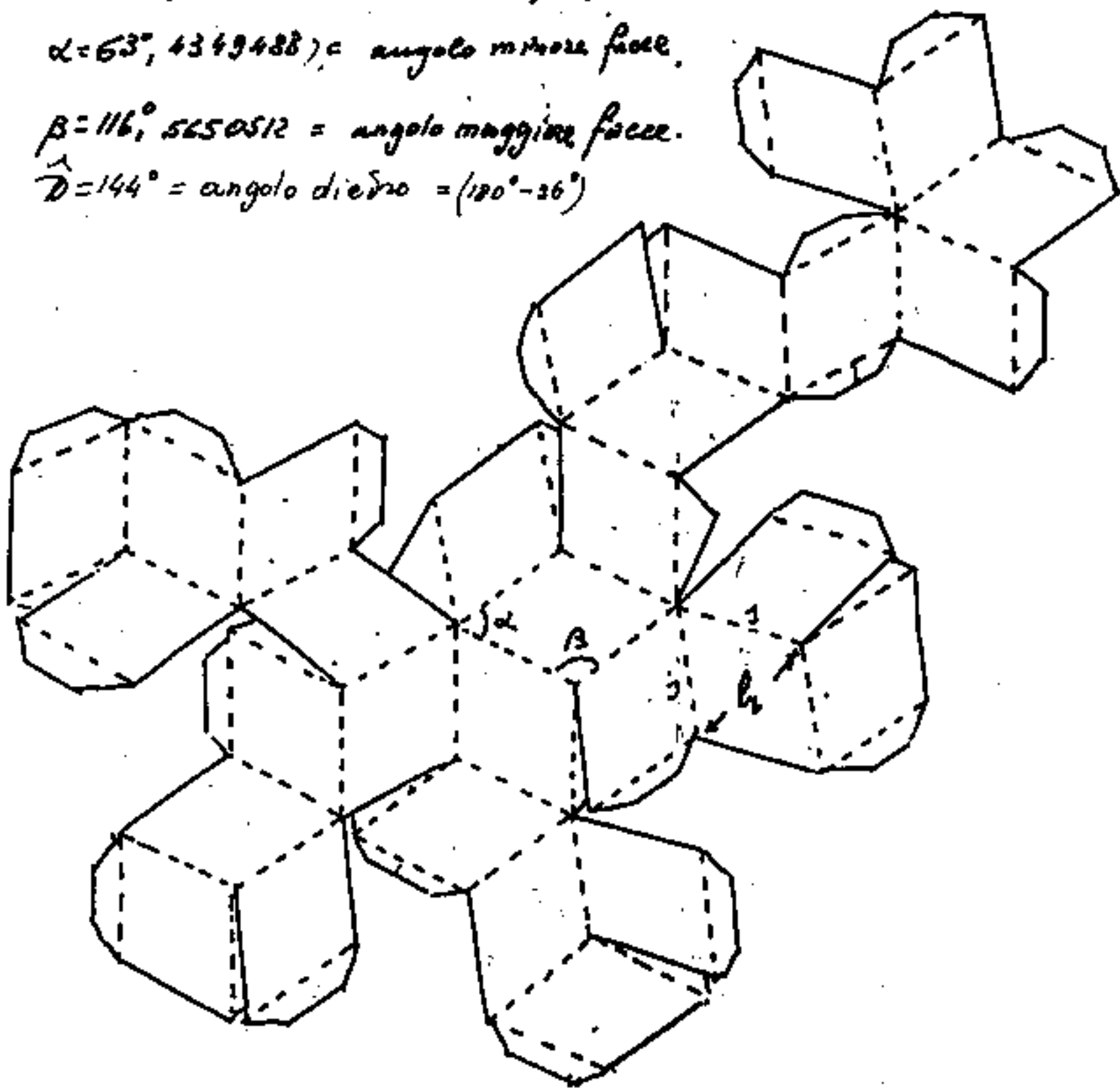
$d$  = diagonale maggiore delle facce  $l_1 \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = d_1$

$d_2$  = diagonale minore delle facce  $d_2 = l_1$

$\alpha = 63^\circ, 4349488$  = angolo minore facce.

$\beta = 116^\circ, 5650512$  = angolo maggiore facce.

$\hat{D} = 144^\circ$  = angolo diedro =  $(120^\circ - 36^\circ)$



Conviene ingrandire il disegno.

# TABELLA dei Pentacisdodecaedri

K	$s/l_n$	$\hat{D}_n$	$\hat{D}_s$	angoli delle facce		NOTE
				al vertice	alla base	
0	0,850650808	116° 33' 54"	180°	72°	54°	Dodecaedro a facce rigate dai raggi per i vertici
0,1	0,8565084925	133° 06' 01", <sub>64</sub>	170° 18' 10", <sub>3</sub>	71° 25' 53", <sub>88</sub>	54° 17' 03", <sub>04</sub>	Pentacisdodecaedro a piccola TV. (convesso)
0,251525534	0,8870579981	156° 43' 06", <sub>713</sub>	156° 43' 06", <sub>713</sub>	68° 37' 07", <sub>295</sub>	55° 41' 26", <sub>202</sub>	Pentacisdodecaedro a diedri uguali
0,287742175	0,8979990852	167° 56' 45", <sub>64</sub>	153° 47' 22", <sub>05</sub>	67° 40' 07", <sub>07</sub>	56° 03' 56", <sub>406</sub>	inscrittibile in una sfera 60 facce (convesso)
0,425325404	0,9510565162	180°	144°	63° 26' 05", <sub>84</sub>	58° 16' 57", <sub>012</sub>	Romboedro a 30 facce rigate secondo la diagonale minore
0,525731112	1	197° 19' 11", <sub>235</sub> concavo	138° 11' 22", <sub>84</sub>	60°	60°	Duodecedron Elevatus solidus (Leonardo da Vinci e Luca Pacioli) Solido concavo con 60 facce equilatero.

## Il Triacisicosaedro

Operando allo stesso modo con l'icosaedro, cioè aggiungendo piramidi alle sue facce, abbiamo la classe dei triacisicosaedri, anche qui occorrono ulteriori condizioni per definirli.

Se l'altezza  $\overline{TV}$  delle piramidi è nulla abbiamo un icosaedro le cui facce sono rigate dagli spigoli delle piramidi che si sono sovrapposti ai segmenti che vanno dal centro faccia ai vertici; Poi via, via, che cresce l'altezza delle piramidi avremo, al solito, diedri uguali, oppure solido inseribile in una sfera, ma i diedri sugli spigoli dell'icosaedro, ad un certo momento diventeranno piani ed avremo il romboedro a 30 facce, e continuando a crescere l'altezza  $\overline{TV}$ , i triacisicosaedri diventeranno concavi.

Ma, come abbiamo visto, possiamo avere i triacisicosaedri dai pentacisdodecaedri aventi gli stessi vertici e la stessa lunghezza degli spigoli delle piramidi, basta nel quadrilatero (non piano) che ha per lati gli spigoli delle piramidi unire due vertici opposti anziché gli altri due (se fosse piano diremmo di tracciare una diagonale anziché l'altra).

## Triacisicosaedro inscritibile in una sfera

altezza delle piramidi:  $\overline{TV} = (r_i - r_{i_1}) =$  differenza

fra i raggi delle sfere circoscritte ed inscritte all'

icosaedro:  $\overline{TV} = \left( \frac{l_i}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{l_i}{4} \left( \frac{\sqrt{5+3}}{3\sqrt{3}} \right) \right) =$

$$\overline{TV} = l_i (0,951056516 - 0,755761314) = \boxed{\overline{TV} = l_i (0,195295202)}$$

$$\boxed{\kappa = 0,195295202}$$

spigolo delle piramidi:  $s = \sqrt{\overline{TV}^2 + \left(\frac{l_i}{2}\right)^2} = \boxed{s = l_i (0,609486299)}$

apotema delle facce:  $a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_i}{2}\right)^2} = \boxed{a = l_i (0,348530556)}$

altezza sullo spigolo:  $h_s = \frac{l_i \cdot a}{s} = \boxed{h_s = l_i (0,571843135)}$

## Angoli delle facce

al vertice =  $2 \arcsin\left(\frac{l_i}{2s}\right) = 2 \arcsin(0,820362985) = \underline{110^\circ 14' 32",2}$

alla base =  $\arccos\left(\frac{l_i}{2s}\right) = \arccos(0,820362985) = \underline{34^\circ 52' 43",87}$

## Angoli diedri

dell'icosaedro  $\hat{D}_i = 138^\circ 11' 22",8$

alla base delle piramidi:  $\hat{D}_b = \arcsin\left(\frac{\overline{TV}}{a}\right) = \arcsin(0,560338824)$

$$= \underline{34^\circ 04' 45",24}$$

sullo spigolo  $l_i$ :  $\left( \hat{D}_{l_i} = \hat{D}_i + 2\hat{D}_b \right)$

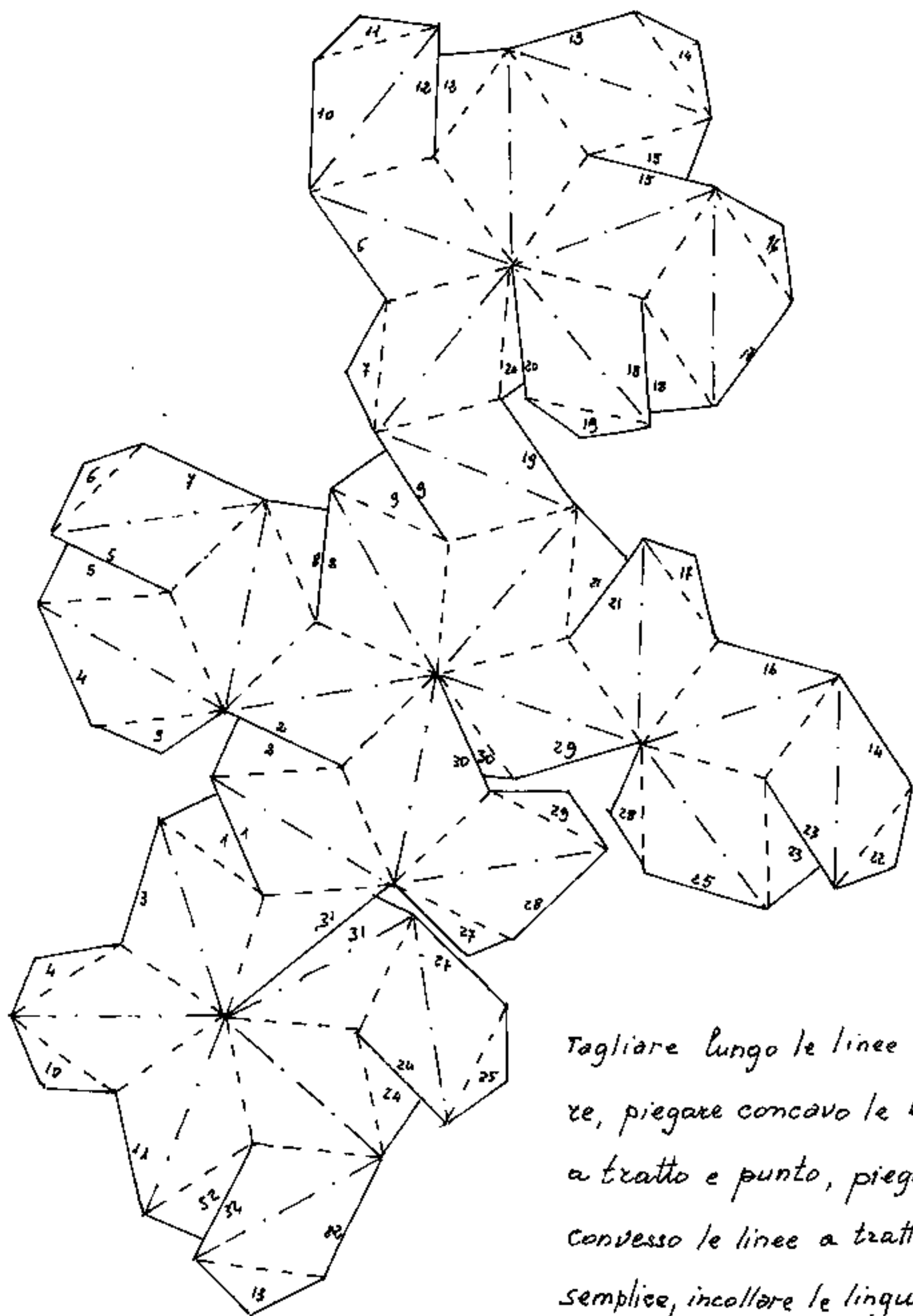
$$\hat{D}_{l_i} = (138^\circ 11' 22",8 + 2(34^\circ 04' 45",24))$$

$$\hat{D}_{l_i} = \underline{206^\circ 20' 53",28} > 180^\circ$$

angolo concavo di  $\hat{D}_{l_i} = \underline{-153^\circ 39' 06",42}$

sullo spigolo  $s$ :  $\hat{D}_s = 2 \arcsin\left(\frac{l_i}{2h_s}\right) = \underline{121^\circ 56' 23",9}$

Schema di triacisicosaedro inscrittibile in una sfera (stessa sfera del pentacisdodecaedro che segue)

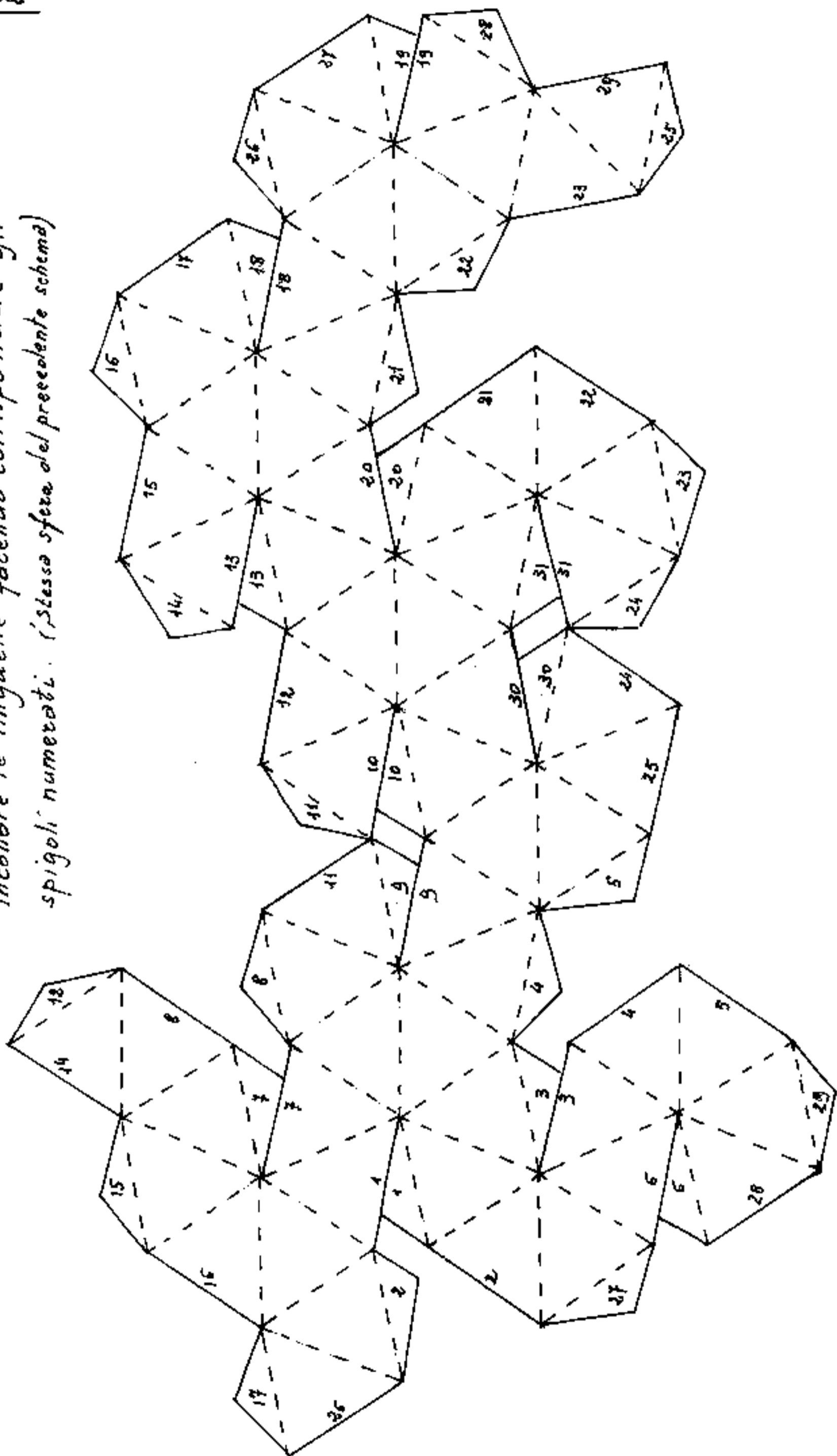


Tagliare lungo le linee intere, piegare concavo le linee a tratto e punto, piegare convesso le linee a tratteggio semplice, incollare le linguette

facendo corrispondere gli spigoli numerati.

Schema di pentacisdodecaedro inscritto in una sfera

Tagliare lungo le linee intere, piegare le tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati. (Stessa sfera del precedente schema)



Il confronto fra questi due solidi inscritti nella stessa sfera, conferma il rapporto:  $\frac{l_i}{l_d} = 1,473370418$ ; non sono possibili confronti angolari perché i piani delle facce giacciono su piani diversi, anche se gli spigoli  $s$  sono gli stessi. Infatti l'angolo fra due spigoli di una stessa piramide che è l'angolo al vertice nelle facce dei pentacisdodecaedri non esiste nei triacisicosaedri, e viceversa.

### Triacisicosaedro a diedri uguali

$(\hat{D}_i = \hat{D}_s)$  Abbiamo già visto che detta  $\overline{TV}$  l'altezza delle piramidi aggiunte ( $\overline{TV} = K l$ ); ( $l_i$  per l'isocaedro)

$$s = l \sqrt{\frac{1+3K^2}{3}} \quad (\text{per facce triangolari di lato } l)$$

$$a = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{1+12K^2}{3}} = l \sqrt{K^2 + \frac{1}{12}} \quad " \quad "$$

$$h_s = \frac{al}{s} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{1+12K^2}{1+3K^2}} \quad " \quad "$$

$$\text{Diedri: } \hat{D}_b = \arctg(K\sqrt{12}) \quad (\text{base piramidi})$$

$$" \quad \hat{D}_i = \arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad (\text{dell'icosaedro}) = 2 \arctg\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$" \quad \hat{D}_{l_i} = 2 \arctg(K\sqrt{12}) + \arctg\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{sul lato } l_i$$

$$" \quad \hat{D}_s = 2 \arcsen\left(\sqrt{\frac{1+3K^2}{1+12K^2}}\right) = 2 \arctg\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right)$$

da cui la relazione:

$$\arctg\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right) - \arctg(2K\sqrt{3}) = \arctg\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 69^\circ 05' 41",43$$

che risulta soddisfatta per

$$K = 0,05721908277$$

Gli elementi del triacisicosaedro a diedri uguali

sono:  $\overline{TV} = l_i (0,05721908277)$

$$s = (0,580178728) l_i \quad ; \quad l_i = (1,723606798) s$$

$$a = (0,294291278) l_i \quad ; \quad a = (0,507242448) s$$

$$h_s = (0,507242448) l_i \quad ; \quad h_s = (0,874286532) s$$

angoli delle facce.

al vertice  $\alpha_v = 2 \arcsin\left(\frac{l}{2s}\right) = \underline{119^\circ 02' 21,66}$

alla base  $\alpha_b = \arccos\left(\frac{l}{2s}\right) = \underline{30^\circ 28' 49,17}$

Diedri:

dell'icosaedro :  $\hat{D}_i = \arctg\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = 2 \arctg\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \underline{138^\circ 11' 22,8}$

alla base piramidi :  $\hat{D}_b = \arctg\left(\frac{\overline{TV}}{\frac{1}{3} \frac{l_i}{2}}\right) = \arctg\left(\frac{0,05721908277}{\sqrt{3}/6}\right) = \underline{11^\circ 12' 41,16}$

sullo spigolo s :  $\hat{D}_s = 2 \arcsin\left(\frac{l_i}{2h_s}\right) = \underline{160^\circ 36' 45,1}$

sullo spigolo l<sub>i</sub> :  $\hat{D}_{l_i} = \hat{D}_i + 2\hat{D}_b = (138^\circ 11' 22,8) + 2(11^\circ 12' 41,16) = \underline{160^\circ 36' 45,1}$

La distanza fra i vertici delle piramidi "lv" è:

$$lv = 2a \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{D}_{l_i}}{2}\right) = 2 \frac{a l_i}{2 h_s} = s \quad \text{cioè} \quad \boxed{lv = s}$$

essendo a diedri uguali lv equivale s. (vale

solo per facce triangolari del solido base)



Sostituendo  $l_v = l_d$  ad  $l_i$  otteniamo il pentacisdodecaedro che ha gli stessi vertici e lo stesso "s" del triacisicosaedro a diedri uguali.

Tale pentacisdodecaedro, avendo  $l_d = l_v = "s"$ , è a facce equilatera, è il solido che viene chiamato: "Duodecedron Elevatus solidus"

di cui abbiamo già calcolato gli elementi.

$$K_d = 0,525731112 ; s = l_d ; h_s = a = \frac{l_d}{2}\sqrt{3} = (0,866025403)l_d$$

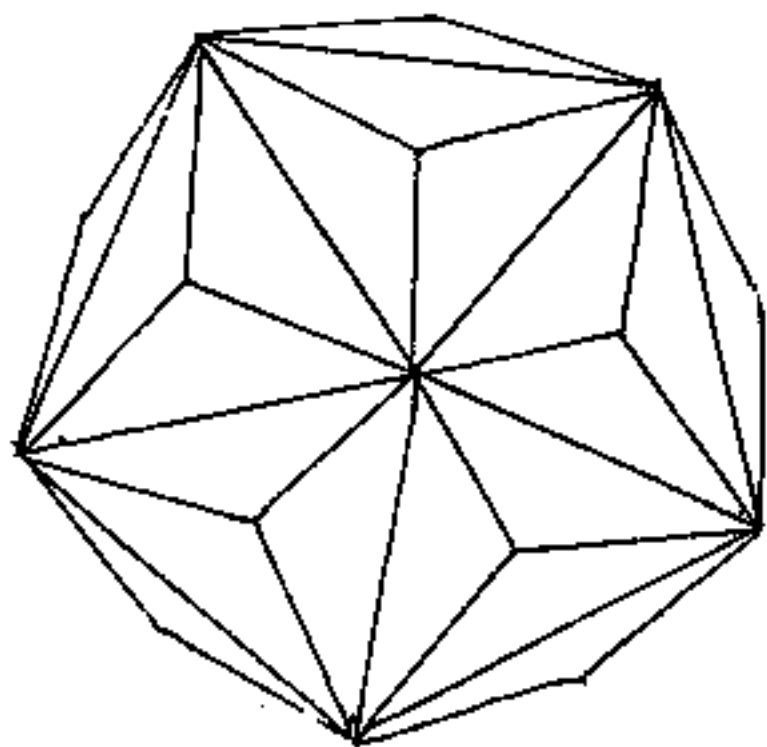
angoli delle facce:  $60^\circ = \alpha_d = \alpha_v$ .

Diedri:  $\hat{D}_d = 138^\circ 11' 22,8$  (convesso)

$$\hat{D}_v = 191^\circ 19' 11,2 = -168^\circ 40' 48,8 \text{ (concavo)}$$

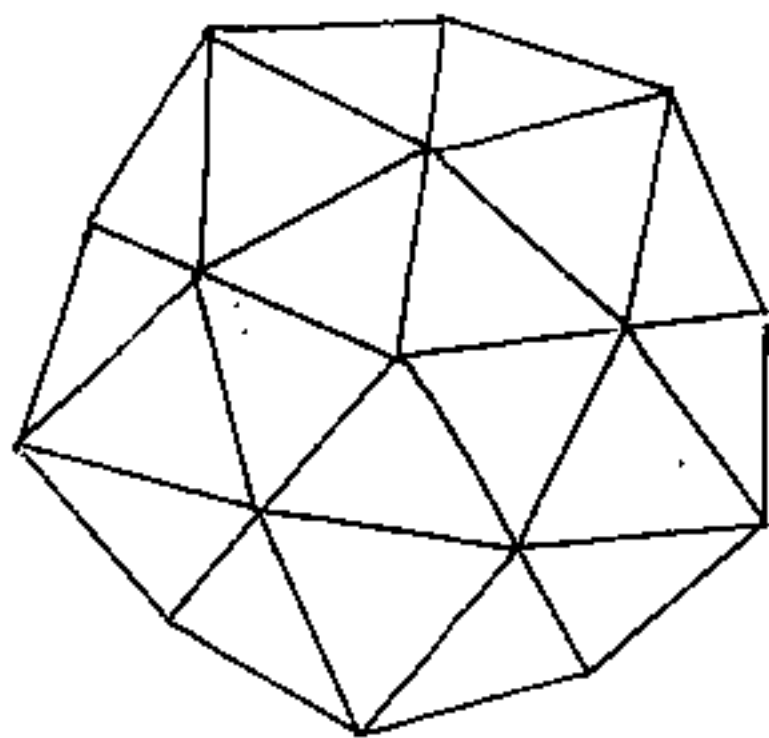
Triacisicosaedro

(convesso)



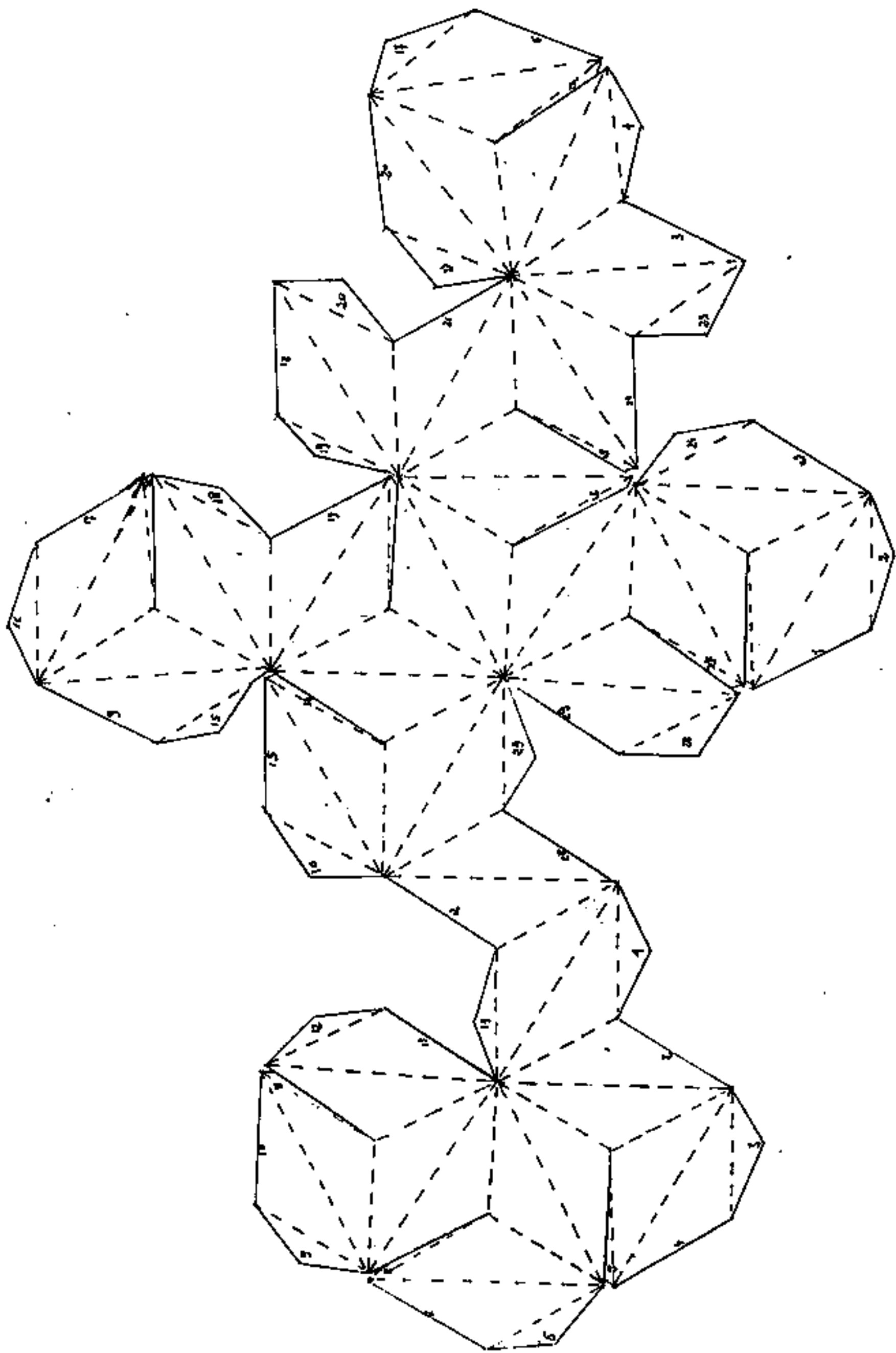
Pentacisdodecaedro

(concavo)



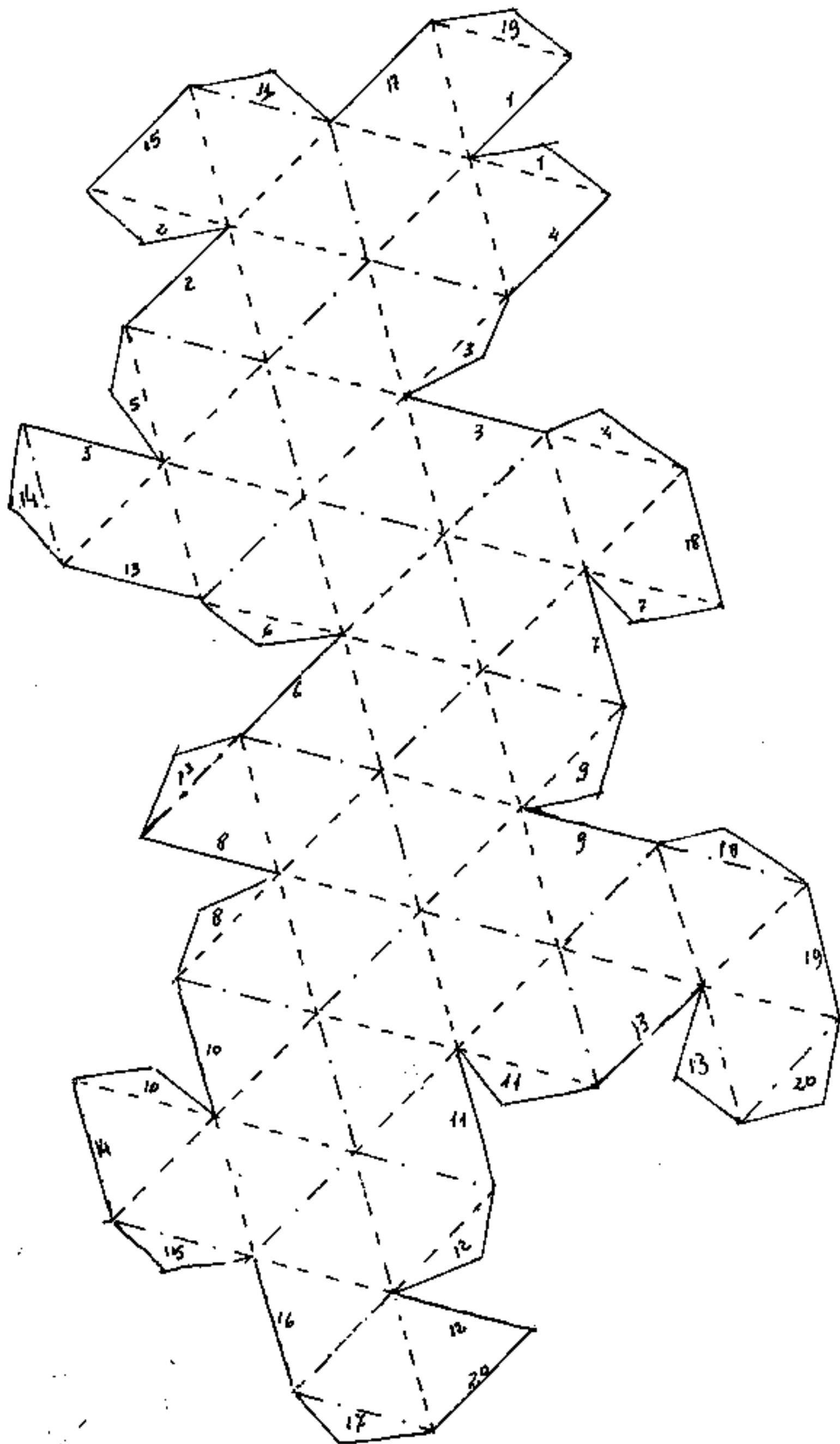
I due solidi hanno gli stessi vertici e stessi s.

Schema di sviluppo di TRIACISICOSAEDRO  
a diedri uguali



Pentacisdodecaedro avente gli stessi vertici del tria-  
icosaedro a diedri costanti.

Tagliare lungo le linee intere, piegare convesso le tratteggiate,  
piegare concavo le linee a trattò e punto, incollare le linguette  
facendolo corrispondere gli spigoli numerati.



Lo scambio fra i due solidi aventi spigoli uguali (spigoli delle piramidi aggiunte) e stessi vertici, si unificano in un solido identico quando il quadrilatero degli spigoli  $s$  è piano. Si ha un romboedro a trenta facce che tratteremo più diffusamente al capitolo romboedri.

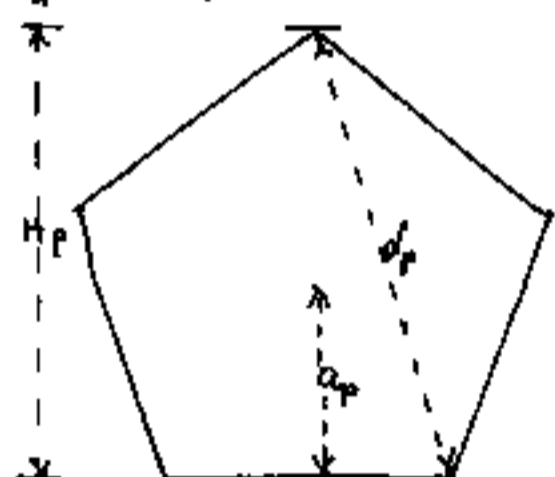
Ora invece ci interessa trattare il triscistetraedro che nasce dal pentacisdodecaedro a diedri uguali problema che abbiamo rimandato a questo capitolo nel trattare i pentacisdodecaedri.

Averamo accertato che per le caratteristiche dei due solidi base: dodecaedro e icosaedro esistevano una serie di correlazioni, in particolare si era ricavata la relazione fra  $K_d$  e  $K_i$  nei vari casi. Lo scambio dei segmenti che uniscono i vertici opposti nel quadrilatero non piano è una relazione mutua, cioè si può attribuire una caratteristica ad una classe di solidi e vedere cosa succede nell'altra.

Poiché i due solidi hanno in comune gli spigoli "s"; Cerchiamo di porre in funzione di "s" gli elementi del pentadodecaedro a diedri uguali: ( $\kappa = 2515255344147$ ;  $\kappa^2 = 0,63265094$ )

$$l_d = s(1,127322004) \quad ; \quad \overline{TV_d} = s(0,283550269)$$

$$a_d = s(0,826006218) \quad ; \quad h_{s_d} = s(0,931174984)$$



ricordiamo gli elementi della faccia pentagonale:

$$a_p = (0,775812812)s \quad ; \quad d_p = (1,824045319)s \quad ;$$

$$H_p = (1,434770187)s \quad ; \quad a_p = \overline{HT}$$

Angoli delle facce

al vertice  $\alpha_v = 68^\circ 37' 07,4$   
 alla base  $\alpha_b = 55^\circ 41' 26,3$

Diedri

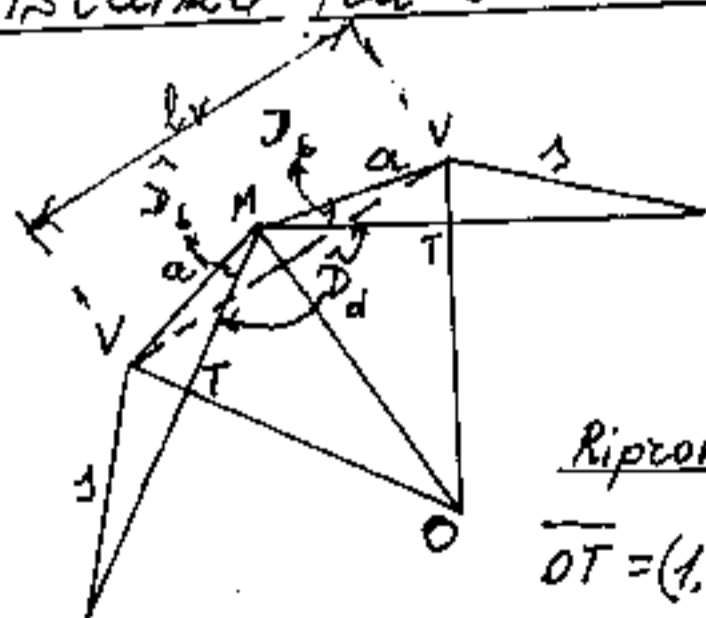
alla base della piramide:  $\hat{D}_b = \arctg\left(\frac{\overline{IV}}{a_p}\right) = \underline{20^\circ 04' 36,3}$

sullo spigolo della piramide:  $\hat{D}_s = 2 \arcsin\left(\frac{d_p}{h_{s_d}}\right) = \underline{156^\circ 43' 6,8}$

sul lato del dodecaedro:  $\hat{D}_d = \arctg(-2) = 116^\circ 33' 54,18$   
 $2\hat{D}_d = \underline{40^\circ 09' 12,62}$

sull'altro spigolo:  $\hat{D}_d + 2\hat{D}_b = \hat{D}_d = \underline{156^\circ 43' 6,8}$

Distanza fra i vertici delle piramidi =  $l_v$



$$l_v = 2a_p \cos(\hat{D}_d/2) = \underline{s(1,618033988)}$$

$$l_v = l_d(1,435289993)$$

$$l_d = l_v(0,696723313)$$

Riprova:  $l_v = 2 \cos(\hat{D}_d/2)(\overline{OT} + \overline{TV}) = 2 \cos(\hat{D}_d/2)(\overline{OV})$

$$\overline{OT} = (1,538841768)s \quad ; \quad \cos(\hat{D}_d/2) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

$$l_v = \underline{s(1,618033988)}$$

Le facce del triacisicosaedro, che otteniamo tracciando  $lv$  anziché  $ld$ , sono triangoli isosceli con base:  $li = lv$  e lati obliqui gli spigoli "s".

L'icosaedro su cui poggiano le piramidi aggiunte, ha facce triangolari equilateri di lato  $li = lv$ ; quindi possiamo fare i calcoli in funzione di  $s$ . Indicheremo con l'indice "i" gli elementi dell'icosaedro e con l'indice "li" gli elementi del triacisicosaedro.



### Elementi delle facce

$$li = (1,618033988) s \quad \boxed{li = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) s}$$

$$a_e = \sqrt{s^2 - \left(\frac{li}{2}\right)^2} = \boxed{a_e = (0,587785252) s}$$

angolo al vertice:  $\alpha_v = 2 \arcsen\left(\frac{li}{2s}\right) = 2 \arcsen(0,809016994)$ .

$$\alpha_v = 2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right); 2 \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{8}\right); 2 \arctg\left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{20}}}{5}\right);$$

$$\boxed{\alpha_v = 108^\circ}$$

$$\boxed{a_e = s \sqrt{5-\sqrt{5}}/8}$$

angoli alla base:  $\alpha_b = \arccos\left(\frac{li/2}{s}\right) = \arccos(0,809016994)$

$$\alpha_b = \arcsen\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}\right); \alpha_b = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right); \alpha_b = \arctg\sqrt{5-2\sqrt{5}};$$

$$\boxed{\alpha_b = 36^\circ} = \left(\frac{\pi}{5}\right)!$$

### Elementi delle piramidi

$$\overline{TV} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{li}{\sqrt{3}}\right)^2} = s \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} = (0,356822089) s \rightarrow \overline{TV} = (0,220528179) li$$

$$\boxed{\overline{TV} = li \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}\right)} \quad \boxed{\overline{TV} = li (0,220528179)} \quad h_s = \frac{a_e li}{s} = li \sqrt{5-\sqrt{5}}/8$$

$$\boxed{K = 0,2205281794165358}$$

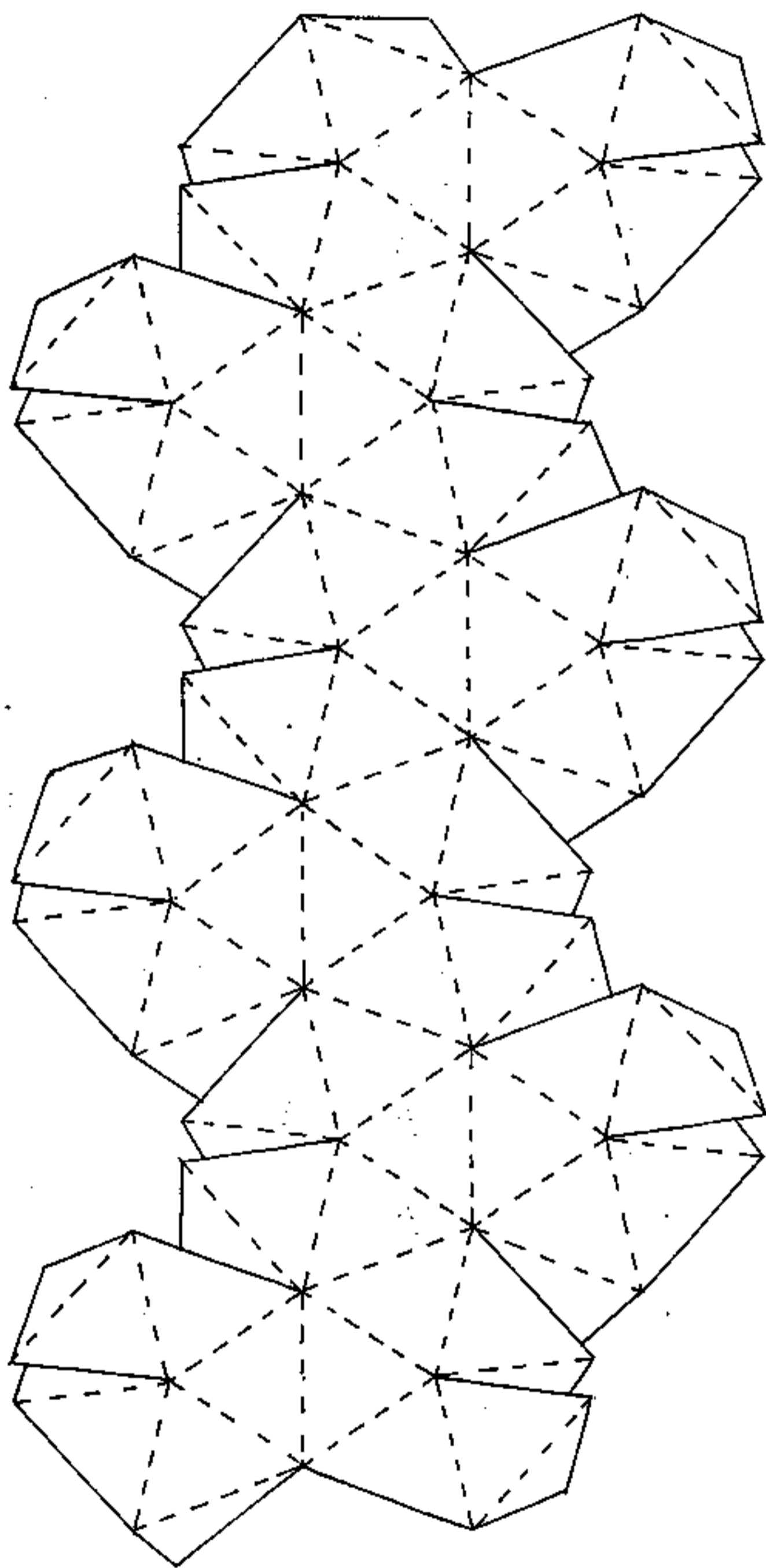
Diedro alla base  $\hat{D}_b = \arctg\left(\frac{\overline{TV}}{h_s}\right) = 37^\circ 22' 38,53''$

Diedro su s:  $\hat{D}_s = 2 \arcsen\left(\frac{li}{2h_s}\right) = 116^\circ 33' 54,1''$ ;  $\left(\hat{D}_i = 138^\circ 11' 22,87''\right)$

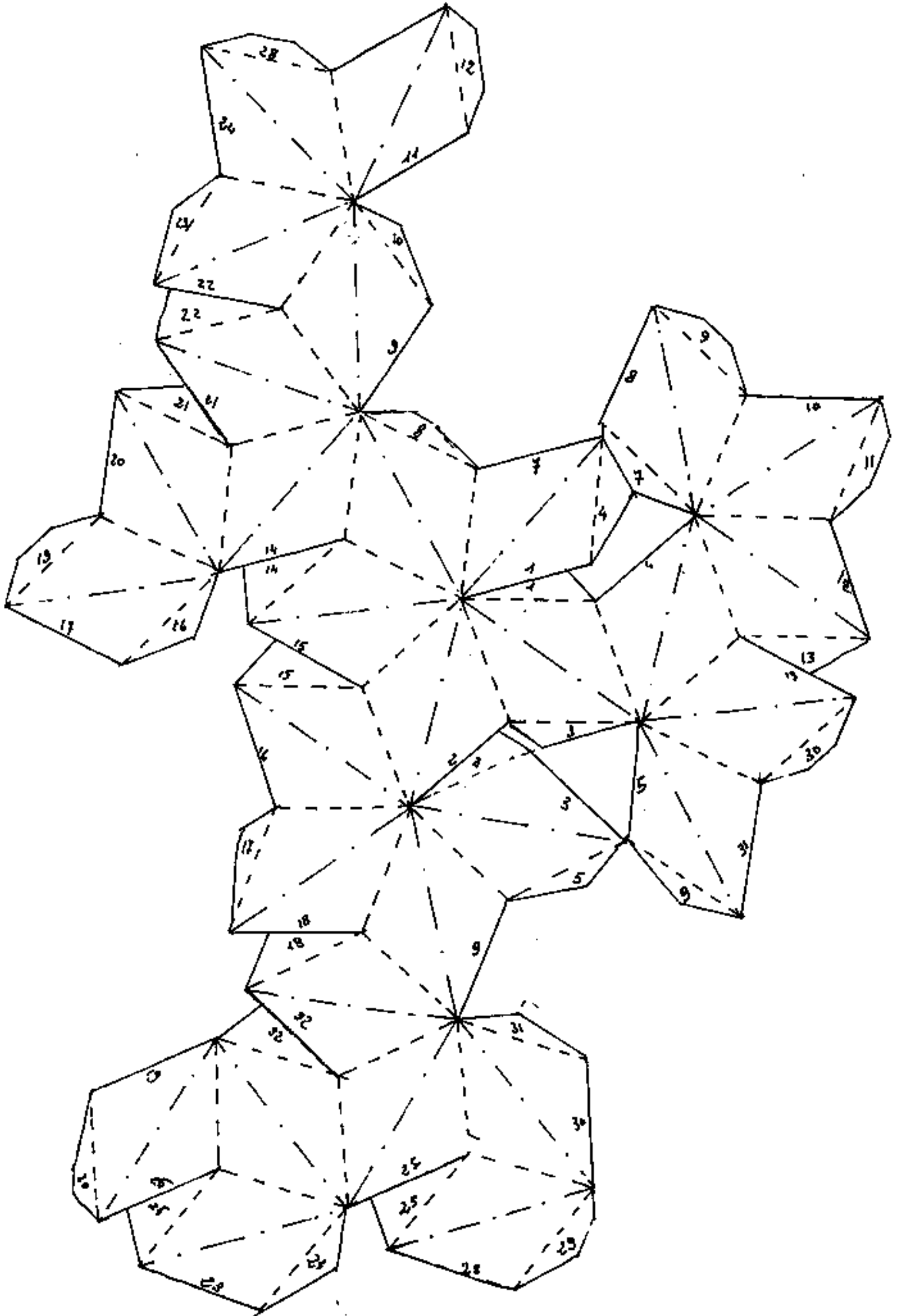
# Pentacisdodecaedro a diedri uguali

(vedi solido triacisicosaedro con stessi vertici)

Togliere lungo le linee interne, piegare le linee tratteggiate  
incollare le linguette.



Schema di triacisicosaedro avente gli stessi vertici  
del pentacisdodecaedro a diedri uguali





# TABELLA dei Triacisicosedri

K	$\frac{1}{l_i}$	$\hat{D}_i$	$\hat{D}_s$	angoli delle facce		NOTE
				al vertice	alla base	
0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ 0,577350269	138° 11' 22",8	180°	120°	30°	<u>Icosaedro</u> con 20 facce rigate
0,0572190827	0,580178728	160° 36' 45",108	160° 36' 45",108	119° 02' 21",663	30° 28' 49",1615	<u>TRIACISICOSAEDRO</u> cofu a diedri uguali stessi vertici del pentacisdodecaedro (K=0,52573412) a facce equilatero -
$\left(\frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{27}}\right)$ 0,1102640897	0,5877852523	180°	144°	116° 33' 54",184	31° 43' 02",9079	<u>ROMBOEDRO</u> (30 facce) rigate secondo la diagonale maggiore stesso solido del pentacisdodecaedro (K=0,425325404) romboedro con facce rigate secondo la diagonale minore
0,195295203	0,6094862998	206° 20' 53",2 -153° 39' 06",8 (concavo)	121° 56' 23",93	110° 14' 32",25	34° 52' 43",87	<u>TRIACISICOSAEDRO</u> (60 facce) inseccribile in una sfera stessi vertici del pentacisdodecaedro (K=0,1287742174) inseccribile in una sfera
0,204124145	0,6123724356	208° 43' 06",472 concavo	120°	109° 28' 16",395	35° 15' 51",802	<u>TRIACISICOSAEDRO</u> otten to sovrappoendo angoli leidi del tetraedro
0,2205281797	0,618033988	212° 56' 39",9 -147° 03' 20",08 concavo	116° 33' 54",1	108°	36°	<u>TRIACISICOSAEDRO</u> ottenuto da vertici del pentacisdodecaedro a diedri uguali stessi vertici del pentacisdodecaedro (K=0,251525534) a diedri uguali

## L'Esacistetraedro

Nei solidi, abbiamo considerato il pen- nello di raggi uscenti dal centro, avente per direzione assiale il centro faccia, e delimitato dalla piramide che ha per spigoli i raggi diretti ai vertici; è l'angoloide che, sezionato da un piano normale all'asse determina una faccia del solido.

Abbiamo studiato solidi derivati, ottenuti prolungando il raggio del centro faccia e considerando su di esso il vertice di una piramide esterna, aggiunta al solido ed avente per faccia di base la stessa faccia del solido.

Abbiamo rilevato che gli stessi vertici col- legati diversamente danno luogo a solidi diversi.

Torniamo al nostro tetraedro, l'angoloide uscente dal suo centro "O", determina sulla sfera circoscritta un triangolo sferico di area  $\frac{3}{8} l_t^2 \pi$  con  $l_t =$  spigolo del tetraedro ABCD.

Se dividiamo a metà i lati del triangolo sferico, cioè se consideriamo i punti di mezzo oltre che gli estremi dei lati del

triangolo sferico, nonché il suo punto centrale sulla sfera, (ottenuto dal raggio prolungato passante per il centro faccia del tetraedro) e ripetiamo il procedimento per i quattro triangoli sferici, otteniamo i vertici dell'esacistetraedro inscritto in una sfera.

Sia  $O$  il centro della sfera; sia:  $A, B, C, D$ , un tetraedro di spigoli:  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = l_t$ .

Sia:  $\boxed{r_3 = l_t \frac{\sqrt{6}}{4}}$  =  $\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OD}$ , il raggio della sfera circoscritta; sia  $M_1$  il punto medio di  $\overline{AB}$ , e quindi:

$$\overline{OM_1} = \sqrt{r_3^2 - \overline{MA}^2} = \boxed{\overline{OM_1} = \frac{l_t}{4} \sqrt{2}}$$

Prolungando  $\overline{OM_1}$  fino ad incontrare la superficie sferica in  $P_1$ , avremo:  $\overline{OP_1} = r_3$ ;  $\overline{MP_1} = r_3 - \overline{OM_1}$ ,

$$\boxed{\overline{MP_1} = \frac{l_t}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$\overline{AP_1} = \overline{BP_1} = l_2 = \sqrt{\left(\frac{l_t}{2}\right)^2 + (\overline{MP_1})^2} \quad \boxed{l_2 = \frac{l_t}{2} \sqrt{3 - \sqrt{3}}}$$

Prolungando il segmento  $\overline{OT_1}$  che dal centro  $O$  della sfera va al centro  $T_1$  della faccia  $ABC$  del tetraedro, si trova il punto  $Q_1$  sulla superficie sferica:  $\overline{OQ_1} = r_3 = \overline{OQ_1}$ ;  $\overline{T_1Q_1} = (r_3 - r_i)$ ; ove " $r_i$ " = raggio della sfera inscritta,  $r_i = \frac{l_t \sqrt{6}}{12}$ ; per cui  $\boxed{\overline{T_1Q_1} = \frac{l_t}{\sqrt{6}}}$

Unendo  $Q_1$  con  $A, B, C$ , ove:  $\overline{AQ_1} = \overline{BQ_1} = \overline{CQ_1} = l_3 = \sqrt{\overline{TA}^2 + \overline{T_1Q_1}^2}$

$$l_3 = \sqrt{\frac{l_t^2}{3} + \frac{l_t^2}{6}} = \boxed{l_3 = \frac{l_t}{\sqrt{2}}} \text{ cioè: } l_3 = l_c = \text{spigolo del cubo}$$

$$\text{Unendo } \overline{Q_1 P_1} = l_4 = 2 \rho_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{P_1 O Q_1}}{2}\right) = 2\left(\frac{l_t}{4}\sqrt{6}\right)\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} = \boxed{l_4 = \frac{l_t}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}}$$

Notevole che  $l_4 = l_2$ . Le funzioni dell'angolo:  $\widehat{Q_1 O P_1} =$

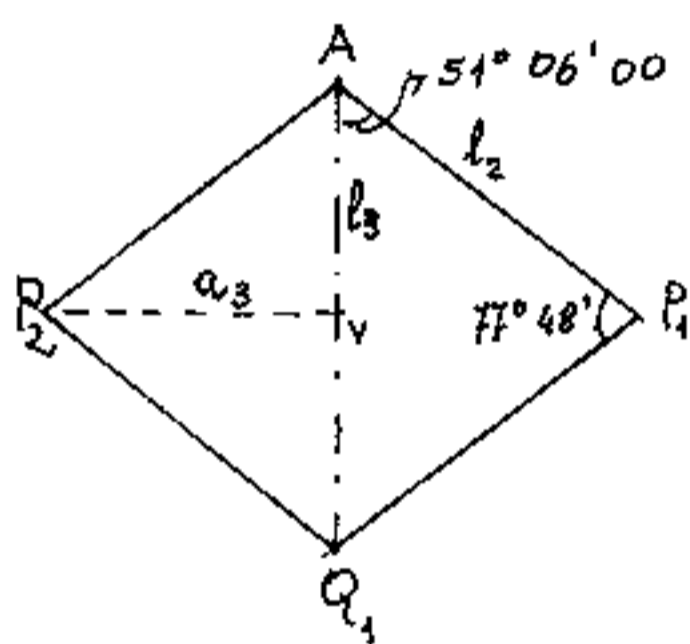
$$= \widehat{T.O.M_1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{l_t \sqrt{3}/6}{l_t \sqrt{6}/12}\right) = \underline{\operatorname{arctg}\sqrt{3}} = \underline{54^\circ 44' 08''}.$$

$$\cos(\widehat{Q_1 O P_1}) = 1/\sqrt{3}; \text{ per cui } \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{Q_1 O P_1}}{2}\right) = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}; \frac{\widehat{Q_1 O P_1}}{2} = 37^\circ 22' 04''.$$

Le facce dell'esacistetraedro inscritto in una sfera sono quindi triangoli isosceli.

L'altezza relativa ad  $l_3$  sia  $a_3$ ,  $a_3 = \sqrt{l_2^2 - (l_3/2)^2}$

$$a_3 = l_t \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{8}} = \boxed{a_3 = \frac{l_t}{2} \sqrt{5-2\sqrt{3}}}$$



Area di una faccia:  $A = \frac{a_3 l_3}{2}$

$$\boxed{A = \frac{l_t^2}{8} \sqrt{5-2\sqrt{3}}} \text{ area della su-}$$

perficie laterale del solido:

$$\boxed{S = 3 l_t^2 \sqrt{5-2\sqrt{3}}}; \text{ Angolo al vertice}$$

di una faccia =  $2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{l_3/2}{l_2}\right) = \underline{77^\circ 48' 00''}$

alla base =  $\underline{54^\circ 06' 00''}$ ;  $a_2 = \frac{3A}{l_2} = a_2 = l_t \left( \frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}/4}{\sqrt{3-\sqrt{3}}/2} \right)$

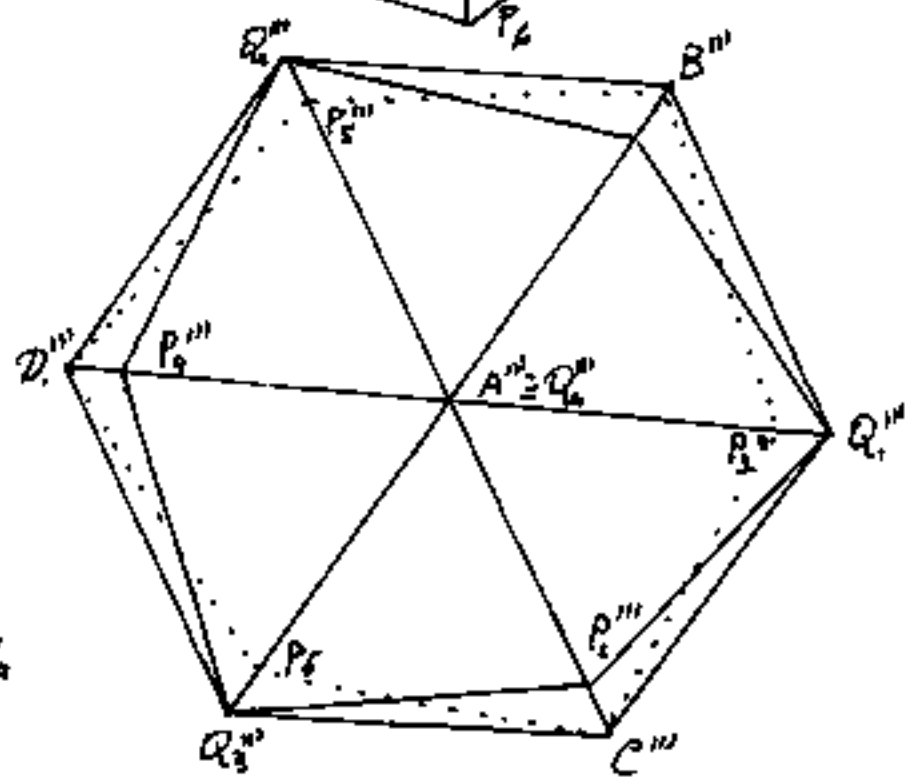
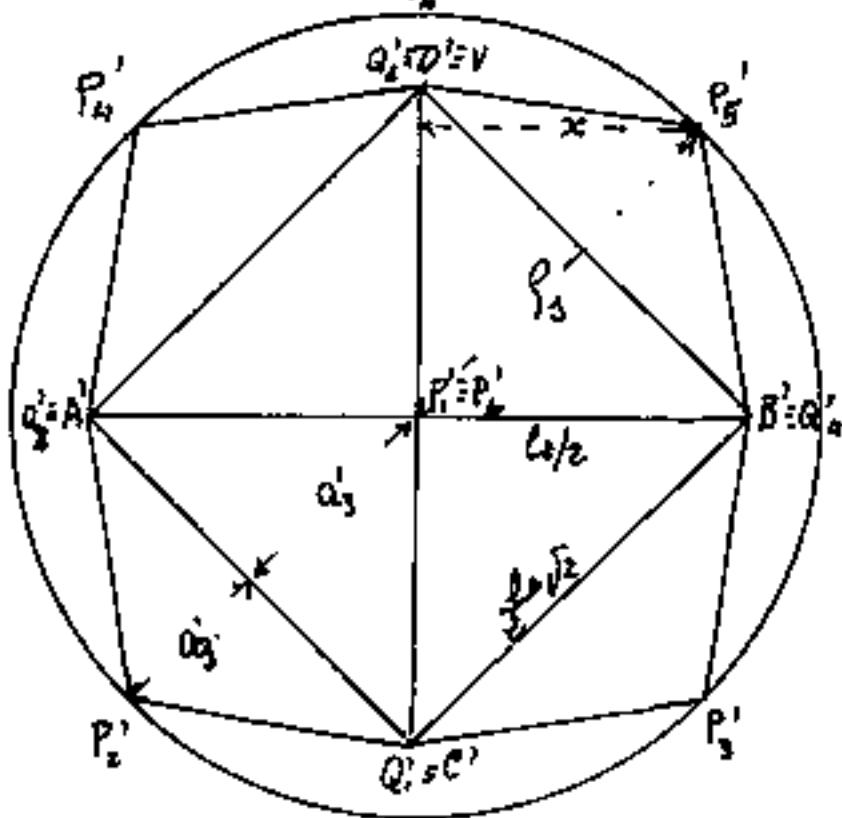
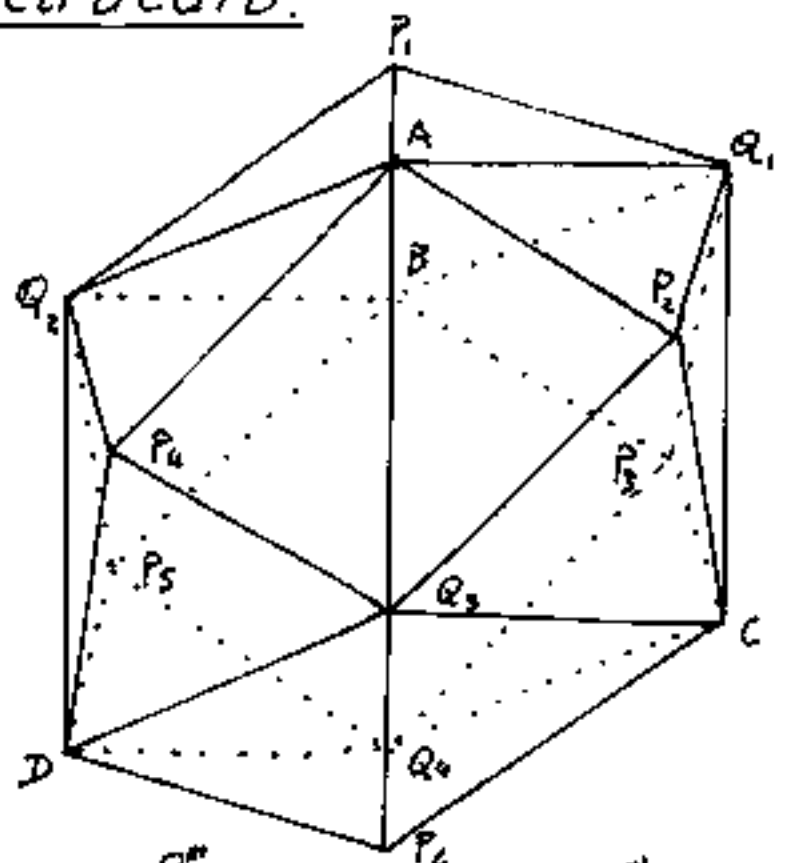
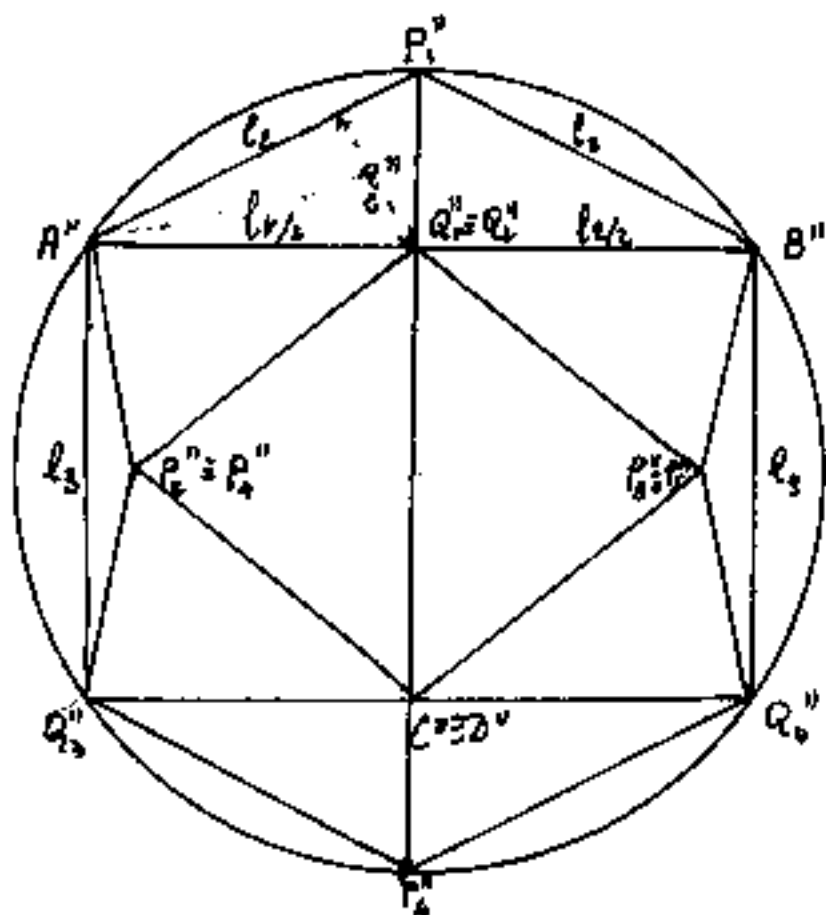
$$\boxed{a_2 = \frac{l_t}{3} \sqrt{\frac{9-\sqrt{3}}{6}}}; \text{ angolo diedro su } l_2 = \widehat{D}_2$$

$$\widehat{D}_2 = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{l_2/2}{a_2}\right) = 2 \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{6}{9-\sqrt{3}}}; \boxed{\widehat{D}_2 = 130^\circ 37' 24,37''}$$

Dalla prima proiezione:  $x = \overline{P_1 P_2}/2 = \overline{P_1 P_2}/2$ ;

$$x : \rho_1 = \frac{l_t}{2} : \frac{l_t}{\sqrt{2}}; \quad x = \rho_1 \frac{l_t/2}{l_t/\sqrt{2}}; \quad = \overline{P_1 P_2}/2 = \frac{1}{4} \left( \frac{l_t \sqrt{6}}{4} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \quad \boxed{\frac{\overline{P_1 P_2}}{2} = \frac{l_t \sqrt{3}}{4}}$$

Proiezioni dell'esacistetraedro:  
(convesso)



Se  $V =$  punto medio di  $\overline{P_1 P_2}$  si ha:

$$\widehat{P_2 V P_1} = 2 \arcsen \left( \frac{\overline{P_1 P_2} / 2}{a_3} \right) = 2 \arcsen \left( \frac{l_3 \sqrt{3} / 4}{l_3 \sqrt{5 - 2\sqrt{3}} / 8} \right) =$$

$$\widehat{P_2 V P_1} = 2 \arcsen \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{5 - 2\sqrt{3}}} \right) = 2(81^\circ 12' 21'', 68) = \widehat{D}_{l_3}$$

diedro su  $l_3$ :  $\widehat{D}_{l_3} = 162^\circ 24' 43'', 366 = \widehat{D}_{l_2}$

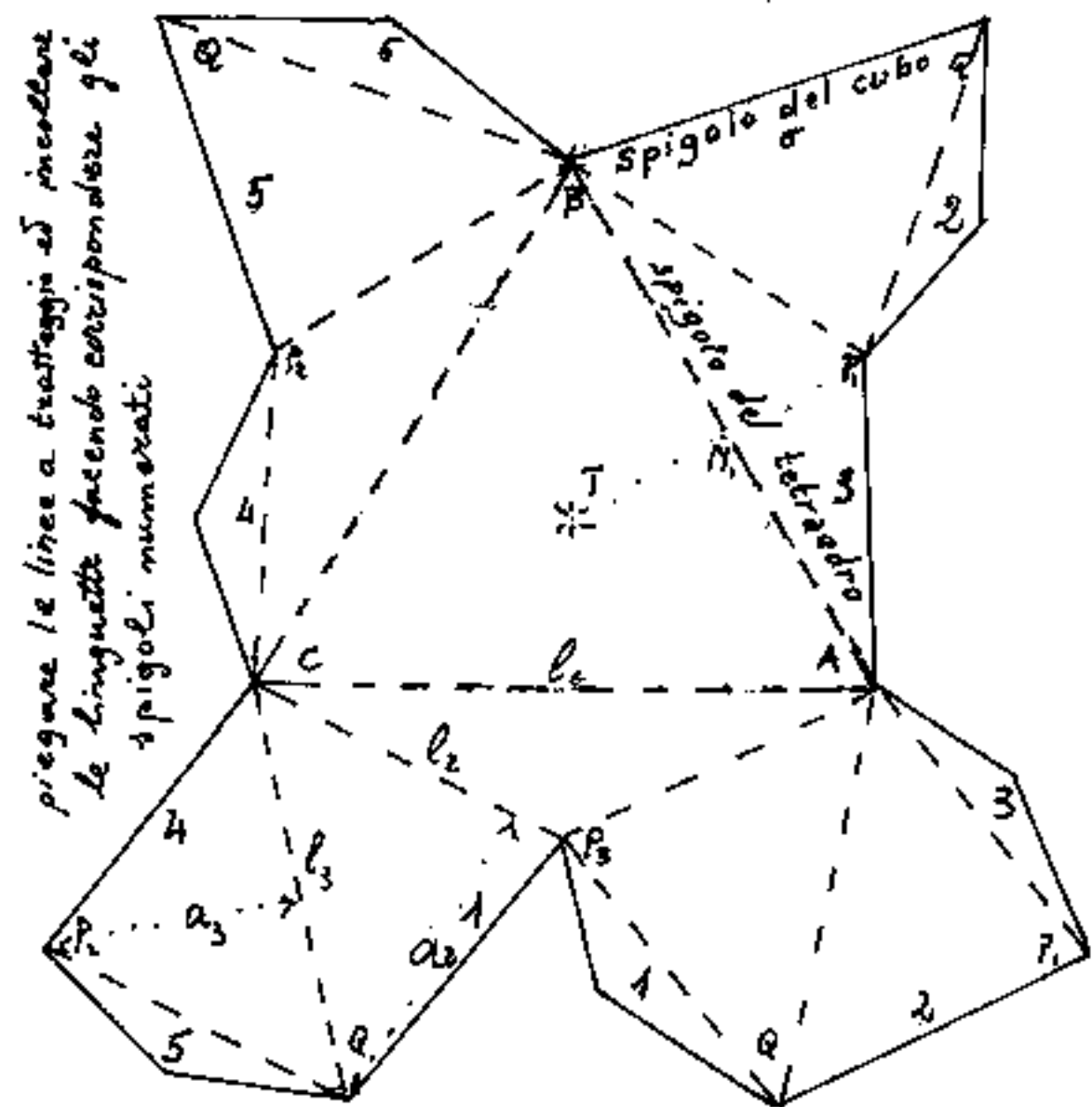
si noti che il solido è identico ad un tetracis-esaedro inscrittibile in una sfera, ove  $l_3$  è il lato del cubo su cui è impostato il tetracisesaedro, (solido che abbiamo già trattato)

Disegniamo la parte da aggiungere ad ogni faccia del tetraedro per ottenere l'esacistetraedro identico al tetracisesaedro convesso. Occorrono 4 modelli, come lo

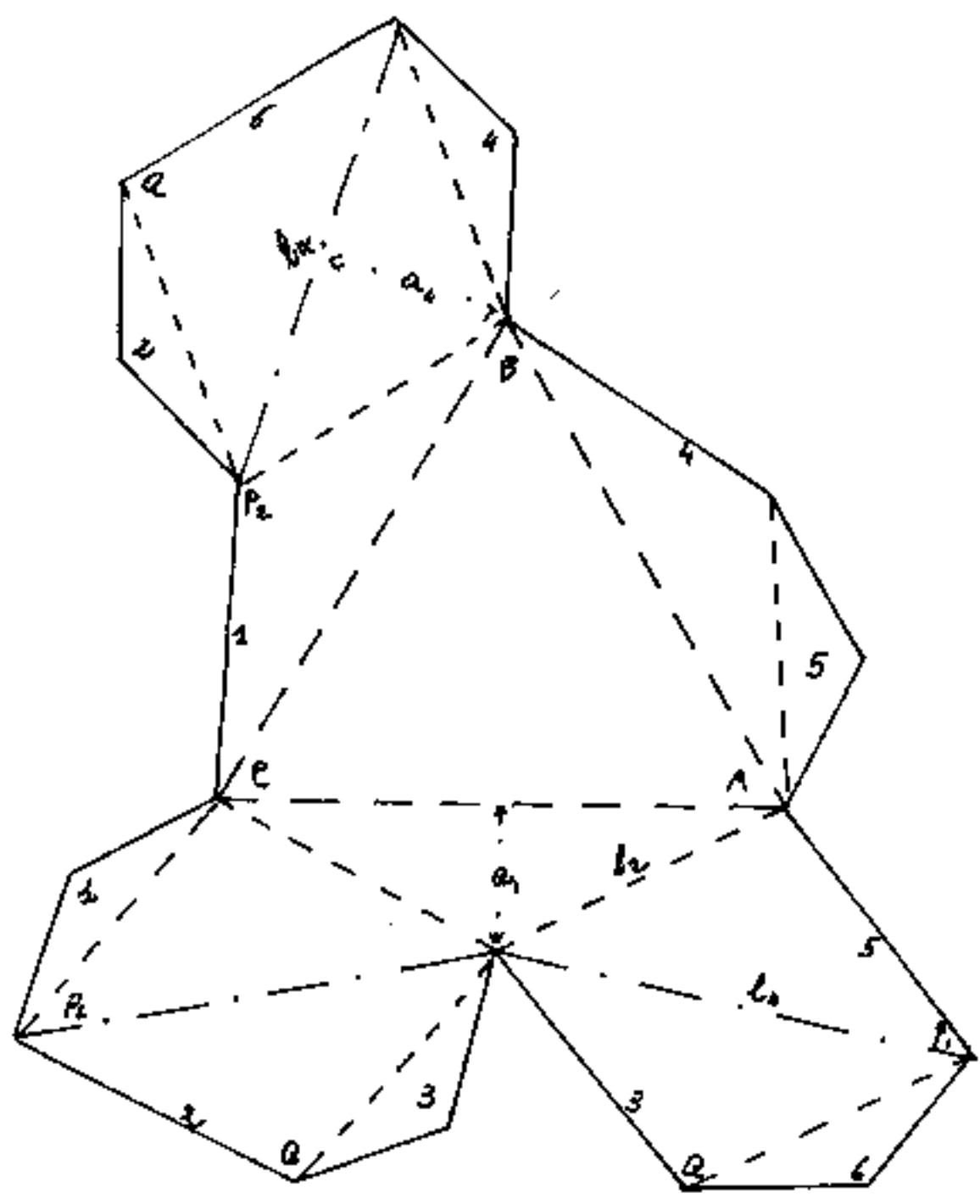
sviluppo a piano, da aggiungere su ciascuna faccia del tetraedro, per ottenere il solido completo.

Abbiamo calcolato la vera distanza:  
 $\overline{P_1 P_2} = \frac{l_1 \sqrt{3}}{2}$ , (cioè l'altezza del triangolo

equilatero che ha per facce il tetraedro) perciò, ferma restando  $l_2$ , non tracciamo  $l_3$ , ma uniamo  $\overline{P_1 P_2}$  ecc. che chiameremo  $l_4$ , otteniamo così le parti da aggiungere al tetraedro per avere un esacistetraedro concavo, identico ad un triacisottaedro concavo che avrebbe potuto ottenersi scambiando  $l_2$  con  $l_1$  nell' tetracisesaedro convesso sopra descritto. (ove  $l_2 = l_3$ ;  $l_1 = l_4 = \frac{l_2 \sqrt{3}}{2} = l_0$ )  
 Disegniamo lo sviluppo delle parti da



aggiungere alle facce del tetraedro per ottenere il solido (triacisottaedro concavo). Occorrono



4 modellini.

Il solido ha 24 facce triangolari isosceli, aventi per base  $l_1 = l_0$ , e per lati obliqui

$$l_2 = \frac{l_1}{2} \sqrt{3 - \sqrt{3}} = l$$

L'angolo al vertice delle facce è:

$$2 \arccos \left( \frac{l_1/2}{l_2} \right) = 100^\circ 32' 43''_{046}$$

Notiamo che i valori sono identici al triacisottaedro inscrittibile in una sfera e di cui

(tagliare le linee intere, piegare convesso le tratteggiate, piegare concavo le linee a tratto e punto, incollare).

abbiamo già dato anche lo schema costruttivo che risulta identico a quello che si ottiene aggiungendo 4 parti (soprasviluppate) sulle facce del tetraedro.

Questo ripetersi di solidi uguali ci porta ad unificare il modulo di riferimento.

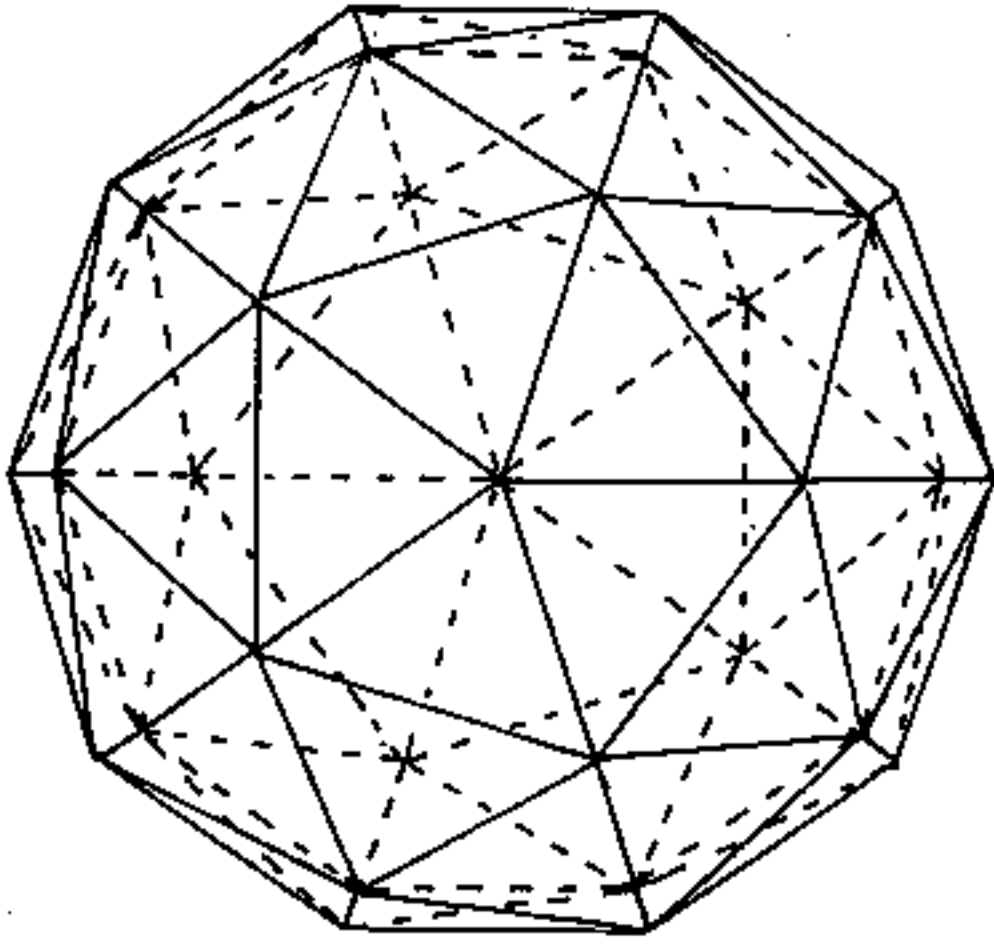
Consideriamo come modulo base  $l_3$  il raggio della sfera circoscritta, avremo:

# TABELLA di SOLIDI inscritti in una sfera

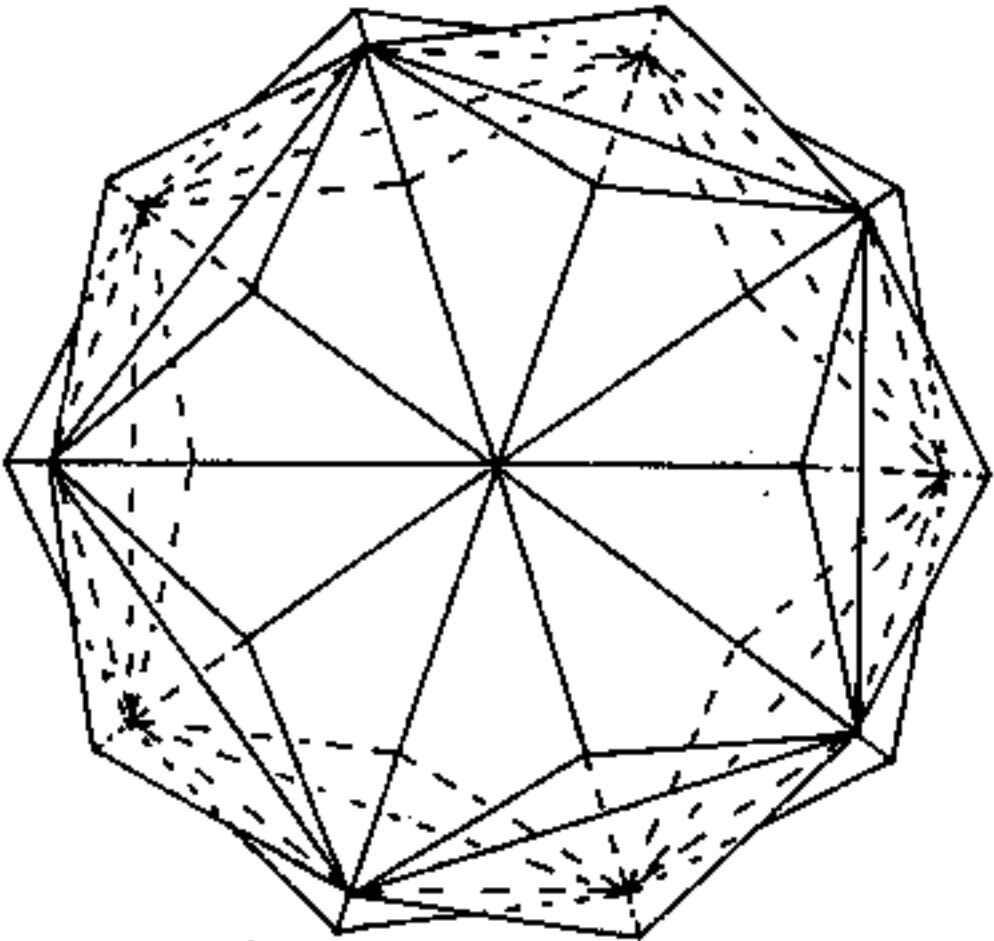
Denominazione	K	facce	F	V	S	l/r <sub>s</sub>	1/r <sub>s</sub>	NOTE	
Solidi regolari	Tetraedro	0	T. equil.	4	4	6	$\sqrt{\frac{6}{3}} = 1,632993162$	-	
	Cubo	0	quadrati	6	8	12	$\sqrt{\frac{4}{3}} = 1,154700538$	-	
	Ottaedro	0	T. equil.	8	6	12	$\sqrt{2} = 1,414213562$	-	
	Dodecaedro	0	pentagoni	12	20	30	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}} = 0,713644179$	-	
	Icosaedro	0	T. equil.	20	12	30	$\sqrt{\frac{10-\sqrt{20}}{5}} = 1,05146224$	-	
<u>Triacistetraedro</u>	1/√6	quadrati rigati	12	8	18	$\sqrt{\frac{8}{3}} = 1,632993162$	$\frac{4}{\sqrt{3}} = 2,30940107$	È un cubo a facce rigate	
"		scambiando l <sub>3</sub> con l <sub>4</sub> si ottiene un cubo					identico salvo facce rigate con l'altra diagonale		
<u>Tetracisesaedro</u>	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	T. isosceli	24	14	36	$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154700538$	$\sqrt{\frac{2(3-\sqrt{3})}{3}} = 0,9194011$	convesso - scambiando l <sub>3</sub> con l <sub>4</sub> si ha il triacisottaedro inscritto	
<u>Triacisottaedro</u>	$\sqrt{2}-\sqrt{6}$	T. isosceli	24	14	36	$\sqrt{2} = 1,414213562$	id	concavo - scambiando l <sub>3</sub> con l <sub>4</sub> si ha il tetracisesaedro inscritto.	
<u>Pentacisdodecaedro</u>	0,287742174	T. isosceli	60	32	90	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}} = 0,713644179$	0,640851819	convesso - scambiando l <sub>3</sub> con l <sub>4</sub> si ha il triacisicosaedro inscritto.	
<u>Triacisicosaedro</u>	0,195295208	T. isosceli	60	32	90	$\sqrt{\frac{10-\sqrt{20}}{5}} = 1,05146224$	id	concavo - scambiando l <sub>3</sub> con l <sub>4</sub> si ha il pentacisdodecaedro inscritto.	
<u>Esacistetraedro</u>	(non sono piramidi)	T. isosceli	24	14	56	$\sqrt{\frac{8}{3}} = 1,632993162$	-	Questo solido si identifica col tetracisesaedro e scambiando l <sub>3</sub> con l <sub>4</sub> diventa il triacisottaedro inscritto.	



Confrontiamo le prime proiezioni di un triacisicosaedro e di un pentacisdodecaedro aventi gli stessi vertici e inscritti nella stessa sfera.



Pentacisdodecaedro (convesso)



Triacisicosaedro (concavo)

Inscritti nella stessa sfera con gli stessi vertici.

Nella tabella abbiamo considerato solo solidi inscrittibili in una sfera che abbiamo già trattato.

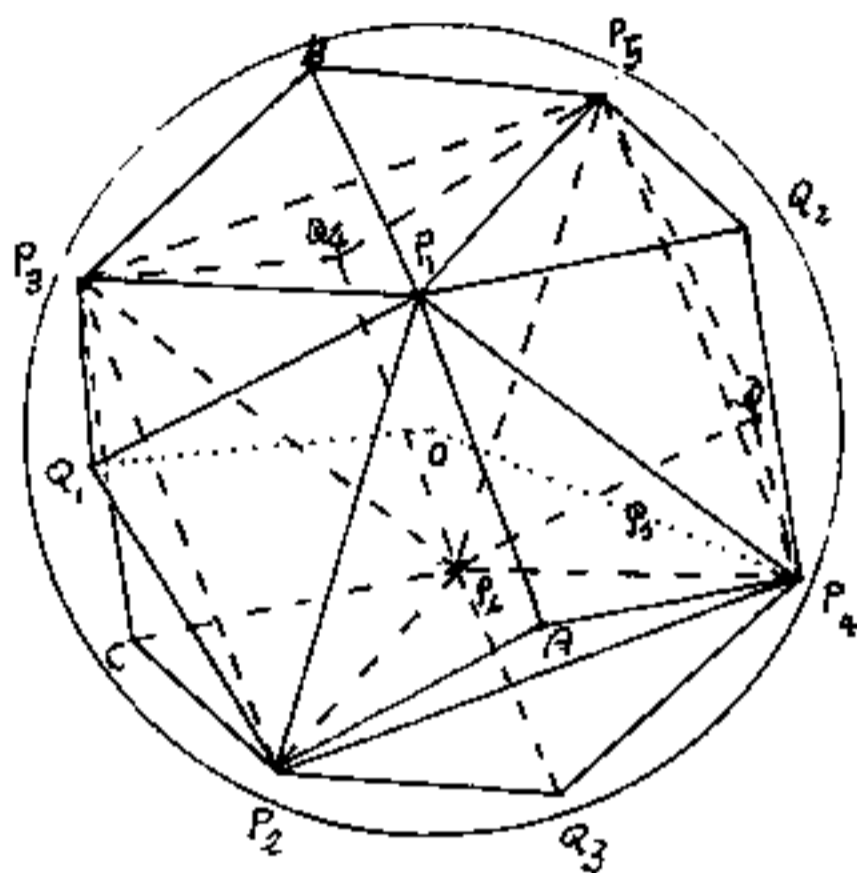
Fra i solidi non inscrittibili in una sfera, possiamo ricordare il "rombododecaedro", che può ottenersi in più modi, come abbiamo visto, come caso particolare sia del tetracisoesaedro, che del triacisottaedro. Altro solido non inscrittibile in una sfera è il romboedro a 30 facce, caso particolare sia del pentacisdodecaedro, che del triacisicosaedro.

Sono inscrittibili in una sfera i cinque solidi regolari: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro ed i solidi ricavati da essi aggiungendo piramidi sulle facce, le cui altezze sono tali da raggiungere coi vertici la superficie sferica. (cioè pari alla differenza fra il raggio della sfera circoscritta ed il raggio della sfera inscritta nel solido base:  $h = (R_3 - r_1)$ )

Dobbiamo ancora trattare vari solidi per cui l'argomento sarà completato in seguito.

# Proiezione dell'esacistetraedro

(concavo) (inscritto in una sfera)



I vertici A, B, C, D, sono di un tetraedro (vedi calcolo), ma anche i vertici  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  sono di un altro tetraedro opposto, cioè tale che gli otto vertici:  $AQ_1, BQ_2, CQ_3, DQ_4$ , sono i vertici del cubo inscritto

to nella sfera. I sei vertici:  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ , sono i vertici dell'ottaedro inscritto nella sfera.

Complessivamente abbiamo 14 vertici sulla superficie sferica, che possono ottenersi dal tetraedro inscritto, costruendo L'ESACISTETRAEDRO; oppure dal cubo inscritto nella stessa sfera, costruendo il TRACISESAEDRO; oppure dall'ottaedro inscritto, costruendo il TRIACISOTTAEDRO.

Nella proiezione non sono stati riportati gli spigoli del tetraedro, e gli spigoli del cubo, sono visibili invece gli spigoli dell'ottaedro e quindi del triacisottaedro che coincide col solido disegnato, cioè l'esacistetraedro concavo.

## Calcoliamo gli elementi del solido

sia:  $r_s$  = raggio della sfera inscritta.

spigoli dei tetraedri =  $l_t = \overline{Q_1 Q_2} = \overline{Q_1 Q_3} = \overline{Q_1 Q_4} = \overline{Q_2 Q_3} = \overline{Q_2 Q_4} = \overline{Q_3 Q_4}$

$$l_t = \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$$

spigoli del cubo :=  $l_c = \overline{AQ_1} = \overline{AQ_2} = \overline{AQ_3} = \overline{BQ_1} = \overline{BQ_2} = \overline{BQ_4} = \overline{CQ_1} = \overline{CQ_3} = \overline{CQ_4} = \overline{DQ_2} = \overline{DQ_3} = \overline{DQ_4}$

spigoli dell'ottaedro =  $l_o = \overline{P_1 P_2} = \overline{P_1 P_3} = \overline{P_1 P_4} = \overline{P_1 P_5} = \overline{P_2 P_3} = \overline{P_2 P_4} = \overline{P_2 P_6} = \overline{P_3 P_5} = \overline{P_3 P_6} = \overline{P_4 P_5} = \overline{P_4 P_6} = \overline{P_5 P_6}$

$$l_t = r_s \frac{2\sqrt{6}}{3} ; \quad r_s = \frac{l_t \sqrt{6}}{4} ; \quad l_o = l_c \sqrt{2} ; \quad l_t = l_o \frac{2\sqrt{3}}{3} ;$$

$$l_c = r_s \frac{2\sqrt{3}}{3} ; \quad r_s = \frac{l_c \sqrt{3}}{2} ; \quad l_c = \frac{l_t \sqrt{2}}{2} ; \quad l_c = \frac{l_o \sqrt{6}}{3} ;$$

$$l_o = r_s \sqrt{2} ; \quad r_s = \frac{l_o \sqrt{2}}{2} ; \quad l_o = \frac{l_t \sqrt{3}}{2} ; \quad l_o = \frac{l_c \sqrt{6}}{2} ;$$

Conviene fare una tabella di confronto. Indichiamo con:  $r_t, r_c, r_o$ , i raggi delle sfere inscritte nel tetraedro, nel cubo, nell'ottaedro; mentre  $r_s$  è comune. Lo spigolo del solido indicato anche con  $l_2$  lo indicheremo con "s" =  $\overline{AP_1} = l_4$ ;  $l_c = l_3 = \overline{Q_1 A}$ ;  $l_o = \overline{P_1 P_2} = l_1$  del tetracisesaèdro. (come  $l_c$  è  $l_1$  del triacisottaedro)

se in un quadrilatero non piano del tipo  $AP_1 Q_1 P_2$ , anziché collegare  $\overline{AQ_1}$  (come si è fatto per l'esacisottaedro convesso = tetracisesaèdro), si collega  $\overline{P_1 P_2}$  (come in figura) - si ottiene l'esacistetraedro concavo = triacisottaedro.



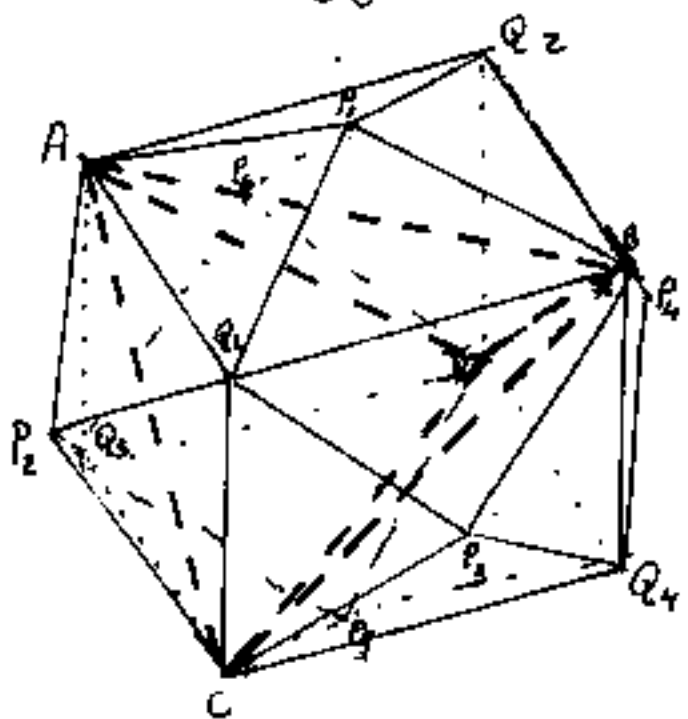
L'esacistetraedro a diedri uguali è il tetracisesaedro a diedri uguali di cui abbiamo già trattato.

Quattro vertici non adiacenti (cioè distanti una diagonale) del cubo, sono i vertici del tetraedro, poniamo  $A, B, C, D$ . Anche i vertici aggiunti sulle normali ai centri faccia  $T$  del tetraedro insistono sulla superficie sferica.

(Cioè:  $\overline{TQ} = \rho_s - r_i$ ) e non possiamo ora porre:

$K_t = \overline{TQ}$  perché  $K$  sarebbe costante, infatti i vertici  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  sono gli altri quattro vertici del cubo e sono anche vertici dell'altro tetraedro. Variano

invece i raggi  $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3} \dots$  ecc.



Nello schizzo a fianco si è evidenziato tratteggiandolo il tetraedro  $ABCD$  ove sulla faccia  $ABC$  vi sono le sei facce:  $AQ_1P_1, P_1Q_1B, BQ_1P_1, P_3Q_1C, CQ_1P_2, P_2Q_1A$ .

Dal disegno si rileva anche l'identità col tetracisesaedro, a cui rimandiamo.

Cerchiamo ora dei criteri per modulare la classe degli esacistetraedri. Fermi restando, sulla superficie sferica i vertici  $A, B, C, D$ , del tetraedro, possiamo variare i segmenti

$\overline{TQ_i} = K l_t$  ed i segmenti  $\overline{MP_i} = \lambda l_t$ .

Allo scopo di evidenziare l'influenza dei due parametri:  $K$  e  $\lambda$  considereremo separatamente variabile solo  $K$ , cioè facciamo restare sulla superficie sferica anche i punti  $P_i$ , mentre si scosteranno da esso i punti  $Q_i$ , e viceversa.

Sulla base dei calcoli già effettuati per l'esacistetraedro inscritto in una sfera abbiamo:

$$l_3 = l_t \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}; \quad \overline{OM_i} = l_t \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \overline{M_i P_i} = \boxed{\overline{M_i P_i} = \lambda l_t}; \quad \overline{TM} = l_t \frac{\sqrt{3}}{6};$$

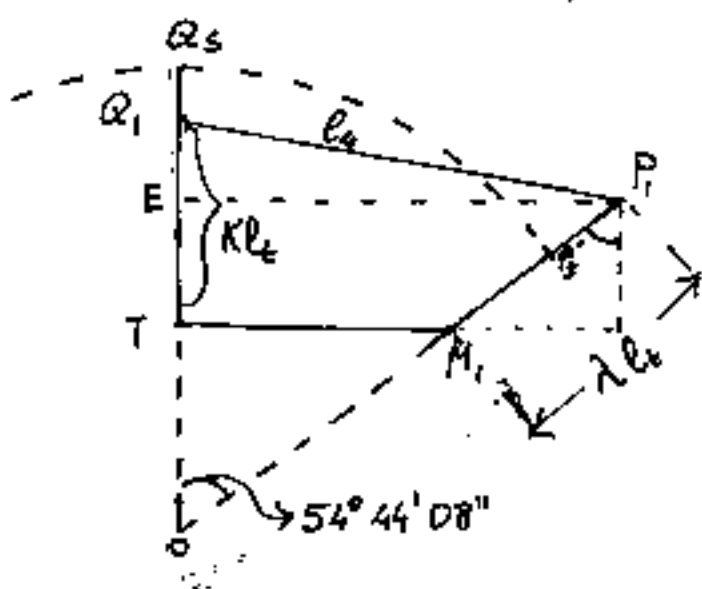
$$\overline{AP_i} = \overline{BP_i} = l_2 = s = \sqrt{\left(\frac{l_t}{2}\right)^2 + \overline{M_i P_i}^2} = l_2 = \boxed{s = \frac{l_t}{2} \sqrt{1 + 4\lambda^2}};$$

$$\overline{OT_i} = \overline{OT_i} = r_i = l_t \frac{\sqrt{6}}{12}; \quad \boxed{\overline{T_i Q_i} = K l_t}; \quad \overline{T_i A} = l_t \cdot \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\overline{AQ_i} = \overline{BQ_i} = \overline{CQ_i} = l_3 = \sqrt{\overline{TA}^2 + \overline{TQ_i}^2} = \sqrt{\frac{l_t^2}{3} + K^2 l_t^2}; \quad \boxed{l_3 = l_t \sqrt{\frac{1 + 3K^2}{3}}}$$

per  $K = \frac{1}{\sqrt{6}}$  si ha  $l_3 = l_t / \sqrt{2} = l_c =$  (spigolo del cubo)

$$\overline{QP_i} = \overline{Q_i P_2} = \overline{Q_i P_3} = l_4 = \sqrt{\overline{Q_i E}^2 + \overline{EP_i}^2} = \sqrt{(\overline{QT} - \overline{M_i P_i} \cos(\tau \hat{O} M))^2 + (\overline{TM} + \overline{M_i P_i} \sin(\tau \hat{O} M))^2}$$



$$l_4 = \sqrt{[K l_t - \lambda l_t \frac{1}{\sqrt{3}}]^2 + [l_t \frac{\sqrt{3}}{6} + \lambda l_t \frac{\sqrt{3}}{3}]^2}$$

$$l_4 = l_t \sqrt{[\frac{K^2 + \lambda^2}{3} - \frac{2K\lambda}{\sqrt{3}}] + [\frac{1}{12} + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{\lambda\sqrt{2}}{3}]}$$

$$\boxed{l_4 = l_t \sqrt{K^2 + \lambda^2 - \frac{2K\lambda}{\sqrt{3}} + \frac{\lambda\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{12}}}$$

Come si vede  $l_4$  non è più uguale ad  $l_2$ , le facce del solido sono, in generale, triangoli scaleni.

Affinché  $l_2 = l_4 = s$  (facce triangoli isosceli) avremo la relazione fra i parametri  $K$  e  $\lambda$ :

$$\lambda^2 + \frac{1}{4} = K^2 + \lambda^2 - 2K\lambda/\sqrt{3} + \lambda\sqrt{2}/3 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6} = K^2 - 2K\lambda/\sqrt{3} + \lambda\sqrt{2}/3$$

$$\frac{1}{2} = 3K^2 + (\sqrt{2} - 2K\sqrt{3})\lambda$$

$$\lambda = \frac{1 - 6K^2}{2(\sqrt{2} - 2K\sqrt{3})} = \frac{(1 - \sqrt{2}\sqrt{3}K)(1 + \sqrt{2}\sqrt{3}K)}{2\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}\sqrt{3}K)}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1 + \sqrt{6}K}{2\sqrt{2}}} \quad (\lambda = 1.219578795K)$$

Qualora imponessimo che il solido fosse inscrittibile in una sfera avremo:  $3 - \sqrt{3} = 1 + 4\lambda^2$  da cui:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \lambda = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 0,258819045}$$

$$\overline{TQ} = \frac{l_2}{\sqrt{6}} = K l_0$$

$$\boxed{K = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,40824290}$$

$$\frac{\lambda}{K} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \sqrt{6} = \frac{6-2\sqrt{3}}{4} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 0,633974597$$

Notiamo che il precedente rapporto  $\lambda/K = 1.219578795$  è diverso. Però, se nella condizione  $l_2 = l_4$  poniamo  $K = 1/\sqrt{6}$  (che è il  $K$  del solido inscritto in una sfera), potiamo che:  $(-2K\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0$  cioè che l'identità è verificata per qualunque valore di  $\lambda$ . Ciò vuol dire che se prendiamo  $Q_i$  sulla superficie sferica facendo variare  $P_i$  (ove  $\overline{HP_i} = \lambda l_0$ ) si ha sempre  $l_2 = l_4 = 1$ .



Per esempio per  $\lambda = 1$ ;  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ; si ha:  $l_2 = \frac{l_0}{2}\sqrt{5}$ ;  
 $l_4 = l_0 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{12} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}} = l_0 \sqrt{\frac{3}{3} + \frac{3}{12}} = l_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{l_0}{2}\sqrt{5} = l_2$   
 Ma, come abbiamo visto, lasciare  $Q_i$  sulla superficie sferica significa avere 8 punti: A, B, C, D,  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  che formano i vertici di un cubo le cui diagonali delle facce sono gli spigoli di due tetraedri intrecciati: A, B, C, D e  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ , perciò variare solo  $P_i$  significa espletare la classe dei tetraciseraedri, cioè i tetraciseraedri sono gli esacistetraedri con  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ; da cui l'uguaglianza:  $l_2 = l_4 = s$  indipendente da  $\lambda$  che diventa per  $\sqrt{2}$  il  $\kappa$  del tetracisesaedro.  $\lambda l_0 = \lambda l_0 \sqrt{2} = TP = \kappa l_0 = \overline{M_i P_i}$

Ma per  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{6}}$  la condizione  $l_2 = l_4$  porta alla condizione:  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707106781 > 0,258819045$ , cioè i " $P_i$ " sono esterni alla sfera. Cioè la semplificazione eliminando la divisione per zero riporta  $\lambda$  ad essere definito.

Calcoliamo il solido:

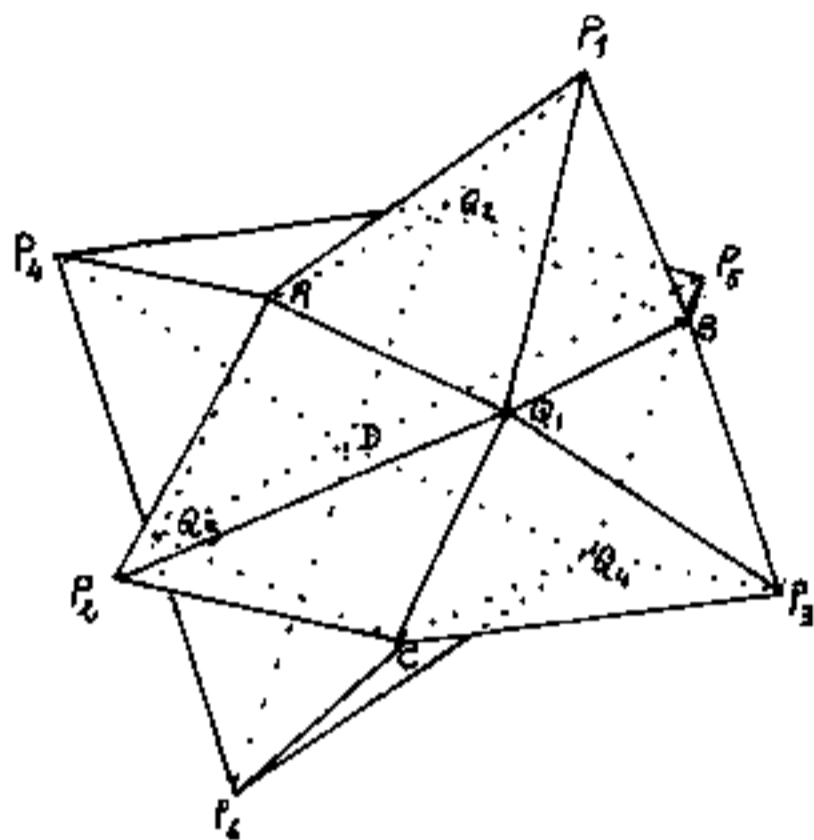
$$l_2 = l_0 \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad l_3 = l_0 \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad l_4 = l_0 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - 2 \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{12}}$$

$$l_4 = l_0 \sqrt{\frac{2+6+1}{12} - \frac{2}{6} + \frac{1}{3}} = l_0 \sqrt{\frac{9}{12}} = \underline{l_4 = \frac{l_0}{2}\sqrt{3} = l_2 = s}$$

Gli angoli alla base dei triangoli isosceli  $l_2, l_3, l_4$  ( $l_2 = l_4$ ) sono dati da:  $\arccos\left(\frac{l_3/2}{l_2}\right) = \arccos\left(\frac{l_0/2}{s}\right) = \arccos\left(\frac{l_0/\sqrt{2}}{2l_0\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 65^\circ 54' 18",57$ .

Poiché le facce sono 6 che hanno vertice comune

in  $Q$ , avremo  $6 \arccos(\frac{1}{\sqrt{6}}) = 395^\circ 21' 51''_4$ , ciò vuol dire che il solido non può essere convesso e che presenterà angoli diedri concavi su  $l_3$ .



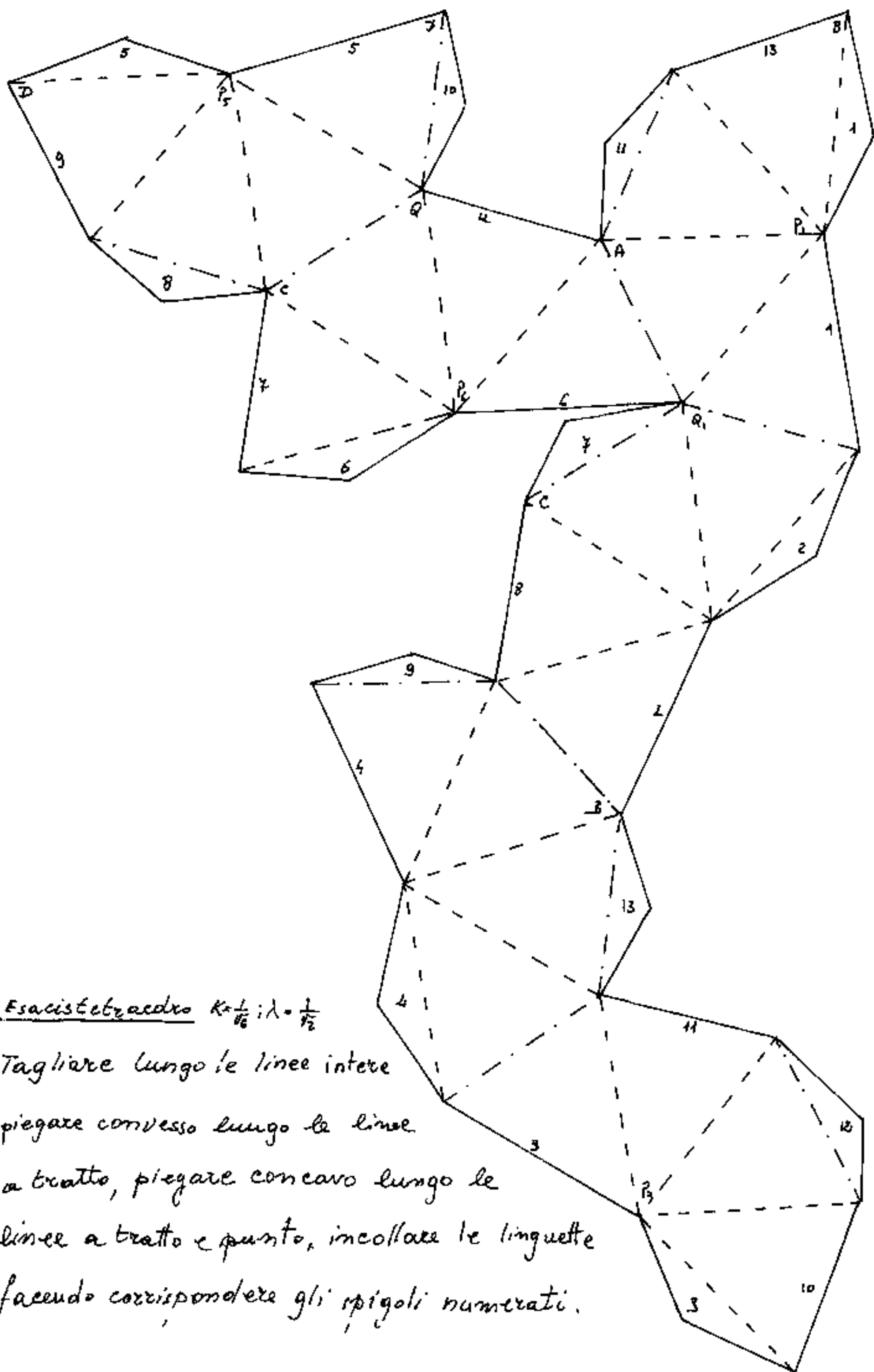
Abbiamo schizzato il solido in figura.  $A, B, C, D$  sono i vertici del tetraedro;  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  insieme ad  $A, B, C, D$ , formano i vertici del cubo;  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  sono i vertici delle piramidi aggiunte al cubo....

come si vede anche questo esacistetraedro è un tetracisesaedro, (infatti  $K = \frac{1}{\sqrt{6}}$ )

Quindi la classe dei tetracisesaedri è data dalla classe degli esacistetraedri quando  $K = \frac{1}{\sqrt{6}}$ .

Riportiamo lo schema per il modellino dell'esacistetraedro con  $K = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ;  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Notare che unendo i vertici  $P_i$  abbiamo un ottaedro; e si può dimostrare che ogni tetracisesaedro con  $K > 0$  è uguale ad un esacisottaedro con  $K < 0$ . Se invece uniamo i vertici  $P_i$  disegnando gli spigoli di un ottaedro, ma non disegniamo gli spigoli  $l_3 = l_c$  del cubo, il solido diventa un tetracisottaedro.



Esacistetraedro  $\kappa = \frac{1}{16}$ ;  $\lambda = \frac{1}{12}$

Tagliare lungo le linee intere  
 piegare convesso lungo le linee  
 a tratto, piegare concavo lungo le  
 linee a tratto e punto, incollare le linguette  
 facendo corrispondere gli spigoli numerati.

Sulla nostra sfera vi sono fissi i 4 vertici del tetraedro, fissare un  $\kappa; (\kappa_t)$  significa fissare altri 4 punti sui raggi passanti per il centro faccia del tetraedro. Cioè ad ogni  $\kappa$  corrisponde, (per  $\lambda = 0$ ) un triacistetraedro; (vedasi tabella dei triacistetraedri), quindi gli esacistetraedri possono dedursi dai triacistetraedri quando  $\lambda \neq 0$ .

Come si è già rilevato, per  $\kappa = l_t \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{l_t}{\sqrt{6}}$  il triacistetraedro degenera in un cubo e la conseguente classe degli esacistetraedri coincide con la classe dei tetracisesaedri; ove per  $\lambda = 0$  si ha il cubo, attenzione:  $\lambda = \frac{M_i P_i}{l_t}$ ; ma  $l_t =$  spigolo del tetraedro  $= l_c \sqrt{2}$ , ove  $l_c =$  spigolo del cubo, per cui:  $\lambda = \frac{M_i P_i}{l_c \sqrt{2}} = \frac{\kappa_t}{\sqrt{2}}$  dei tetracisesaedri. Quando  $\kappa_t = \frac{TQ}{l_t} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,408248290$ , avremo: (vedi tabella dei tetracisesaedri

$\lambda = 0 \rightarrow$  cubo

$\lambda = \frac{0,25}{\sqrt{2}} = 0,176776695 \rightarrow$  esacistetraedro a diedri uguali

$\lambda = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = 0,258819045 \rightarrow$  " inscrittibile in una sfera

$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0,353553391 \rightarrow$  rombododecaedro (limite solidi convessi)

$\lambda = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0,5 \rightarrow$  esacistetraedro a facce equilatera (solido con concavità)

---

Possiamo per ogni  $\kappa = \frac{\overline{IQ}}{l_t}$ , fare una tabella dei vari  $\lambda$ . Naturalmente sarebbe opportuno scegliere le variabili  $\kappa$  e  $\lambda$  per solidi caratteristici.

Ma possiamo anche invertire le nostre tabelle, cioè per ogni  $\lambda = \frac{\overline{M_i P_i}}{l_t}$  fare una tabella dei vari  $\kappa$ .

Considerare  $P_i$  sulla superficie sferica significa considerare un ottaedro inscritto. Sia  $P_i$  sulla superficie sferica e sia  $Q$  variabile:

$$\lambda = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; \quad \lambda^2 = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right); \quad \lambda = 0,258819045.$$

$$l_3 = l_t \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \left(\frac{8 + 2\sqrt{2}}{12}\right)} = \frac{l_t}{2} \sqrt{1 + 2 - \sqrt{3}}; \quad l_2 = \frac{l_t}{2} \sqrt{3 - \sqrt{3}}$$

$$l_3 = l_t \sqrt{\frac{1 + 3\kappa^2}{3}}; \quad l_4 = l_t \sqrt{\kappa^2 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \kappa \left( \frac{2}{4} \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sqrt{3}} + \frac{(\sqrt{4} - \sqrt{2})\sqrt{2}}{4 \cdot 3} + \frac{1}{12} \right)};$$

$$l_4 = l_t \sqrt{\kappa^2 - \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \frac{5}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}}; \quad l_4 = l_t \sqrt{\kappa^2 - \kappa \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{5 - \sqrt{3}}{12}}$$

$$\text{per } \kappa = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad l_4 = l_t \sqrt{\frac{2}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2}{12} + \frac{5}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}} = \frac{l_t}{2} \sqrt{\frac{9 - 3\sqrt{3}}{3}} =$$

$$\left( l_4 = \frac{l_t}{2} \sqrt{3 - \sqrt{3}} \right) \text{ torna}$$

Notiamo che  $l_2$  è indipendente da  $\kappa$ .

$l_3$  ammette un minimo per  $\kappa = 0$ ; ( $\overline{QP} = 0$ );  $l_4 = \frac{l_t}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{3}}{3}}$ ;  $l_3 = \frac{l_t}{\sqrt{3}}$

$l_4 = \overline{Q_i P_i}$  ammette pure un minimo:  $l_{4 \min} = \int_3 \text{sen}(\widehat{QOP}) = \frac{l_t \sqrt{6}}{4} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$

$$= \boxed{l_{4 \min} = \frac{l_t}{2}}. \quad \text{Se poniamo: } \left[ \kappa^2 - \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{6}}\right) \kappa + \frac{5 - \sqrt{3}}{12} \right] = 0$$

$$\text{risolvendo: } \kappa = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{6}} \pm \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{24} - \frac{5 - \sqrt{3}}{12}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{6}} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2\sqrt{6}}$$

(radici immaginarie essendo  $\Delta < 0$ .)

$$\text{Per } l_4 = l_{4\min} = \frac{l_6}{2} = l_6 \sqrt{K^2 - K \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} \right) + \frac{5-\sqrt{3}}{12}}$$

$$K^2 - K \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} \right) + \frac{2-\sqrt{3}}{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}} \pm \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{12} - \frac{2-\sqrt{3}}{12}}$$

$$\boxed{K = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}}}$$

$$K^2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{24} = \frac{2-\sqrt{3}}{12} \quad \Rightarrow \quad l_3 = l_6 \sqrt{\frac{1 + \frac{2-\sqrt{3}}{12}}{3}} = l_6 \sqrt{\frac{6-\sqrt{3}}{12}}$$

$$\boxed{l_3 = \frac{l_6}{2} \sqrt{\frac{6-\sqrt{3}}{3}}}$$

$$\text{verifica: } l_4 = l_6 \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}} \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} \right) + \frac{5-\sqrt{3}}{12}} = l_6 \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{12} - \frac{4-2\sqrt{3}}{12} + \frac{5-\sqrt{3}}{12}}$$

$$l_4 = \frac{l_6}{2} \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}-4+2\sqrt{3}+5-\sqrt{3}}{3}} = \frac{l_6}{2} \sqrt{\frac{3}{3}} =$$

$$\boxed{l_4 = \frac{l_6}{2}}$$

$$\boxed{l_2 = \frac{l_6}{2} \sqrt{3-\sqrt{3}}}$$

In questo solido  $Q_1$  si trova sullo stesso piano di  $P_1, P_2, P_3$ ; piano parallelo alla faccia del tetraedro e distante da esso  $\overline{TQ} = K l_6 = l_6 \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}} \right) = 0,149429245 l_6$

Anche questo solido presenta angoli diedri concavi su  $l_3$ . Occorre, per fissare le idee, rendersi conto che se teniamo fissi i quattro vertici del tetraedro  $A, B, C, D$ , e variabili:  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  e  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ , abbiamo la generalità degli esacistetraedri, se teniamo fissi sulla superficie sferica gli 8 vertici:  $A, Q_1, B, Q_2, C, Q_3, D, Q_4$ , varierà solo  $\lambda$  e

si hanno i tetracisesaedri. Se invece teniamo fissi i sei vertici:  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ , e facciamo variare  $A, B, C, D, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ , ed imponiamo che  $A, B, C, D$ , e  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  restino su raggi perpendicolari alle facce dell'ottaedro di vertici  $P_i$ , e che varino con lo stesso parametro  $\kappa$ , avremo la classe dei triaeisottaedri.

Poiché si hanno due parametri  $(\lambda; \kappa)$  per definire un esacistetraedro, e divengono abbastanza complesso le espressioni in funzione di  $\lambda$  e  $\kappa$ ; conviene, calcolati gli spigoli:  $l_2, l_3, l_4$ ;

$$\boxed{\frac{Q_1 Q_2}{2} = l_2 \left( \frac{1}{6} + \kappa \sqrt{\frac{2}{3}} \right)} \quad ; \quad \boxed{\frac{P_1 P_2}{2} = l_2 \left( \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)}$$

dette  $h_2, h_3, h_4$  le altezze relative agli spigoli:  $l_2, l_3, l_4$ ; detti  $\hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4$  gli angoli opposti ad  $l_2, l_3, l_4$ ; avremo:

$$\hat{A}_2 = \arccos \left( \frac{l_3^2 + l_4^2 - l_2^2}{2 l_3 l_4} \right) ; \quad \hat{A}_3 = \arccos \left( \frac{l_2^2 + l_4^2 - l_3^2}{2 l_2 l_4} \right) ;$$

$$\hat{A}_4 = \arccos \left( \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_4^2}{2 l_2 l_3} \right)$$

$$h_2 = l_4 \sin \hat{A}_3 = l_3 \sin \hat{A}_4 ; \quad h_3 = l_2 \sin \hat{A}_4 = l_4 \sin \hat{A}_2 ; \quad h_4 = l_3 \sin \hat{A}_2 = l_2 \sin \hat{A}_3 ;$$

detti:  $\hat{D}_2, \hat{D}_3, \hat{D}_4$  gli angoli diedri sugli spigoli  $l_2, l_3, l_4$ :

$$\boxed{\hat{D}_2 = \frac{Q_1 Q_2 / 2}{h_2}}$$

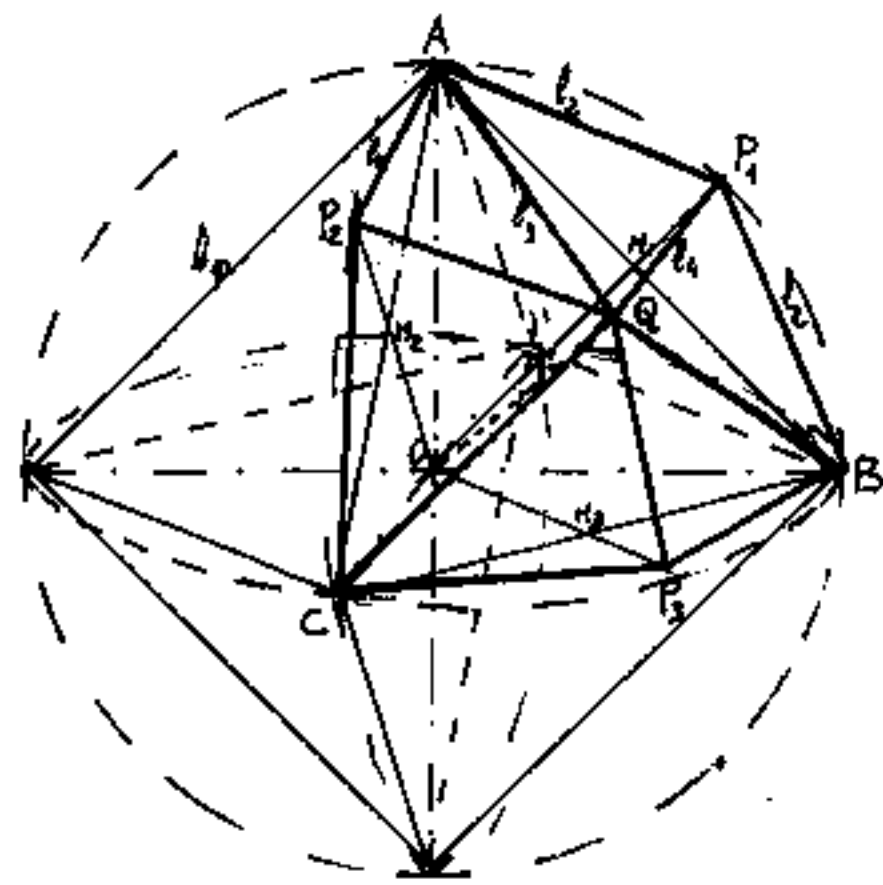
$$\boxed{\hat{D}_3 = \frac{P_1 P_2 / 2}{h_3}}$$

$$\boxed{\hat{D}_4 = \frac{l_2 / 2}{h_4}}$$

utilizzare via via gli elementi calcolati.

# L' esacisottaedro

Analogamente a quanto detto per l'esacistetraedro, prolunghiamo, dal centro  $O$  dell'ottaedro, il raggio diretto alla metà  $M_1$  dello spigolo  $\overline{AB}$ , fino ad incontrare la superficie della sfera circoscritta in  $P_1$ . (Analogamente per gli spigoli  $\overline{CA}$  e  $\overline{CB}$  dai punti medi  $M_2$  ed  $M_3$ , ai punti sulla superficie sferica  $P_2$  e  $P_3$ ). Sia  $T$  il centro della faccia  $ABC$



della faccia  $ABC$  dell'ottaedro, e  $Q$  un punto sulla superficie sferica ottenuto prolungando  $\overline{OT}$ ; Sia  $l_0$  lo spigolo dell'ottaedro;  $R_s = \frac{l_0}{\sqrt{2}}$   
 $R_s =$  raggio della sfera circoscritta all'ottaedro;

(vedi figura).  $l_2 = \overline{AP_1} = \sqrt{\overline{AM_1}^2 + \overline{M_1P_1}^2} = \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + \left(R_s - \overline{OM_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + \left[\frac{l_0}{\sqrt{2}} - \frac{l_0}{2}\right]^2}$

$$l_2 = \frac{l_0}{2} \sqrt{1 + (\sqrt{2}-1)^2} = \boxed{l_2 = l_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}} = \underline{l_2 = (0,54119610) l_0}$$

$l_3 =$  lato ottagono inscritto nel cerchio max della sfera.

$$\overline{AQ} = l_3 = 2 R_s \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{AOQ}}{2}\right) = 2 \left(\frac{l_0}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{(3-\sqrt{3})/6} = \boxed{l_3 = l_0 \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}}$$

$$\boxed{l_3 = l_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}} = \underline{l_3 = (0,650115167) l_0}$$

$$\overline{P_1Q} = l_4 = 2 R_s \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{P_1OQ}}{2}\right) = 2 \left(\frac{l_0}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{M_1OT}}{2}\right) = 2 \left(\frac{l_0}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{\frac{1 - \cos(\widehat{M_1OT})}{2}}$$



Il triangolo  $MOT$  è retto in  $T$  ed  $(\widehat{MOT}) = 35^\circ 15' 52''$

$$l_4 = l_0 \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\overline{OT}/\overline{OM}_1}{2}} ; \quad l_4 = l_0 \sqrt{1 - \overline{OT}/\overline{OM}_1} ;$$

$$l_4 = l_0 \sqrt{1 - \frac{l_0/\sqrt{6}}{l_0/2}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{6}}} = \boxed{l_4 = l_0 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{6}}{3}}}$$

$$\boxed{l_4 = l_0 \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}} \quad \underline{l_4 = (0,42837299) l_0}$$

I triangoli  $M_1OM_2$  ed  $P_1OP_2$  sono equilateri

$$\widehat{M_1OM_2} = 60^\circ ; \quad \overline{OM}_1 = \overline{OM}_2 = \overline{M_1M_2} = \frac{l_0}{2} ; \quad \text{più cui } \overline{P_1P_2} = \rho_1 = \frac{l_0}{\sqrt{2}}$$

Il quadrilatero  $AP_2QP_1$  ha i vertici sulla superficie sferica, ma, non essendo inscrittibile in una circonferenza, non è piano, cioè non può essere la faccia di un solido.

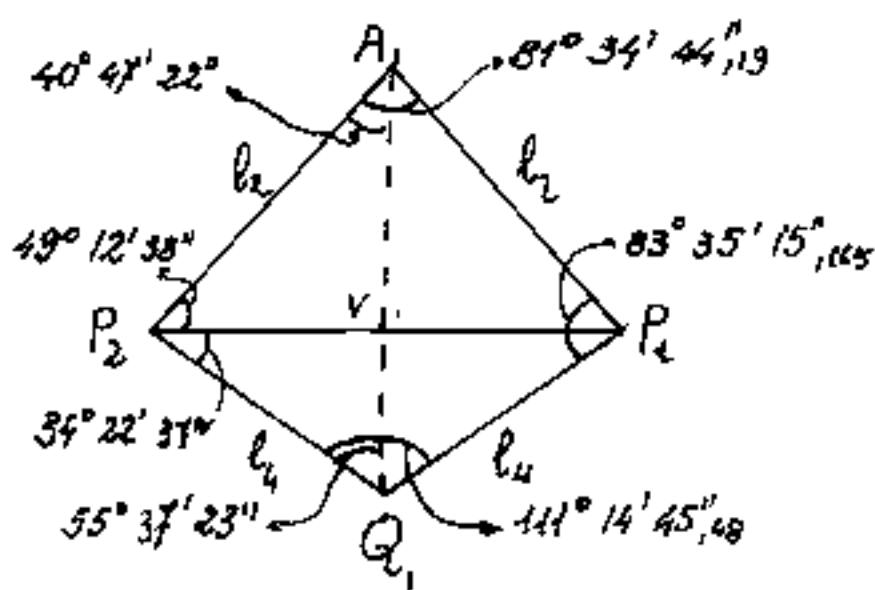
Infatti calcoliamo gli angoli interni; sappiamo:

$$l_2 = l_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = (0,54119610) l_0 = \overline{AP}_1 = \overline{AP}_2$$

$$l_4 = l_0 \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}} = (0,42837299) l_0 = \overline{P_2Q} = \overline{QP}_1$$

$$l_3 = l_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = (0,65011517) l_0 = \overline{AQ} \quad (\text{non consideriamo } l_3 \text{ per ora})$$

$$\overline{P_1P_2} = \rho_1 = l_0/\sqrt{2} = (0,70710678) l_0 \quad (\text{consideriamo valido } \overline{P_1P_2} \text{ per il quadrilatero piano } A_1P_1P_2)$$



$$\widehat{P_1A_1P_2} = 2 \arcsen \left( \frac{\overline{P_1P_2}/2}{l_2} \right) = 2 \arcsen \left( \frac{l_0/\sqrt{2}}{l_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}} \right)$$

$$= 2 \arcsen \left( \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \right) = \underline{81^\circ 34' 44,19''}$$

$$\widehat{P_1Q_1P_2} = 2 \arcsen \left( \frac{\overline{P_1P_2}/2}{l_4} \right) = 2 \arcsen \left( \frac{l_0/\sqrt{2}}{l_0 \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}} \right)$$

$$= 2 \arcsen \left( \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{8}} \right) = \underline{111^\circ 14' 45,48''}$$

$$81^\circ 34' 44,19'' + 111^\circ 14' 45,48'' = 192^\circ 49' 29,67''$$

Poiché  $\widehat{P_1A_1P_2} + \widehat{P_1Q_1P_2} \neq 180^\circ$  il quadrilatero non è inscrittibile in

una circonferenza e pertanto i quattro punti  $P_1, A, P_2, Q$  sulla superficie sferica non sono complanari.

$$\widehat{A, P_2, Q_1} = \widehat{A, P_2, P_1} + \widehat{P_1, P_2, Q_1} = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right) + \arccos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{8}}\right) =$$

$$= 49^\circ 12' 37,905'' + 34^\circ 22' 37,26'' = \underline{\widehat{A, P_2, Q_1} = 83^\circ 35' 15,165''}$$

$$\widehat{A, P_2, Q_1} + \widehat{A, P_1, Q_1} = 2(83^\circ 35' 15,165'') = \underline{167^\circ 10' 30,33''}$$

verifichiamo la somma degli angoli interni come se il quadrilatero fosse piano, cioè definito solo da  $l_3, l_2, l_4, l_4, \overline{P_1P_2}$  escludendo  $l_3$ . abbiamo:  $167^\circ 10' 30,33'' + 192^\circ 49' 29,67'' = 360^\circ$  (verificato)

Calcoliamo quanto è  $\overline{A_1Q_1}$  cioè  $l_3^*$  se il quadrilatero fosse piano: Poiché il quadrilatero è simmetrico su  $\overline{A_1Q_1}$  possiamo

scrivere:  $\overline{A_1Q_1} = \overline{A_1V} + \overline{VQ_1} = \sqrt{l_2^2 - \left(\frac{\overline{P_1P_2}}{2}\right)^2} + \sqrt{l_4^2 - \left(\frac{\overline{P_1P_2}}{2}\right)^2} =$

$$\overline{A_1Q_1} = l_0 \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} \right) = l_0 \left( \sqrt{\frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{2}{3}}}} \right) = l_0 \left( \begin{matrix} 0,40974775+ \\ 0,24187480 \end{matrix} \right)$$

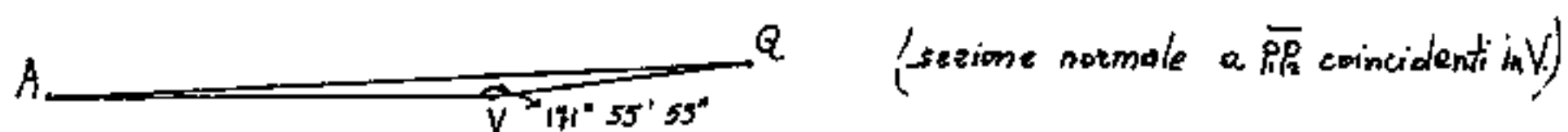
$$\underline{\overline{A_1Q_1} = (0,65162255) l_0 > l_3 = (0,65011517) l_0 = \overline{AQ}}$$

Essendo:  $\overline{P_1P_2} > \overline{AQ}$  ed il piano della corda  $\overline{AQ}$  biseca  $\overline{P_1P_2}$  in  $V$  che è il punto di  $\overline{P_1P_2}$  più lontano dalla circonferenza, cioè vuol dire che  $\overline{P_1P_2}$  è più verso il centro della sfera della corda  $\overline{AQ}$ . Per cui se oltre i quattro lati utilizziamo il segmento  $\overline{P_1P_2}$  avremo un solido con diedro concavo su  $\overline{P_1P_2}$ , se invece utilizziamo il segmento  $\overline{AQ}$  avremo un solido convesso.

Consideriamo tracciato il segmento  $\overline{P_1P_2}$ ; la ruotazione dei triangoli:  $P_2AP_1$  e  $P_2Q_1P_1$  in modo che

i punti A e Q si avvicinano rispetto al quadrilatero piano:  
 $A, P_2, Q, P_1$ ;  $\overline{AQ} = l_3 = l_0(0,6504514) < \overline{A_1Q_1} = l_0(0,65162255)$ .

Consideriamo il triangolo (vero) AVQ, ove:  $\overline{AV} = \overline{A_1V}$   
 e  $\overline{VQ} = \overline{VQ_1}$ , e calcoliamo l'angolo diedro  $\widehat{AVQ}$   
 fra le facce adiacenti  $\overline{P_1P_2}$ , avremo:



$$\widehat{AVQ} = \arccos \left( \frac{\overline{AV}^2 + \overline{VQ}^2 - \overline{AQ}^2}{2(\overline{AV})(\overline{VQ})} \right) =$$

$$\widehat{AVQ} = \arccos \left( \frac{\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}} \right) = \arccos \left( \frac{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2}{\sqrt{6}}}{2\sqrt{\frac{49}{64} - \frac{7}{8}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}}} \right) =$$

$$\widehat{AVQ} = \arccos \left( \frac{3\sqrt{6}/4 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2}{\sqrt{\frac{147}{8} - \frac{7\sqrt{6}(\sqrt{3}+2)}{2} + 8\sqrt{3}}} \right) = \arccos \left( \frac{-0,480719938}{0,48552637} \right) =$$

$$\widehat{AVQ} = \arccos(-0,990100574) \quad ; \quad \widehat{AVQ} = 171^\circ 55' 52,8'' = \widehat{D}_{P_1P_2}$$

diedro concavo sullo spigolo  $\overline{P_1P_2}$  del solido.

$$\text{Area della faccia } AP_1P_2 = \frac{1}{2} \overline{P_1P_2} \cdot \overline{AV} = \frac{l_0^2}{2} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} =$$

$$S_{APP_2} = \frac{l_0^2}{8} \sqrt{7-4\sqrt{2}} = (0,144867706) l_0^2$$

$$\text{L'altezza relativa ad } l_2 = a_2 = \frac{2 \cdot S_{APP_2}}{l_2} = \frac{l_0}{4} \sqrt{(7-4\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$a_2 = \frac{l_0}{4} \sqrt{6-\sqrt{2}} = l_0(0,535361236); \quad \overline{P_1P_4} = \overline{P_1P_2} \sqrt{2} = l_0 = l_3$$

Possiamo ora calcolare l'angolo diedro delle  
 facce su  $l_2$ ; avremo il triangolo isoscele di  
 lati  $a_2$  e base  $\overline{P_1P_4} = l_0$ :  $\widehat{D}_2 = 2 \arcsin \left( \frac{l_0/2}{a_2} \right)$

$$\widehat{D}_2 = 2 \arcsin \left( \frac{1}{2} \frac{4}{\sqrt{6-\sqrt{2}}} \right) = 138^\circ 07' 04,62''$$

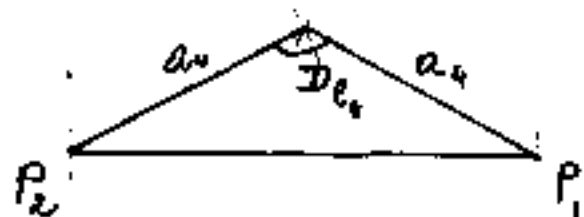


Area della faccia:  $P_2QP_1 = S_{P_2QP_1} = \frac{1}{2} \overline{P_1P_2} \cdot \overline{VQ} =$

$$S_{P_2QP_1} = \frac{l_0^2}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{7}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)} = \underline{l_0^2 (0,085515656)}$$

L'altezza relativa a  $\overline{P_2Q} = l_4$  è  $a_4 = \frac{2 \cdot S_{P_2QP_1}}{l_4} =$

$$a_4 = l_0 \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{7}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) (3 + \sqrt{6})} = \frac{l_0}{4} \sqrt{5 - \sqrt{6}} = \underline{l_0 (0,399257925)}$$



calcoliamo l'angolo diedro su  $l_4$ :  $\hat{D}_{l_4} = 2 \arccos \left( \frac{P_1P_2/2}{a_4} \right)$

$$\hat{D}_{l_4} = 2 \arccos \left( \frac{\frac{l_0 \sqrt{2}/2}{\frac{l_0}{4} \sqrt{5 - \sqrt{6}}}}{\frac{l_0}{4} \sqrt{5 - \sqrt{6}}} \right) = 2 \arccos \left( \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{6}}} \right) = \underline{124^\circ 37' 57,7''} = \hat{D}_{l_4}$$

Abbiamo calcolato i diedri del solido concavo (cioè abbiamo assunto come spigolo  $\overline{P_1P_2}$  e non  $\overline{AQ}$ ). L'area della superficie laterale di questo solido sarà:  $S = 24 (S_{APP_2} + S_{P_2QP_1}) = l_0^2 (0,144867706 + 0,085515656)$

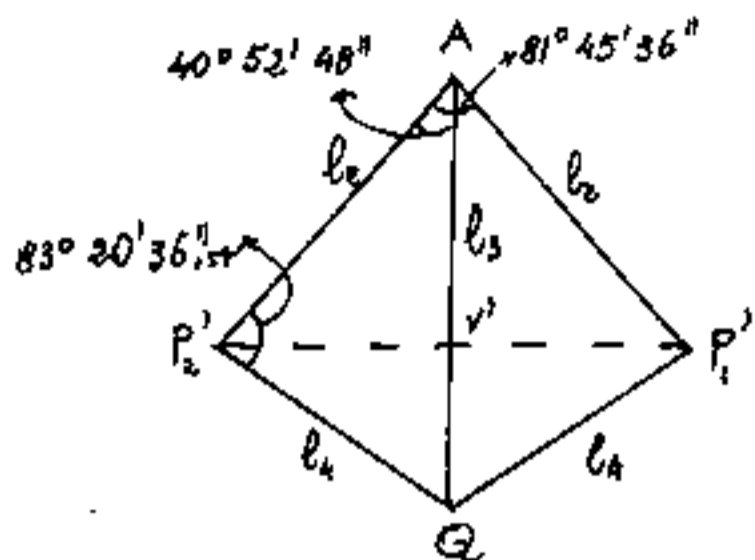
$$\boxed{S = l_0^2 (5,529200688)} = l_0^2 (11,0584011)$$

area della sfera circoscritta  $4 \int_2^2 \pi = \int_1^1 (12,5663706)$

Consideriamo ora l'esacisottaedro convesso, che ha gli stessi vertici sulla sfera circoscritta. Cioè del quadrilatero non piano  $AP_1QP_2$  consideriamo ora lo spigolo  $\overline{AQ} = l_3$  anziché  $\overline{P_1P_2}$ .

Rendiamo piano il quadrilatero facendo ruotare intorno ad  $AQ = l_3$  i triangoli:  $AP_1Q$  e  $AP_2Q$ .

ove  $P_1$  e  $P_2$  finiscono in  $P_1'$  e  $P_2'$ . Abbiamo così due triangoli scaleni congruenti  $AP_1'Q$  ed  $AP_2'Q$ .



Calcoliamo gli angoli interni di questo nuovo quadrilatero.

$\hat{P}_2'AQ = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_3^2 - l_4^2}{2l_2l_3}\right)$

$$\hat{P}_2'AQ = \arccos\left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{2\sqrt{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})}}\right) = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})}}\right)$$

$$\hat{P}_2'AQ = \arccos(0,756082087) = 40^\circ 52' 47,963''$$

angolo leggermente superiore ad  $\hat{P}_2'A_1Q_1$

$$\hat{P}_2'AP_1' = 81^\circ 45' 36''$$

$$\hat{AP}_2'Q = \hat{AP}_1'Q = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_4^2 - l_3^2}{2l_3l_4}\right) = \arccos\left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(1 - \sqrt{\frac{2}{3}})}}\right) =$$

$$\hat{AP}_2'Q = \hat{AP}_1'Q = \arccos(0,115916896) = 83^\circ 20' 36,553''$$

$$\hat{P}_2'QA = \arccos\left(\frac{l_3^2 + l_4^2 - l_2^2}{2l_3l_4}\right) = \arccos\left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}}{2\sqrt{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})(1 - \sqrt{\frac{2}{3}})}}\right) =$$

$$\hat{P}_2'QA = \arccos(0,562422224) = 55^\circ 46' 35,484''$$

verifica:  $\hat{P}_2'AQ = 40^\circ 52' 47,963''$

$$\hat{AP}_2'Q = 83^\circ 20' 36,553''$$

$$\hat{P}_2'QA = 55^\circ 46' 35,484''$$

$$\underline{180^\circ 00' 00,000'' \text{ (rotina)}}$$

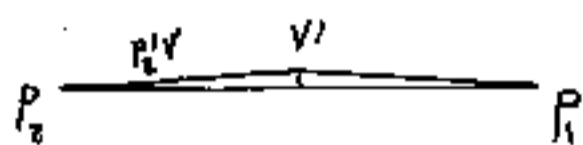
Confrontiamo ora la distanza  $\overline{P_1'P_2'}$  con  $\overline{P_1'P_1'}$ .

$$\overline{P_2'P_1'} = \overline{P_2'V'} + \overline{V'P_1'} = 2\overline{P_2'V'} = 2l_2 \operatorname{sen} \widehat{P_2'AV'} = 2l_2 \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{sen}(40^\circ 52' 47,9'')$$

$$\overline{P_2'P_1'} = 2l_2 (0,54119610)(0,654476796) = 2l_2 (0,35420029)$$

$$\overline{P_2'P_1'} = l_2 (0,708400580) > \overline{P_1P_2} = 0,70710678l_2$$

calcoliamo l'angolo diedro:  $\widehat{P_2'V'P_1'} = \widehat{D}_{l_3}$



$$\widehat{D}_{l_3} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{\overline{P_2'P_1'}/2}{\overline{P_2'V'}} \right) =$$

$$= 2 \operatorname{arcsen} (0,998173634)$$

$$\widehat{D}_{l_3} = 2(86^\circ 32' 11'',904)$$

$$\widehat{D}_{l_3} = 173^\circ 04' 23'',808 \quad (\text{convesso})$$

Area del triangolo AP<sub>2</sub>Q =  $S_{AP_2Q} = \frac{1}{2} l_3 \overline{P_2'V'} = \frac{1}{2} 0,230270981 l_2^2$

$$S_{AP_2Q} = 0,11513549 l_2^2$$

altezza su  $l_2 = a_2 = \frac{2S_{AP_2Q}}{l_2} = \frac{l_2^2 0,230270981}{l_2 0,54119610} = 0,425485294 l_2$

altezza su  $l_4 = a_4 = \frac{2S_{AP_2Q}}{l_4} = \frac{l_2^2 (0,230270981)}{l_2 (0,42837299)} = 0,537547852 l_2$

angolo diedro su  $l_2 = \widehat{D}_{l_2} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{\overline{Q_1Q_2}/2}{a_2} \right)$

$$\overline{Q_1Q_2} = 2l_4 \operatorname{sen}(35^\circ 15' 52'') = 2 \frac{l_2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = l_2 \frac{2}{\sqrt{6}} = l_2 (0,81649658)$$

$$\widehat{D}_{l_2} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{0,40824829}{0,425485294} \right) = \widehat{D}_{l_2} = 2(73^\circ 38' 07'',71)$$

$$\widehat{D}_{l_2} = 147^\circ 16' 15'',4$$

angolo diedro su  $l_4 = \widehat{D}_{l_4} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{l_2/2}{a_4} \right) =$

$$\widehat{D}_{l_4} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{1}{2(0,537547852)} \right) = 2 \operatorname{arcsen} (0,930149749) =$$

$$\widehat{D}_{l_4} = 2(68^\circ 27' 29'',4)$$

$$\widehat{D}_{l_4} = 136^\circ 54' 58'',8$$

Solido convesso con area della superficie laterale

$$S = 48 S_{APR} = 48 (0,11513549) l_0^2 = \boxed{5,526503544} l_0^2 = S$$

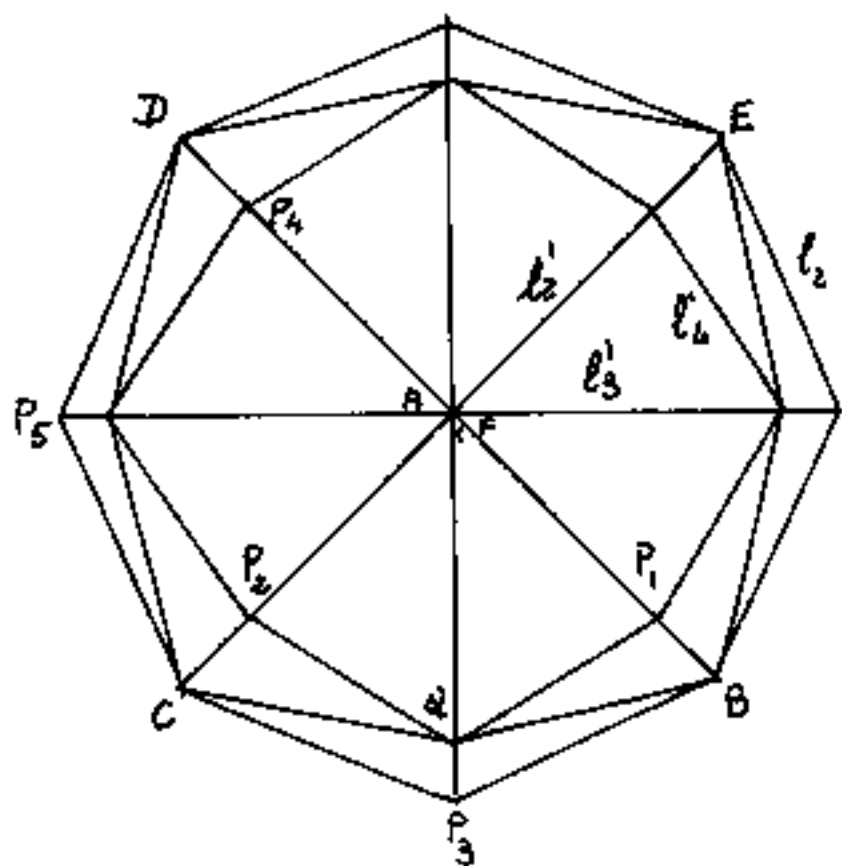
$S = \int_0^{\rho^2} (11,05300709)$  leggermente inferiore all'area del solido concavo.

I due solidi esacisottaedri, uno concavo ed uno convesso, che hanno per vertici gli stessi punti della superficie sferica in cui sono inscritti, mettono a fuoco il problema del quadrilatero  $P_2AP_1Q$ , non piano.

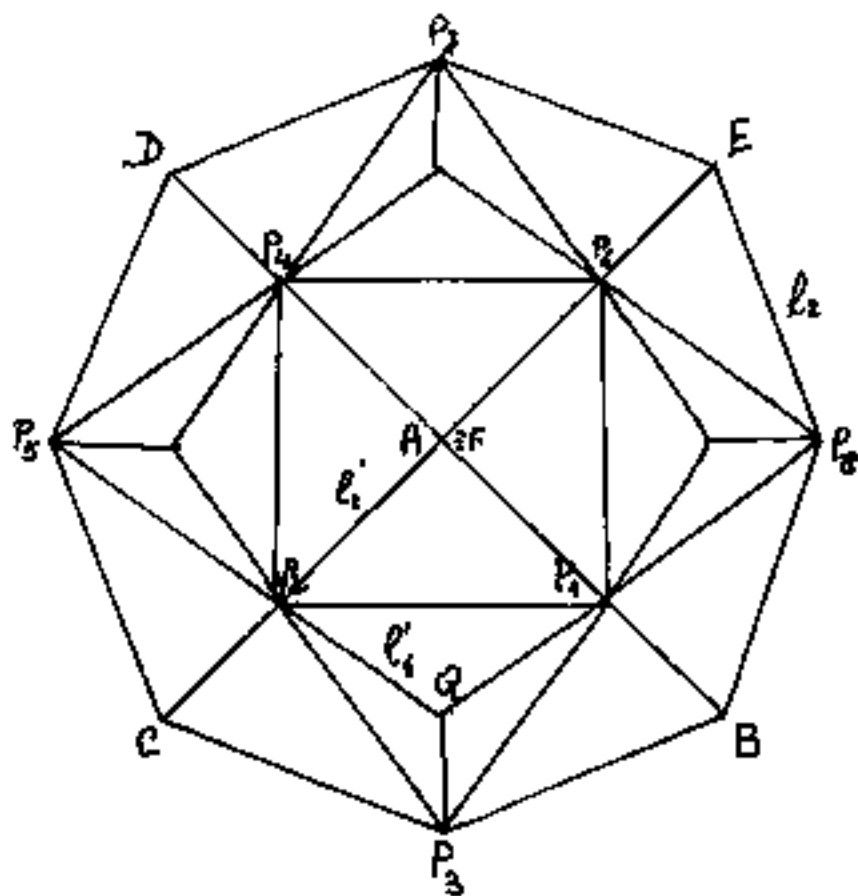
Nasce così il problema del trapezoedro, che può ottenersi in modi diversi e cioè:

- 1) Fermi restando i punti  $P_2, A, P_1$  sulla sfera, abbassiamo  $Q$  in modo da rendere piatto il diedro concavo  $\hat{D}_{P_2P_1}$
- 2) Fermi restando i punti  $A$  e  $Q$  innalziamo  $P$  in modo da rendere piatto il diedro su  $AQ$ :  $\hat{D}_{AQ}$ .

Esacisottaedro convesso

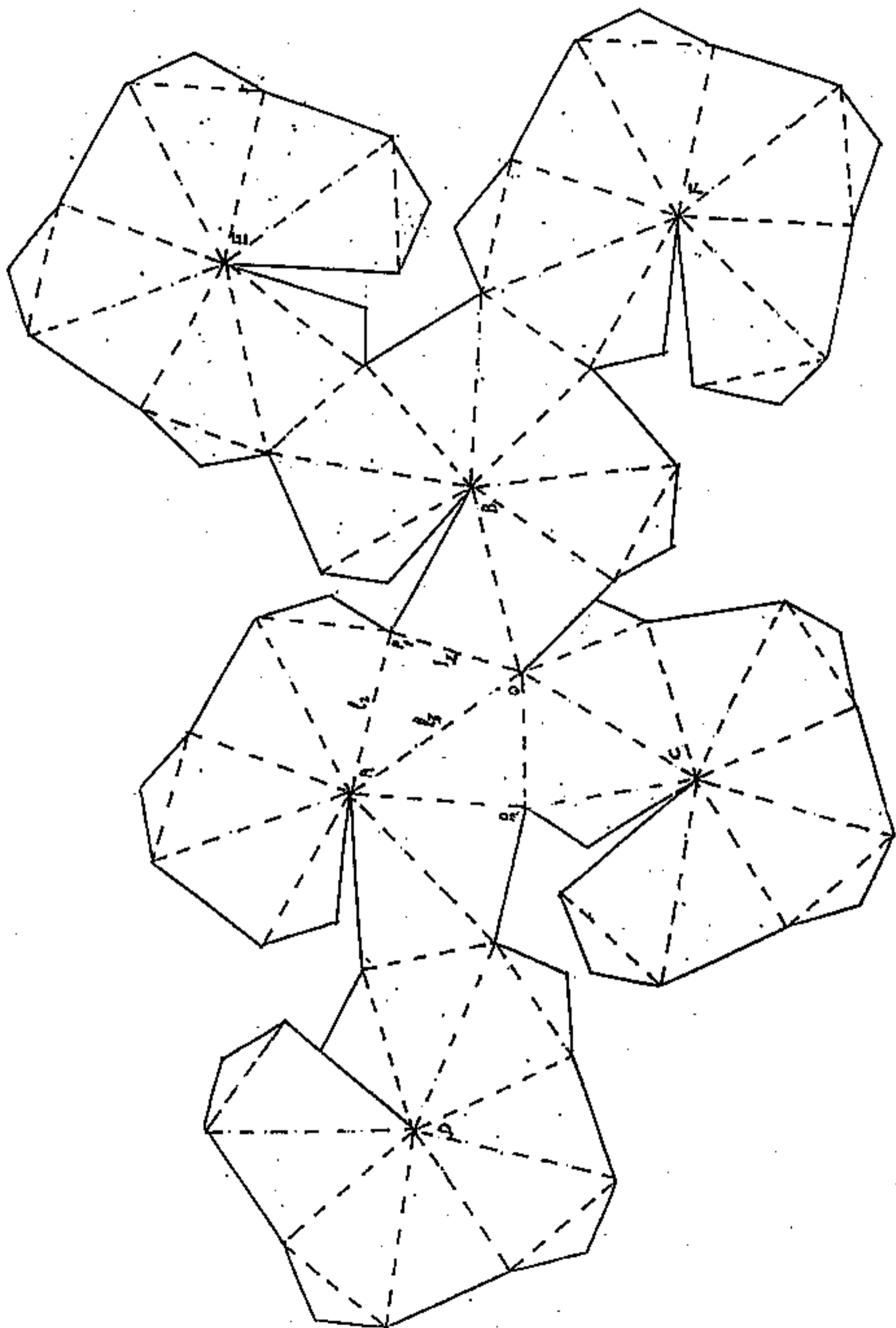


Esacisottaedro concavo



Schema di Esacisottaedro inscritto in una sfera  
Il solido è convesso

(A, B, C, D, E, F, sono i vertici comuni all'ottaedro)

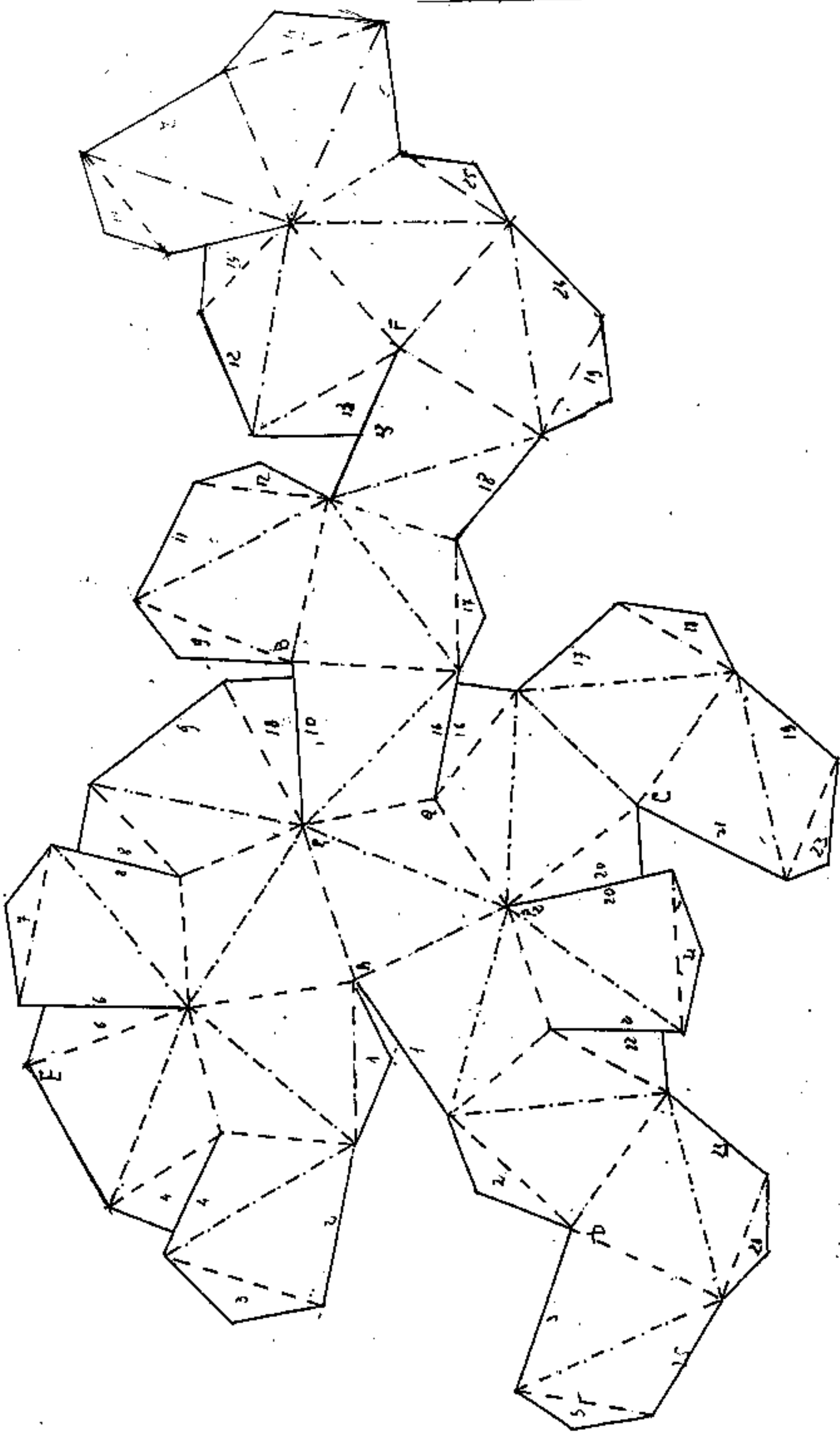




ESACIS OTTAEDRO

Solido concavo inscritibile in

una sfera



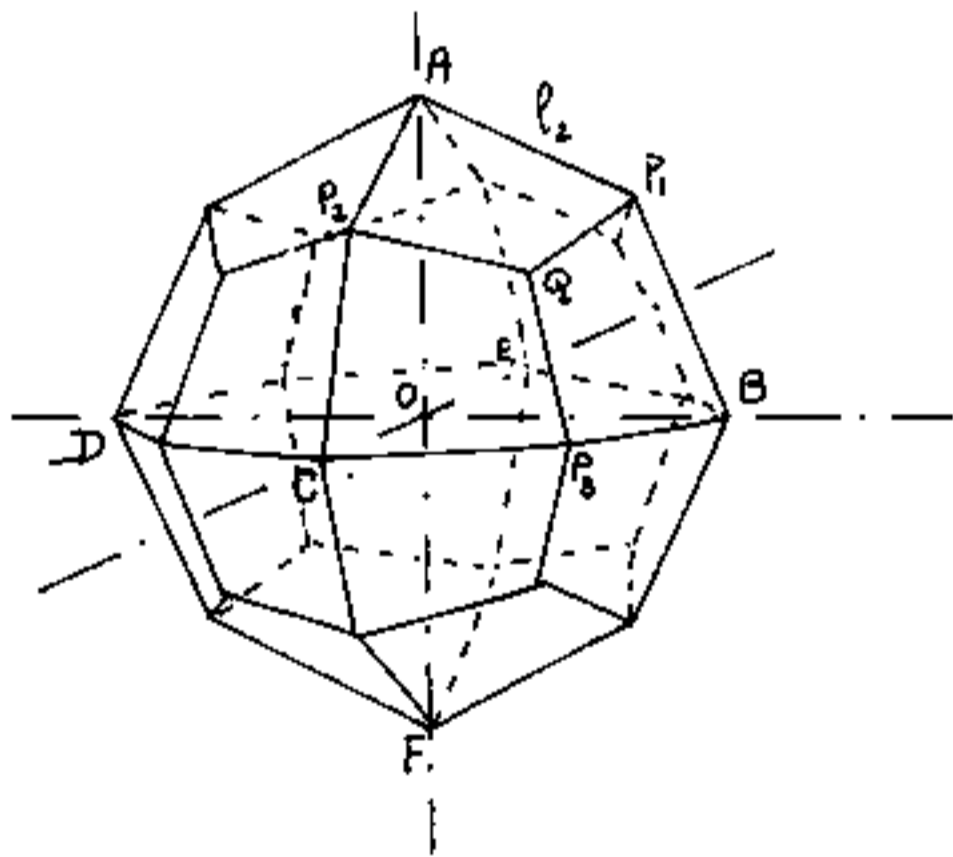
# IL TRAPEZOEDRO

Il trapezoedro talvolta è chiamato:

ICOSITETRAEDRO (dal greco: icos = 20, tetra = 4, edro = piano, base o faccia; cioè 24 facce).

Il trapezoedro è quindi un solido di 24 facce, 48 spigoli e 26 vertici ( $24 + 26 = 48 + 2$ ).

I 26 vertici sono costituiti: dai 6 vertici dell'ottaedro, più 12 vertici dei raggi bisettori degli spigoli dell'ottaedro, più, 8 vertici dei raggi uscenti dai centro-faccia dell'ottaedro. Le facce sono quadrangolari simmetriche rispetto ad una diagonale.



Dal disegno è possibile rilevare che gli spigoli dell'ottaedro base, cioè:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BF}$ ,  $\overline{FD}$ ,  $\overline{DA}$ , si proiettano in vera grandezza  $l_0$ ; avremo

$r_1 = l_0 / \sqrt{2}$  = raggio della circonferenza circoscritta all'otta-

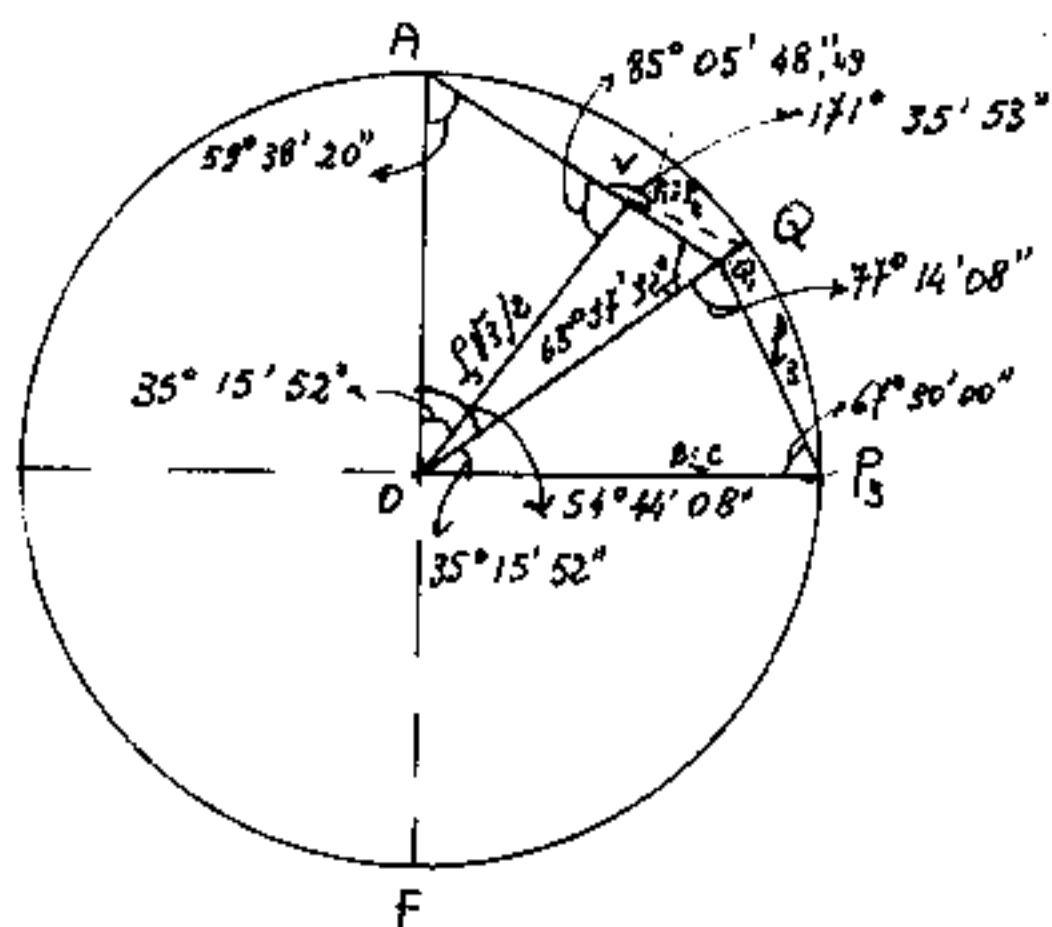
sulla quale insistono pure i punti:  $P_1, P_2, \dots$  ove:  $\overline{P_1 P_2} = r_1$  (vedi esacisottaedro),  $l_2$  = spigolo maggiore = lato del

l'ottagono inscritto nei cerchi massimi passanti per i vertici dell'ottaedro:  $\overline{AP_1} = l_2 = l_0 \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \boxed{l_2 = l_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}}$

$$\boxed{l_2 = r_1 \sqrt{2 - \sqrt{2}}} = (0,765356865) r_1 ; \Rightarrow \underline{l_2 = (0,54119610) l_0}$$

I punti Q giacenti sul prolungamento del segmento che dal centro O della sfera, va al centro delle facce dell'ottaedro, non giacciono sulla superficie sferica, altrimenti il quadrilatero AP<sub>3</sub>QP<sub>3</sub> non sarebbe pino.

Occorre trovare la posizione di Q che rende piano tale quadrilatero. Facciamo una sezione secondo il cerchio massimo: AQP<sub>3</sub>F



Nel disegno il punto V corrisponde alla proiezione della corda  $\overline{P_1P_2} = P_3$ . Tale corda dista dal centro O:  $\overline{OV} = P_3 \sqrt{3}/2$

Sappiamo: (radi esaeisottaedro)

$$\overline{AV} = P_3 \frac{1}{2} \sqrt{7-4\sqrt{2}} \quad \overline{AO} = P_3$$

Calcoliamo gli angoli del triangolo AOV di cui sono noti i lati:

$$\hat{OAV} = \arccos \left( \frac{\overline{OA}^2 + \overline{AV}^2 - \overline{VO}^2}{2(\overline{OA} \times \overline{AV})} \right) = \arccos \left( \frac{1 + (7-4\sqrt{2})/4 - 3/4}{2(\sqrt{7-4\sqrt{2}}/2)(1)} \right) =$$

$$= \arccos \left( \frac{8-4\sqrt{2}}{4(\sqrt{7-4\sqrt{2}})} \right) = \arccos \left( \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}} \right) = \hat{OAV} = \hat{OAQ}_1$$

$$\hat{OAV} = \arcsen \left( \frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}} \right) = \hat{OAQ}_1 = 59^\circ 38' 19'' \text{ for } P_3$$

L'angolo  $\hat{AOQ}$  fra vertice e centrofaccia dell'ottaedro è già stato calcolato:  $\hat{AOQ} = \hat{AOQ}_1 = 54^\circ 44' 08''$

Per differenza:  $AQ_1O = 180^\circ - (\widehat{OAQ_1} + \widehat{AOQ_1}) = \boxed{\widehat{AQ_1O} = 65^\circ 37' 32''}$

$$\begin{aligned} \sin \widehat{AQ_1O} &= \sin(\widehat{OAQ_1} + \widehat{AOQ_1}) = \left(\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{21-12\sqrt{2}}}\right) = \left(\sqrt{\frac{31+8\sqrt{2}}{51}}\right); \quad \cos \widehat{AQ_1O} = \left(2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{51}}\right) \end{aligned}$$

Ora possiamo calcolare  $\overline{AQ_1}$  ed  $\overline{OQ_1}$  per definire la posizione di  $Q_1$ .

$$\overline{OQ_1} = \overline{OA} \frac{\sin(\widehat{OAQ_1})}{\sin(\widehat{OQ_1A})} = \rho_3 \frac{\sin(59^\circ 38' 19''.7)}{\sin(65^\circ 37' 32'')} =$$

$$\overline{OQ_1} = \rho_3 \left(\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}\right) \left(\frac{\sqrt{3}(7-4\sqrt{2})}{2\sqrt{2}-1}\right) = \rho_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1}\right) = \rho_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{\overline{OQ_1} = \rho_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1}\right) = (0,947290041) \rho_3}$$

$$\overline{AQ_1} = \overline{OA} \left(\frac{\sin(\widehat{AOQ_1})}{\sin(\widehat{AQ_1O})}\right) = \rho_3 \frac{\sin(54^\circ 44' 08'')}{\sin(65^\circ 37' 32'')} = \rho_3 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \left(\sqrt{\frac{51}{31+8\sqrt{2}}}\right) =$$

$$\boxed{\overline{AQ_1} = \rho_3 \frac{1}{7} \sqrt{62-16\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{AQ_1 = \rho_0 \frac{1}{7} \sqrt{31-8\sqrt{2}}}$$

completiamo il calcolo degli angoli:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{AVO}) &= \frac{\overline{AV}^2 + \overline{OV}^2 - \overline{AO}^2}{2(\overline{AV})(\overline{OV})} = \left(\frac{7-4\sqrt{2}/4 + 3/4 - 1}{2\sqrt{(3/4)((7-4\sqrt{2})/4)}}\right) = \\ &= \left(\frac{(6-4\sqrt{2})/4}{(2/4)\sqrt{21-12\sqrt{2}}}\right) = \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{21-12\sqrt{2}}}\right) \end{aligned}$$

$$\widehat{AVO} = \arccos\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{21-12\sqrt{2}}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{\sqrt{21-12\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \operatorname{arctg}(6-\sqrt{2}) = \boxed{\widehat{AVO} = 85^\circ 05' 48''.4934}$$

$$\hat{A}OV = \arccos \left( \frac{\overline{AO}^2 + \overline{OV}^2 - \overline{AV}^2}{2(\overline{AO})(\overline{OV})} \right) = \arccos \left( \frac{1 + \frac{3}{4} - \frac{(7-4\sqrt{2})}{4}}{2(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \right) =$$

$$= \arccos \left( \frac{4+3-\cancel{7}+4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \right) = \arccos \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) = \operatorname{arcsen} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\hat{A}OV = 35^\circ 15' 51'',8029$$

Verifichiamo:

$$\hat{A}OV = 35^\circ 15' 51'',80285792$$

$$\hat{A}VD = 85^\circ 05' 48'',49339944$$

$$\hat{O}AV = 59^\circ 38' 19'',70374264$$

$$\hline 180^\circ 00' 00'',00000000$$

(Le cifre decimali sono state calcolate ad alta precisione, solo l'ultima cifra è arrotondata.)

Calcoliamo ora il triangolo  $OVQ_1$ , avremo:

$$\hat{V}OQ_1 = \hat{A}OQ_1 - \hat{A}OV = \operatorname{arcsen} \left( \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right) = \operatorname{arcsen} \left( \frac{1}{3} \right)$$

$$\hat{V}OQ_1 = \operatorname{arcsen} \left( \frac{1}{3} \right); = \arccos \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right); = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{4}\sqrt{2} \right);$$

$$\hat{V}OQ_1 = 19^\circ 28' 16'',394504$$

$$\hat{O}VQ_1 = \operatorname{arcsen} \left( \frac{2}{\sqrt{31-12\sqrt{2}}} \right) = \arccos \left( \frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{21-12\sqrt{2}}} \right) = \operatorname{arctg} \left( -(6+\sqrt{32}) \right)$$

$$\hat{O}VQ_1 = 94^\circ 54' 11'',5066$$

$$\overline{VQ_1} = \overline{OV} \frac{\operatorname{sen}(\hat{V}OQ_1)}{\operatorname{sen}(\hat{V}Q_1O)} = \left( \frac{\rho\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{\sqrt{3}\sqrt{7-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-1} \right) = \frac{\rho}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}{(2\sqrt{2}-1)} \right)$$

$$= \frac{\rho}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(7-4\sqrt{2})(9+4\sqrt{2})}}{7} \right) = \overline{VQ_1} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\sqrt{31-8\sqrt{2}}}{14} \right)$$

$$\overline{VQ_1} = \frac{\rho}{2} (0,31692312)$$

$$\overline{OQ_1} = \left( \frac{\rho\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{7-4\sqrt{2}}} \right) \left( \frac{\sqrt{3}\sqrt{7-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-1} \right) = \overline{OQ_1} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{(2\sqrt{2}-1)} \right) \text{ (come già trovato)}$$

Calcoliamo ora il triangolo  $Q_1OP_3$ :

$$\boxed{\overline{OP_3} = l_0} \quad ; \quad \boxed{\overline{OQ_1} = l_0 \left( \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1} \right)} \quad ; \quad \boxed{Q_1\hat{O}P_3 = 35^\circ 15' 52''}$$

$$\text{sen}(Q_1\hat{O}P_3) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad ; \quad \text{cos}(Q_1\hat{O}P_3) = \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \quad ; \quad \text{tg}(Q_1\hat{O}P_3) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\overline{Q_1P_3} = l_3 = \sqrt{\overline{OQ_1}^2 + \overline{OP_3}^2 - 2(\overline{OQ_1})(\overline{OP_3}) \text{cos}(Q_1\hat{O}P_3)} = \overline{Q_1P_1} = \overline{Q_1P_2}$$

$$l_3 = l_0 \sqrt{\left( \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1} \right)^2 + 1 - \left( \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1} \right) \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)} =$$

$$l_3 = l_0 \sqrt{\frac{3}{(2\sqrt{2}-1)^2} - \frac{(2\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2}-1)^2}} = l_0 \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{(2\sqrt{2}-1)}$$

$$\boxed{l_3 = l_0 \left( \frac{\sqrt{20-2\sqrt{2}}}{7} \right)} = \boxed{(0,591979951) l_0}$$

$$\boxed{l_3 = l_0 \left( \frac{\sqrt{10-\sqrt{2}}}{7} \right)} = \boxed{(0,418593038) l_0}$$

$$\boxed{\text{sen}(O\hat{Q}_1P_3) = \text{sen}(Q_1\hat{O}P_3) \left( \frac{\overline{OP_3}}{Q_1P_3} \right)} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{20-2\sqrt{2}}/7} \right) = \boxed{\left( \frac{7}{\sqrt{60-6\sqrt{2}}} \right)}$$

$$\boxed{\text{cos}(O\hat{Q}_1P_3) = \sqrt{\frac{11-6\sqrt{2}}{60-6\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{\frac{11+7}{2}} - \sqrt{\frac{11-7}{2}}}{\sqrt{60-6\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{(3-\sqrt{2})}{\sqrt{60-6\sqrt{2}}}}$$

$$\boxed{\text{tang}(O\hat{Q}_1P_3) = \left( \frac{7}{3-\sqrt{2}} \right)} = \boxed{(3+\sqrt{2})}$$

$$\boxed{(O\hat{Q}_1P_3) = 77^\circ 14' 8,19715''}$$

$$\text{sen}(O\hat{P}_3Q_1) = \text{sen} Q_1\hat{O}P_3 \left( \frac{\overline{OQ_1}}{Q_1P_3} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1} \right) \left( \frac{7}{\sqrt{20-2\sqrt{2}}} \right) =$$

$$\boxed{\text{sen}(O\hat{P}_3Q_1) = \left( \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{20-2\sqrt{2}}} \right)} \quad \boxed{\text{cos}(O\hat{P}_3Q_1) = \left( \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{20-2\sqrt{2}}} \right)} \quad \boxed{\text{tang}(O\hat{P}_3Q_1) = (\sqrt{2}+1)}$$

$$\hat{O}P_3Q_1 = 67^\circ 30' 00''$$

Notare che  $\hat{O}P_3Q_1$  è la metà dell'angolo  $135^\circ$  supplementare di  $45^\circ$ .

verifichiamo:  $\hat{O}P_3Q_1 = 67^\circ 30' 00''$ ,

$$\hat{O}Q_1P_3 = 77^\circ 14' 08'', 19715$$

$$Q_1\hat{O}P_3 = 35^\circ 15' 51, 80285$$

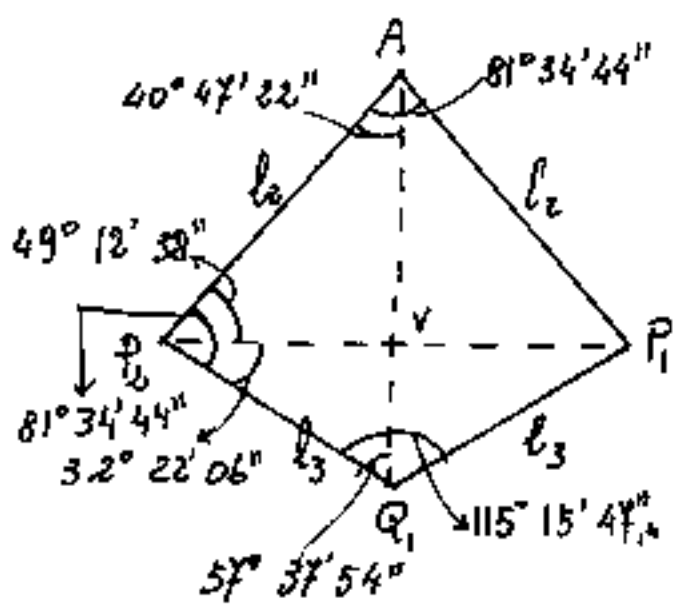
---


$$180^\circ 00' 00'', 00000$$


---

Possiamo ora costruire il quadrilatero piano  $AP_2Q_1P_1$  faccia del trapezoedro.

Poniamo  $l_0 = 5 \text{ cm.}$ ; da cui  $f_3 = 3,535533906 \text{ cm.} = \overline{P_1P_2}$



$$\overline{AV} = 0,579470826 f_3 = 2,048738753 \text{ cm.}$$

$$\overline{VQ_1} = 0,316923118 f_3 = 1,120692429 \text{ cm.}$$

$$\overline{AQ_1} = 0,896393944 f_3 = 3,169231182 \text{ cm.}$$

$$l_2 = \overline{AP_i} = 0,765366865 f_3 = 2,705980502 \text{ cm.}$$

$$l_3 = \overline{Q_1P_i} = 0,591979951 f_3 = 2,092965188 \text{ cm.}$$

calcoliamo ora gli angoli di una faccia.

$$\hat{P_2AV} = \arctg\left(\frac{\overline{P_1P_2}/2}{\overline{AV}}\right) = \arctg\left(\frac{f_3/2}{\overline{AV}}\right) = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}\right) = \arcsen\left(\frac{f_3/2}{AP_2}\right)$$

$$= \arcsen\left(\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{2}}{8}}\right) = \boxed{40^\circ 47' 22'', 09538}$$

$$\hat{P_2AP_1} = 2\hat{P_2AV} = \boxed{81^\circ 34' 44'', 19076}$$

$$(360^\circ - 4\hat{P_2AP_1}) = 33^\circ 41' 03'', 237$$

(serve per il modello)

$$\hat{AP_2V} = (90^\circ - \hat{P_2AV}) = \boxed{49^\circ 12' 37'', 90462}$$

$$\hat{VP_2Q_1} = \arctg\left(\frac{\overline{Q_1V}}{\overline{VP_2}}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{31-8\sqrt{2}}/14}{1/2}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{31-8\sqrt{2}}}{7}\right) =$$

$$= \arcsen\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31-8\sqrt{2}}{20-2\sqrt{2}}}\right) = \arccos\left(\frac{7}{2\sqrt{20-2\sqrt{2}}}\right) = \boxed{32^\circ 22' 06'', 2862}$$

$$\boxed{\widehat{AP_2Q_1}} = (\widehat{AP_2V} + \widehat{VP_2Q_1}) = \boxed{81^\circ 34' 44'', 1908}$$

$$\boxed{\widehat{P_2Q_1V}} = \arcsen\left(\frac{\rho_3/2}{l_3}\right) = \arcsen\left(\frac{7}{2\sqrt{30-2\sqrt{2}}}\right) = \boxed{57^\circ 37' 53'', 7137}$$

$$\boxed{\widehat{P_2Q_1P_1}} = \boxed{115^\circ 15' 47'', 4275} \quad \left(\frac{360^\circ - 3\widehat{P_2Q_1P_1}}{3} = 14^\circ 12' 37'', 718\right)$$

serve per il modellino

$$\text{Area di una faccia} = \frac{(\overline{AQ_1})(\overline{P_1P_2})}{2} = \rho_3^2 \frac{1}{14} \sqrt{62-16\sqrt{2}} =$$

$$= \boxed{S_{AP_2Q_1P_1} = 0,448196972 \rho_3^2}$$

$$\text{Area laterale del trapezoido} = S_l = \frac{12}{7} \int_0^{\rho_3} \sqrt{62-16\sqrt{2}} =$$

$$\boxed{S_l = 10,75572732 \rho_3^2}$$

Si noti che i poliedri piramidali che dal centro costituiscono il solido hanno per altezza  $\overline{OV} = \rho_3 \sqrt{3}/2$  per cui il volume del trapezoido sarà:

$$V = \frac{1}{3} (\overline{OV}) (S_{AP_2Q_1P_1}) 24 =$$

$$V = \frac{1}{3} \left(\rho_3 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\rho_3^2 \frac{1}{14} \sqrt{62-16\sqrt{2}}\right) 24 ; \quad V = \rho_3^3 \left(\frac{2}{7} \sqrt{186-48\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{V = 3,105199709 \rho_3^3}$$

$$\text{volume della sfera circoscritta: } V_s = \frac{4}{3} \pi \rho_3^3 = \underline{4,188790207} \rho_3^3$$

all'ottaedro

(3 punti  $Q_i$  del trapezoido non stanno sulla sfera)

Calcoliamo gli angoli diedri del trapezoido.

L'angolo diedro fra le facce che hanno in comune  $l_3 = \overline{QP}$  sia  $\mathcal{D}_{l_3}$ . Il triangolo isoscele  $P_2Q_1P_1$  che ha



per base  $\overline{P_1P_2} = l_3$  e per altezza  $\overline{Q_1V}$ , ha per altezza relativa a  $\overline{P_2Q_1}$ :  $a_3 = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \overline{VQ_1}}{\overline{P_2Q_1}} = l_3 \left( \frac{1 \cdot \sqrt{31-8\sqrt{2}}/14}{\sqrt{20-2\sqrt{2}}/7} \right) = l_3 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{31-8\sqrt{2}}{20-2\sqrt{2}}} \right)$

$$\hat{D}_{l_3} = 2 \arcsen \left( \frac{\overline{P_1P_2}/2}{a_3} \right) =$$

$$\hat{D}_{l_3} = 2 \arcsen \left( \sqrt{\frac{20-2\sqrt{2}}{31-8\sqrt{2}}} \right) = 2 \arcsen \left( \sqrt{\frac{12+2\sqrt{2}}{17}} \right) = 2 \left( 69^\circ 03' 32'', 3263 \right)$$

$$\boxed{\hat{D}_{l_3} = 138^\circ 07' 04'', 6526} \quad (\text{diedro su } l_3)$$

L'angolo diedro fra le facce che hanno in comune  $l_2 = \overline{AP}$  sia  $\hat{D}_{l_2}$ . Il triangolo isoscele:

$P_2AP_1$  che ha per base  $\overline{P_1P_2} = l_3$  e per altezza  $\overline{VA}$ , ha per altezza relativa a  $\overline{P_2A}$ :  $a_2 = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \overline{VA}}{\overline{P_2A}} =$

$$a_2 = l_3 \left( \frac{\sqrt{7-4\sqrt{2}}/2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \right) = l_3 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6-\sqrt{2}}{2}} \right)$$

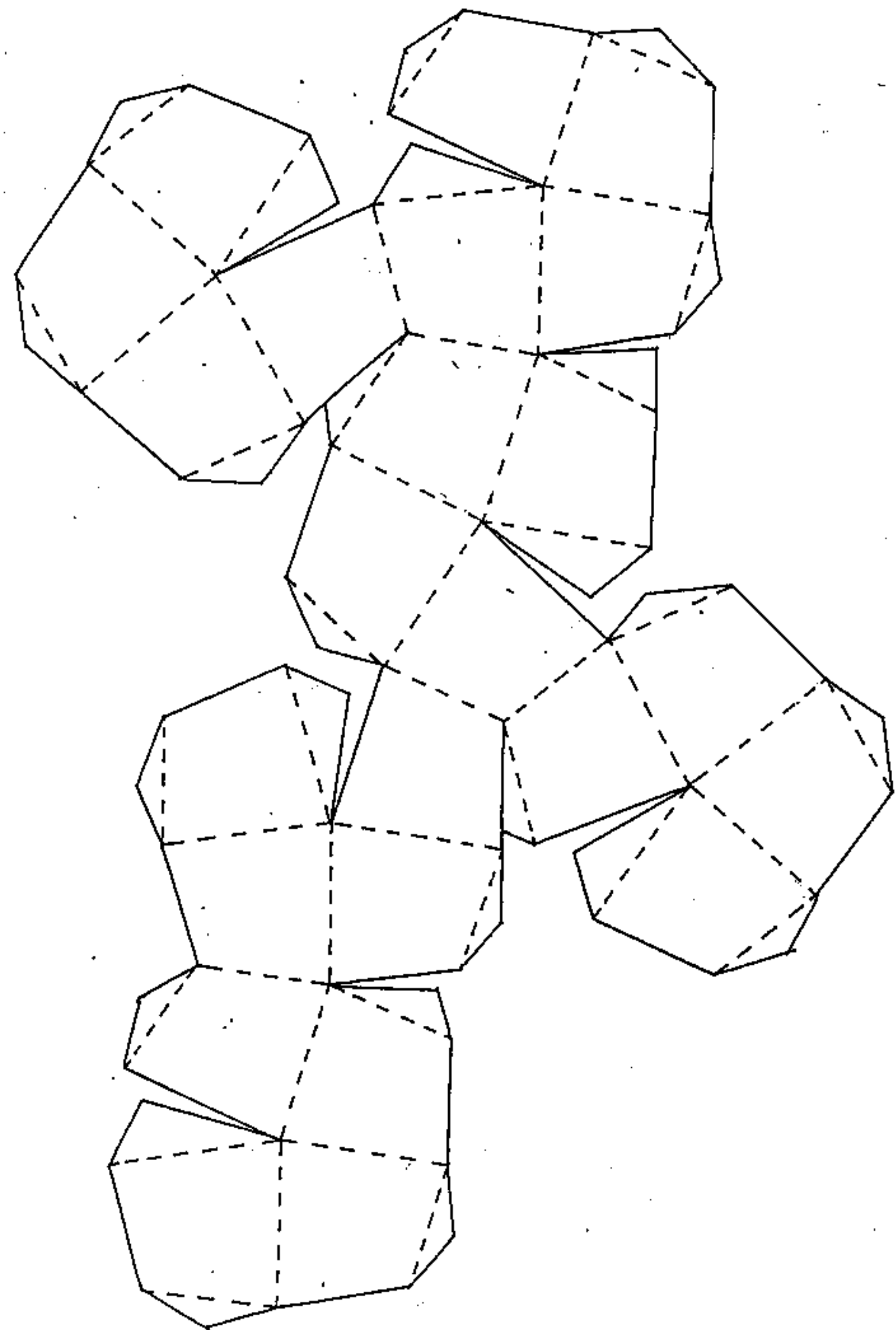
$$\hat{D}_{l_2} = 2 \arcsen \left( \frac{\sqrt{2} (\overline{P_1P_2})/2}{a_2} \right) = 2 \arcsen \left( \frac{2\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{6-\sqrt{2}}} \right) =$$

$$= 2 \arcsen \left( \frac{2}{\sqrt{6-\sqrt{2}}} \right) = 2 \left( 69^\circ 03' 32'', 3263 \right)$$

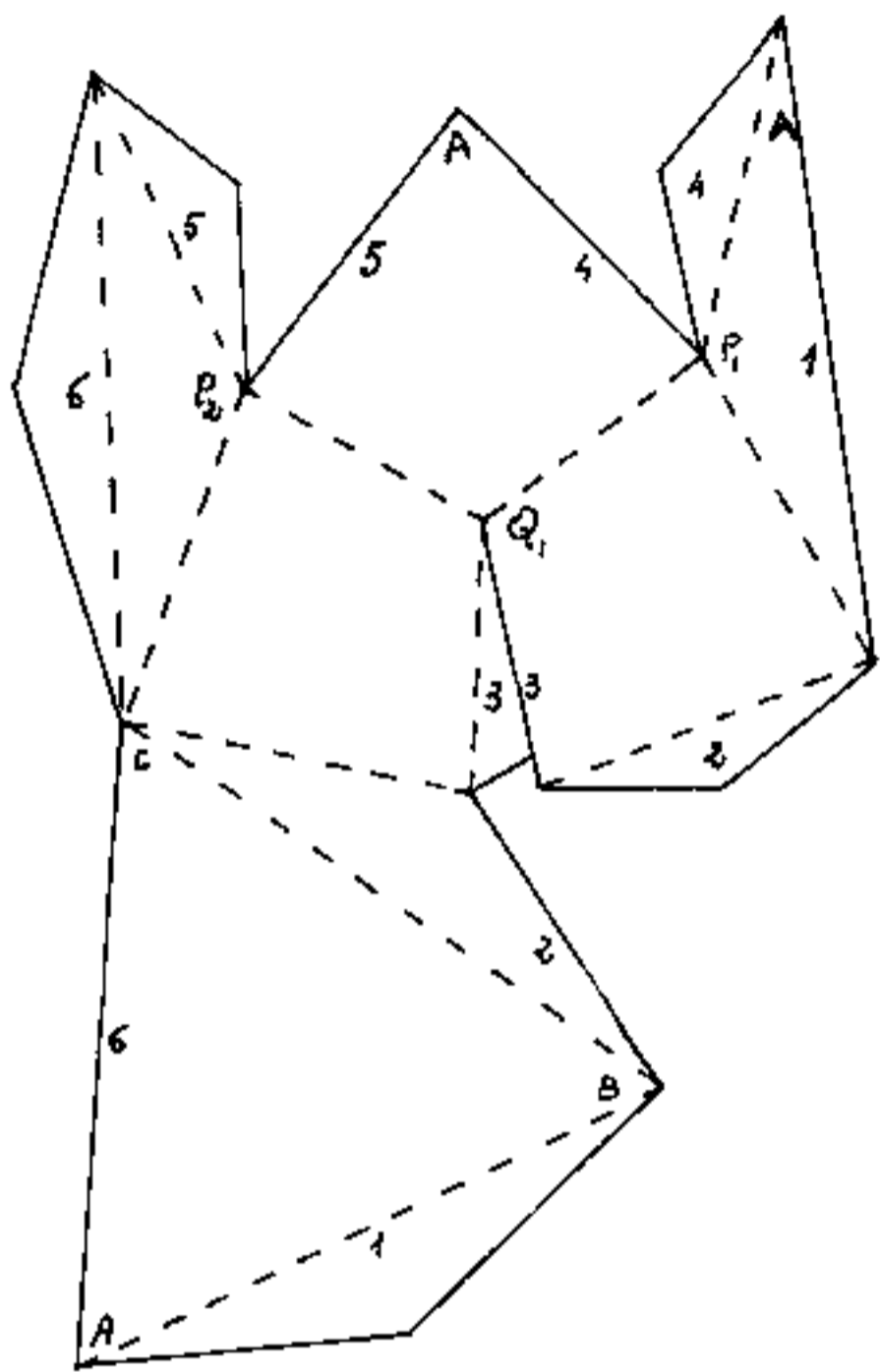
$$\boxed{\hat{D}_{l_2} = 138^\circ 07' 04'', 6526} \quad (\text{diedro su } l_2)$$

Il trapezoedro ha angoli diedri uguali, non è inscrittibile in una sfera avendo facce piane non inscrittibili in circonferenze.

sviluppo del trapezoedro a diedri uguali



Disegniamo anche lo schema delle parti di trapezoedro da sovrapporre alle facce dell'ottaedro per ottenere il trapezoedro stesso. (Occorrono otto di queste parti per ottenere il solido completo.)



Si noti che il trapezoedro è il solido di passaggio fra esacisottaedri convessi ed esacisottaedri concavi.

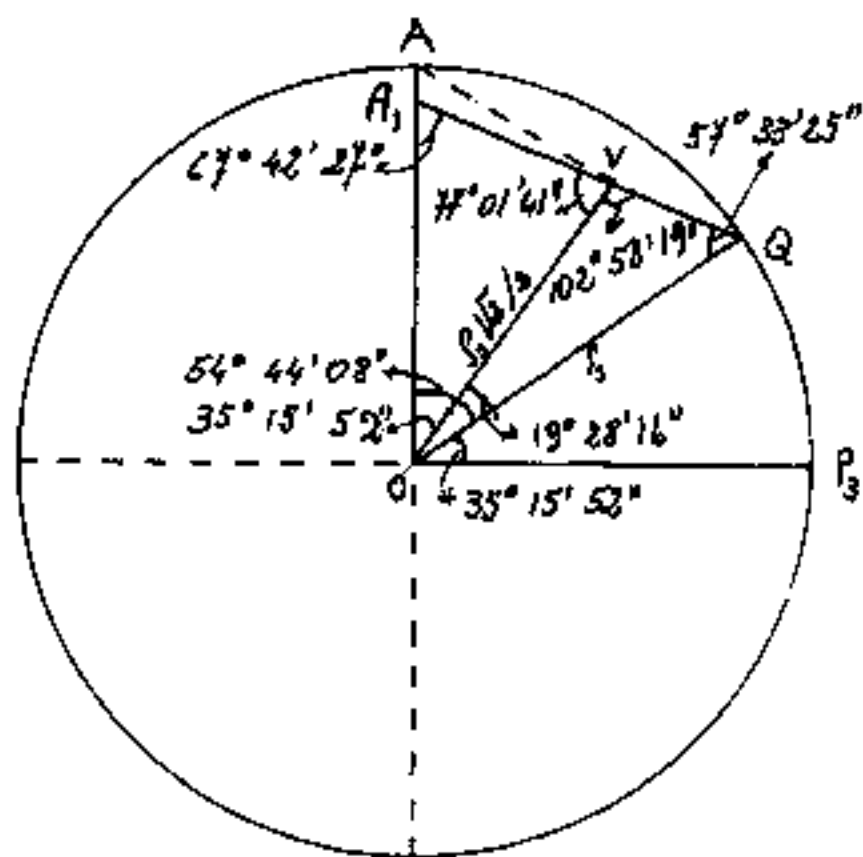
Si noti che è ancora il problema del quadrilatero:  $AP_2QP_1$  da rendere piano.

Nel caso che abbiamo trattato (trapezoedro a diedri uguali) abbiamo accorciato il raggio  $\overline{OQ}$  della sfera in  $\overline{OQ_1}$ , fino a rendere piano il quadrilatero  $AP_2QP_1$  in  $AP_2Q_1P_1$ ; però il solido non è più inscrittibile in una sfera.

Ma il quadrilatero simmetrico  $AP_2QP_1$  con due lati  $l_2$  adiacenti e due lati  $l_3$  adiacenti, fermo restando il triangolo  $P_2QP_1$ , poteva esser reso piano abbassando il vertice A ottenendo il trapezoedro 2° però si è modificato l'ottaedro. Oppure possiamo alzare la corda  $\overline{P_1P_2}$  fuori della sfera ed otterremo il trapezoedro 3°.

# Trapezoido 2°

Ripetiamo la sezione secondo il piano del cerchio massimo contenente i punti  $A, Q, P_3, F$ .



Analogamente a quanto si è fatto quando abbiamo abbassato  $Q$  in  $Q_1$ , spostiamo  $A$  in  $A_1$  sul raggio  $\overline{OA}$ .  
Sappiamo che: (vedi esadrisottaedro):

$$\overline{QV} = l_0 \sqrt{\frac{21 - 8\sqrt{6}}{34}} = f_4 \sqrt{\frac{21 - 8\sqrt{6}}{12}}$$

$$\overline{QV} = 0,342062623 \cdot f_3$$

$$\boxed{\text{sen}(\widehat{OQV})} = \text{sen}(\widehat{VOQ}) \frac{f_3 \sqrt{3}/2}{\overline{QV}} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21 - 8\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{21 - 8\sqrt{6}}}$$

$$\boxed{\text{cos}(\widehat{OQV})} = \left( \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{21 - 8\sqrt{6}}} \right) ; \quad \boxed{\text{tg}(\widehat{OQV})} = \frac{1}{2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$\boxed{(\widehat{OQV})} = 57^\circ 33' 24'', 91424$$

$$\boxed{\text{sen}(\widehat{OVQ})} = \text{sen}(\widehat{VOQ}) \frac{f_3}{\overline{VQ}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21 - 8\sqrt{6}}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{\sqrt{63 - 24\sqrt{6}}} = \text{sen}(\widehat{OVA_1})$$

$$\boxed{\text{cos} \widehat{OVA_1}} = \frac{\sqrt{59 - 24\sqrt{6}}}{\sqrt{63 - 24\sqrt{6}}} = \frac{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{63 - 24\sqrt{6}}} ; \quad \boxed{\text{tg}(\widehat{OVA_1})} = \frac{2}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}$$

$$\boxed{(\widehat{OVA_1})} = 77^\circ 01' 41'', 30852$$

$$\boxed{(\widehat{OVQ})} = 102^\circ 58' 18'', 69140$$

$$\boxed{\widehat{OA_1V}} = \text{arcsen} \left( \frac{(\sqrt{8} - \sqrt{3})}{\sqrt{21 - 8\sqrt{6}}} \right) = \boxed{67^\circ 42' 26'', 88854}$$

$$\boxed{\text{sen}(\widehat{AOQ})} = \frac{\sqrt{3}}{3} ; \quad \boxed{\text{cos}(\widehat{AOQ})} = \frac{\sqrt{2}}{3} ; \quad \boxed{\text{tang}(\widehat{AOQ})} = \sqrt{2} ; \quad \boxed{\widehat{AOQ}} = 54^\circ 44' 08'', 19714$$

$$\overline{A_1Q} = \int_3 \frac{\sin \hat{A_1OQ}}{\sin \hat{OA_1Q}} = \int_3 \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{\sqrt{39-4\sqrt{6}}}{5} \right) = \int_3 \frac{1}{15} \sqrt{6(39-4\sqrt{6})}$$

$$\overline{A_1Q} = 0,882451752 \int_3$$

$$\overline{A_1V} = \int_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin(\hat{A_1OV})}{\sin(\hat{QA_1Q})} = \left( \int_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{\sqrt{39-4\sqrt{6}}}{5} \right) = \int_3 \frac{1}{10} \sqrt{39-4\sqrt{6}}$$

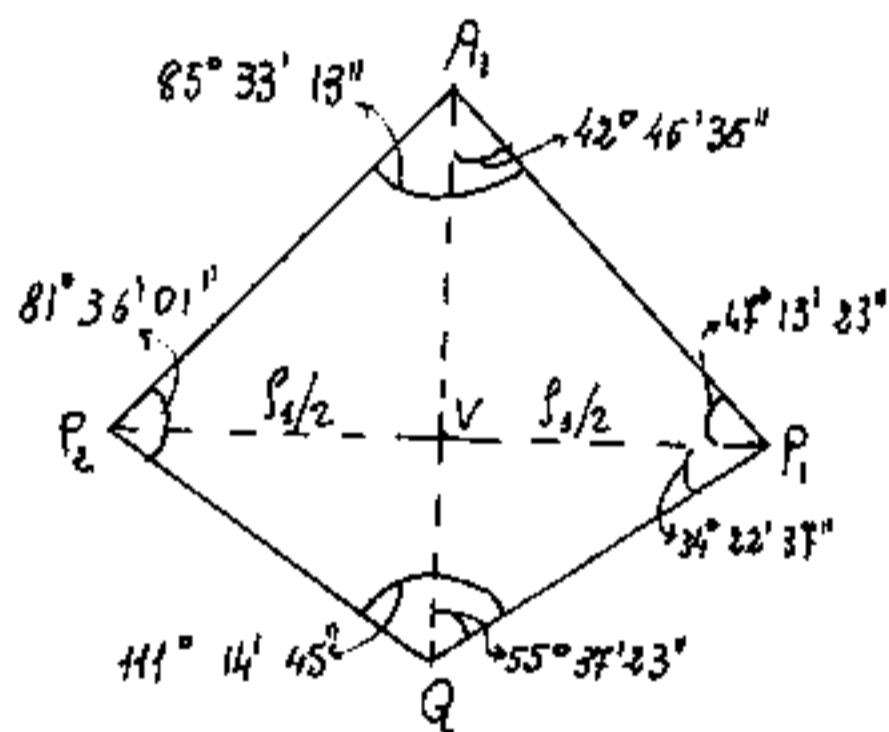
$$\overline{A_1V} = 0,540389129 \int_3$$

$$\overline{A_1O} = \int_3 \frac{\sin(\hat{A_1QO})}{\sin(\hat{QA_1Q})} = \int_3 \left( \frac{1}{\sqrt{21-8\sqrt{6}}} \right) \left( \frac{\sqrt{21-8\sqrt{6}}}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} \right) = \int_3 \frac{1}{5} (2\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$\overline{A_1O} = \frac{\int_3}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} = \overline{A_1O} = 0,912095586 \int_3$$

Sapendo che  $P_1P_2 = \int_3$  (reale esacisottaedro), sulla base degli elementi calcolati possiamo disegnare la faccia

del trapeoedro e calcolare i lati e gli angoli.



$$\overline{A_1P_1} = \overline{A_1P_2} = \sqrt{\overline{A_1V}^2 + \left(\frac{\int_3}{2}\right)^2} =$$

$$\overline{A_1P_1} = \int_3 \sqrt{\frac{39-4\sqrt{6}}{100} + \frac{25}{100}} = \frac{\int_3}{5} \sqrt{16-\sqrt{6}}$$

$$\overline{A_1P_1} = 0,736220355 \int_3$$

$$\overline{QP_2} = \overline{QP_1} = \sqrt{\overline{QV}^2 + \left(\frac{\int_3}{2}\right)^2} = \int_3 \sqrt{\frac{21-8\sqrt{6}}{12} + \frac{3}{12}} = \int_3 \sqrt{\frac{24-8\sqrt{6}}{12}} = \int_3 \sqrt{\frac{6-2\sqrt{6}}{3}}$$

$$\overline{QP_1} = \overline{QP_2} = 0,605810893 \int_3$$

$$\hat{VA_1P_1} = \arctg\left(\frac{\overline{VP_1}}{\overline{A_1V}}\right) = \arctg\left(\frac{\int_3/2}{\frac{\int_3}{10} \sqrt{39-4\sqrt{6}}}\right) = \arctg\left(\frac{5}{\sqrt{39-4\sqrt{6}}}\right)$$

$$\hat{VA_1P_1} = 42^\circ 46' 36'',57682$$

$$\hat{P}_2 \hat{A}_1 \hat{P}_1 = 85^\circ 33' 13'' 15365$$

$$\hat{V} \hat{P}_1 \hat{A}_1 = 47^\circ 13' 23'' 42318$$

$$\hat{V} \hat{P}_1 \hat{Q} = \hat{V} \hat{P}_2 \hat{Q} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\overline{QV}}{\overline{VP}_1} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{P_2 \sqrt{(61-8\sqrt{6})/12}}{P_2/2} \right) = \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{21-8\sqrt{6}}{3}} \right)$$

$$\hat{V} \hat{P}_1 \hat{Q} = 34^\circ 22' 37'' 25923$$

$$\hat{V} \hat{Q} \hat{P}_1 = 55^\circ 37' 22'' 74077$$

$$\hat{P}_2 \hat{Q} \hat{P}_1 = 111^\circ 14' 45'' 48154$$

### Calcolo degli angoli diedri

$$\text{Diedro sullo spigolo } \overline{QP} = \hat{D}_{QP} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{P_1 P_2}{2h_1} \right) =$$

$$\hat{D}_{QP} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{P_1 P_2}{2} \cdot \frac{(\overline{PQ})}{(\overline{VP}_1)(\overline{VQ})} \right) = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{P_2/2}{P_2/2} \sqrt{\frac{6-2\sqrt{6}}{21-8\sqrt{6}}} \right)$$

$$\hat{D}_{QP} = 2 \operatorname{arctg} (\sqrt{2 + \sqrt{3}}) = 2 (62^\circ 18' 58'' 884433)$$

$$\hat{D}_{QP} = 124^\circ 37' 57'' 768866$$

$$\text{Diedro sullo spigolo } \overline{AP} = \hat{D}_{AP} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{PQ}{2h_2} \right)$$

$$\hat{D}_{AP} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \sqrt{\frac{16-\sqrt{6}}{39-4\sqrt{6}}} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \right) = 2 \operatorname{arcsen} \left( \sqrt{2} \sqrt{\frac{16-\sqrt{6}}{39-4\sqrt{6}}} \right) =$$

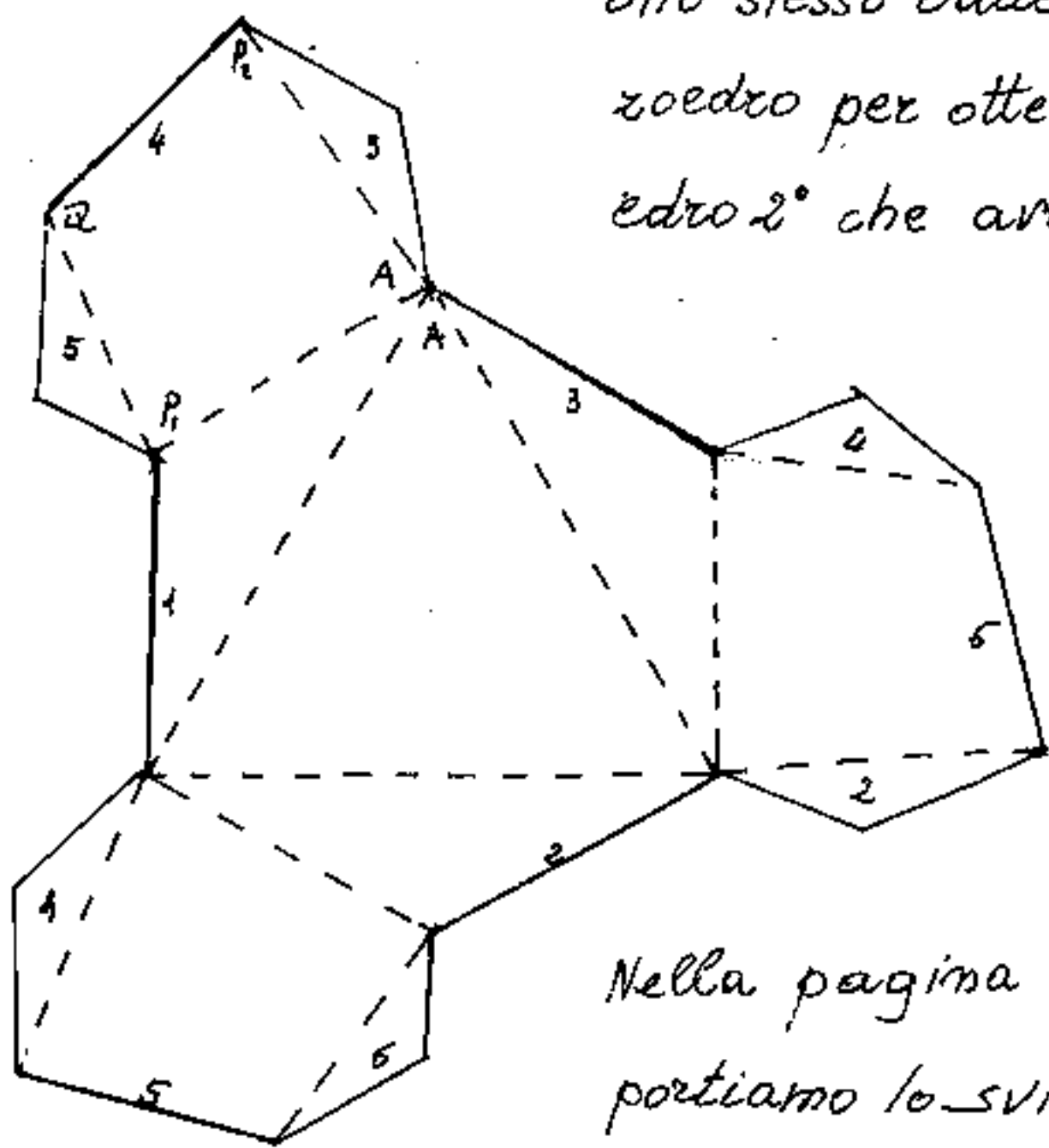
$$\hat{D}_{AP} = 2 \operatorname{arctg} (\sqrt{8 + 2\sqrt{6}})$$

$$\hat{D}_{AP} = 148^\circ 52' 55'' 110093$$

Come si vede, per questo trapezoedro  $\mathcal{Z}^0$  non vale la costanza degli angoli diedri. Sono necessari sulla superficie sferica i punti P e Q,

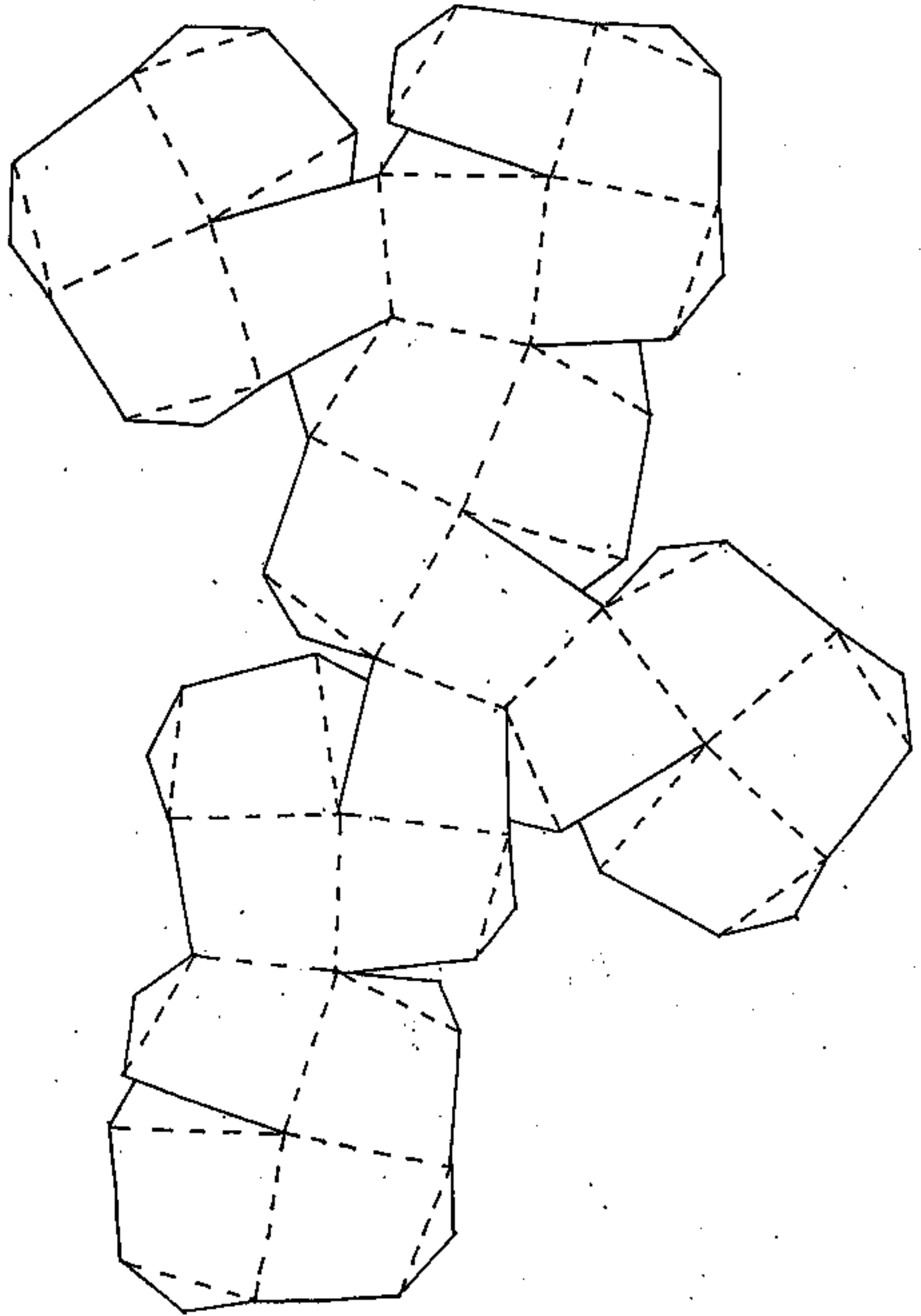
mentre i vertici dell'ottaedro si sono avvicinati al centro sfera:  $\overline{AO} = \rho_3$  è divenuto  $\overline{A_1O} = \rho_3 (2\sqrt{2} + \sqrt{3})/5 =$   
 $\overline{A_1O} = 0,912095585 \rho_3$ ;  $l_0 = \rho_3 \sqrt{2}$ , anche  $l_0 =$  spigolo del-  
 l'ottaedro è diminuito:  $l_0 = \overline{A_1O} \sqrt{2} = l_0 (0,912095585)$ ;  
 cioè se manteniamo costante  $\rho_3$ , se invece volessimo  
 mantenere costante  $l_0$  avremmo che la superficie  
 sferica per P e Q aumenterebbe:  $\rho_{3,1} = \left( \frac{\rho_3}{0,912095585} \right)$ .  
 $\rho_{3,1} = \rho_3 (\sqrt{8} - \sqrt{3}) = (1,096376317) \rho_3$ .

Riportiamo lo sviluppo della parte da aggiungere  
 allo stesso ottaedro del trape-  
 zoedro per ottenere il trapezo-  
 edro 2° che avrà un  $\rho_{3,1} > \rho_3$ .



Nella pagina seguente ri-  
 portiamo lo sviluppo del-  
 l'intero trapezoedro 2° avente lo stesso  $\rho_3$ ,  
 cioè la stessa sfera, ma un ottaedro minore,  
 del primo trapezoedro.

Sviluppo del  
TRAPEZOEDRO 2°

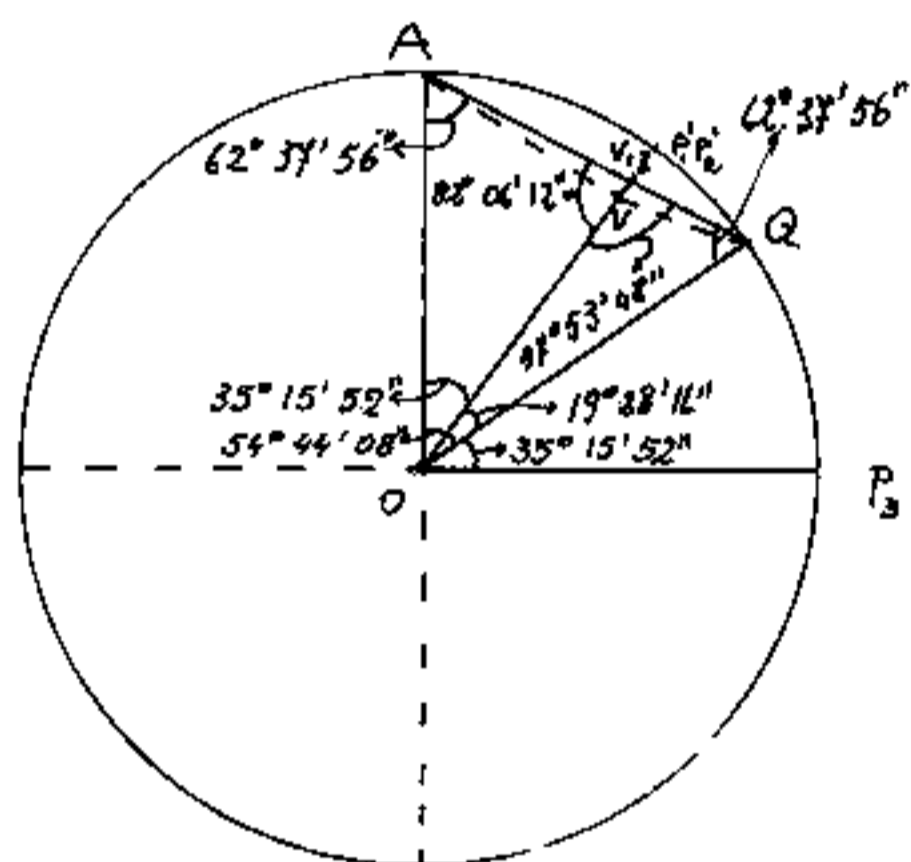




# Trapezoiide 3'

Il quadrilatero  $AP_2QP_1$  può essere reso piano anche sollevando la corda  $\overline{P_2P_1}$  fino a far coincidere  $V_1$  sulla corda  $\overline{AQ}$ . Se manteniamo  $A$  e  $Q$  sulla sfera  $\overline{P_1P_2}$  usciranno dalla sfera e  $\overline{P_1P_2} > \rho_3$ , in questo caso l'ottaedro base inscritto nella sfera non cambia. Se invece manteniamo  $\overline{P_1P_2} = \rho_3$ , l'ottaedro base sarà più piccolo e  $Q$  sarà interno alla sfera.

Facciamo di solito una sezione secondo il cerchio



massimo passante per  $AVQ_3F$ , spostiamo  $V$  in  $V_1$  prolungando il raggio  $\overline{OV}$  in  $\overline{OV_1}$  con  $V_1$  sulla corda  $\overline{AQ}$ ; poiché  $\triangle AOQ$  è isoscele;  $\hat{OAQ} = \hat{AQO} =$

$$= (180^\circ - 54^\circ 44' 08'') \frac{1}{2} = 62^\circ 37' 55'' 90143$$

$$\hat{OAQ} = \arcsen\left(\sqrt{\frac{1 + 1/\sqrt{3}}{2}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 - 1/\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$\overline{OA} = \overline{OQ} = \rho_1 ; \overline{AQ} = 2\rho_1 \cos \hat{OAQ} = \rho_1 \cdot 2 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}} = \rho_1 (0,919401686)$$

$$\overline{AV_1} = \rho_1 \frac{\text{sen}(\hat{AOV_1})}{\text{sen}(\hat{AV_1O})} = \rho_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{(9 + 5\sqrt{3})/18}}\right) = \rho_1 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}} = \rho_1 \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$$

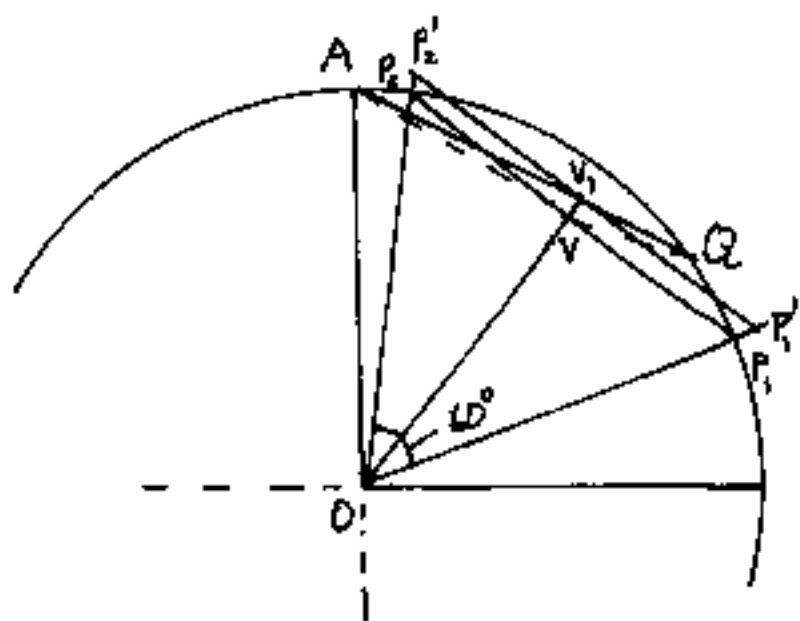
$$\overline{AV_1} = \rho_1 \sqrt{9 - 5\sqrt{3}} = \rho_1 (0,582877313)$$

$$\overline{V_1Q} = \rho_1 \frac{\text{sen}(\hat{V_1OQ})}{\text{sen}(\hat{OV_1Q})} = \rho_1 \left(\frac{1/3}{\sqrt{(9 + 5\sqrt{3})/18}}\right) = \rho_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}}\right) = \rho_1 \sqrt{\frac{9 - 5\sqrt{3}}{3}}$$

$$\overline{V_1Q} = \rho_1 \sqrt{\frac{9 - 5\sqrt{3}}{3}} = \rho_1 (0,336524373)$$

$$\overline{OV_1} = \rho_1 \frac{\text{sen}(\hat{OAV_1})}{\text{sen}(\hat{AV_1O})} = \rho_1 \left(\frac{\sqrt{(3 + \sqrt{3})/6}}{\sqrt{(9 + 5\sqrt{3})/18}}\right) = \overline{OV_1} = \rho_1 \sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = \rho_1 (0,891575472)$$

Non possiamo variare la direzione dei raggi  $\overline{OP}$  che dal centro  $O$  bisecano gli spigoli dell'ottaedro inscritto e proseguono fino alla superficie sferica formando la corda  $\overline{P_1P_2}$  (vedi esacisottaedro) con  $V$  punto medio di  $\overline{P_1P_2}$ . essendo l'angolo  $\widehat{P_1OP_2} = 60^\circ$  da cui  $\overline{P_1P_2} = \rho_3$ . Ora spostando la corda  $\overline{P_1P_2}$  fino a far coincidere  $V$  su  $\overline{AQ}$ ,  $P_1$  e  $P_2$  sono usciti dalla sfera, ma anche la dimensione è variata  $\overline{P_1P_2} > \rho_3$ . D'altra parte ciascun raggio  $\overline{OP}$  è comune a quattro facce ciascuna delle quali può essere determinata da un vertice:  $A, B, C, \dots$  e da un  $Q, Q_2, \dots$ . Se variassimo la direzione dei raggi  $\overline{OP}$  senza variare le direzioni  $\overline{OQ}$  ed  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \dots$  il solido presenterebbe vuoti o sovrapposizioni. Facciamo una sezione con un piano passante per  $P_1, OP_2$  e ribaltiamolo intorno ad  $OV$  avremo:



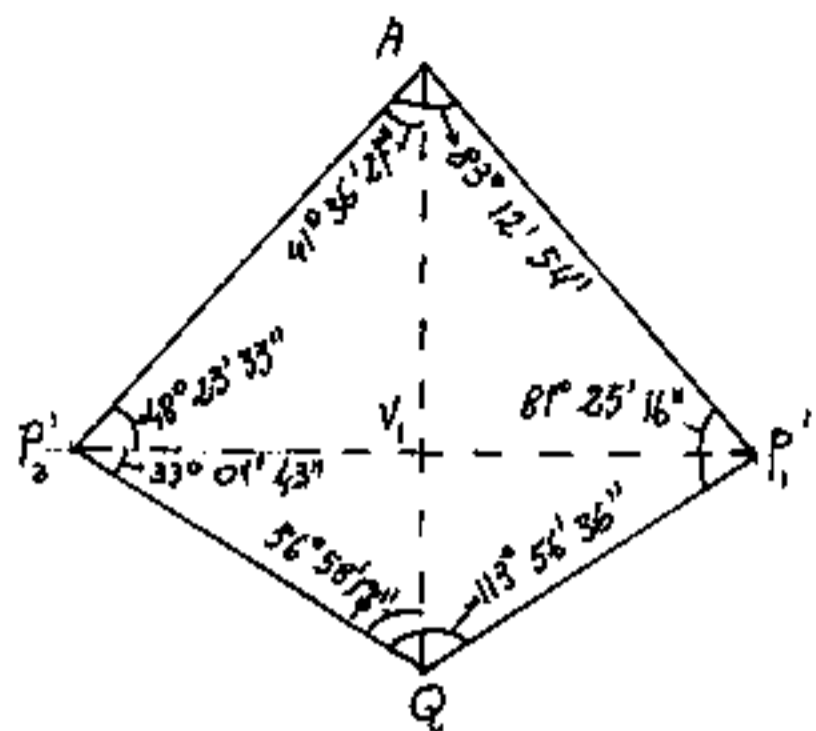
$$\overline{P_1P_2} : \overline{OV} = \overline{P'_1P'_2} : \overline{OV_1}$$

$$\rho_3 : \rho_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{P'_1P'_2} : \rho_3 \sqrt{6-3\sqrt{3}}$$

$$\overline{P'_1P'_2} = \rho_3 \frac{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \overline{P_1P_2} = 2\rho_3 \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\overline{P'_1P'_2} = \rho_3 (\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \rho_3 (1,03527618)$$

Essendo  $\overline{AQ}$  e  $\overline{P'_1P'_2}$  perpendicolari ed essendo noti:  $\overline{AQ}, \overline{AV_1}, \overline{V_1Q}, \overline{P'_2V_1} = \overline{V_1P'_1} = \overline{P'_1P'_2}/2$  è possibile calcolare e disegnare la faccia.



Nella figura abbiamo riportato gli angoli che qualificano la diversità delle facce dei trapezoidi per esempio:

$$\text{Trapezoido } 1^{\circ}: \widehat{P_2 A P_1} = 81^{\circ} 34' 44''$$

$$\text{Trapezoido } 2^{\circ}: \widehat{P_2 A P_1} = 85^{\circ} 33' 13''$$

$$\text{Trapezoido } 3^{\circ}: \widehat{P_2 A P_1} = 83^{\circ} 12' 54''$$

$$\overline{AP_1} = \overline{AP_2} = \sqrt{\left(\frac{P_1P_2}{2}\right)^2 + \overline{AV_1}^2} = \rho_1 \sqrt{(2-\sqrt{3}) + (9-5\sqrt{3})} =$$

$$\boxed{\overline{AP_1} = \rho_1 \sqrt{11 - 6\sqrt{3}}} = (0,779548042) \rho_1$$

$$\overline{QP_1} = \overline{QP_2} = \sqrt{\left(\frac{P_1P_2}{2}\right)^2 + \overline{V_1Q}^2} = \rho_1 \sqrt{(2-\sqrt{3}) + \frac{9-5\sqrt{3}}{3}} = \rho_1 \sqrt{\frac{6-3\sqrt{3} + 9-5\sqrt{3}}{3}}$$

$$\boxed{\overline{QP_1} = \rho_1 \sqrt{(15-8\sqrt{3})/3}} = (0,617412217) \rho_1$$

$$\widehat{P_2 A V_1} = \widehat{V_1 A P_2} = \arctg\left(\frac{\overline{P_2 V_1}}{\overline{AV_1}}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{9-5\sqrt{3}}}\right) = \arctg\left(\sqrt{\frac{18-9\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 15}{6}}\right)$$

$$\boxed{\widehat{P_2 A V_1} = \arctg\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\right)} = \boxed{41^{\circ} 36' 26'', 78988}$$

$$\widehat{Q P_2 V_1} = \widehat{Q P_1 V_1} = \arctg\left(\frac{\overline{Q V_1}}{\overline{P_2 V_1}}\right) = \arctg\left(\sqrt{\frac{9-5\sqrt{3}}{3(2-\sqrt{3})}}\right) = \arctg\left(\sqrt{\frac{18-10\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 15}{3}}\right)$$

$$\boxed{\widehat{Q P_2 V_1} = \arctg\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}\right)} = \boxed{33^{\circ} 01' 42'', 621774}$$

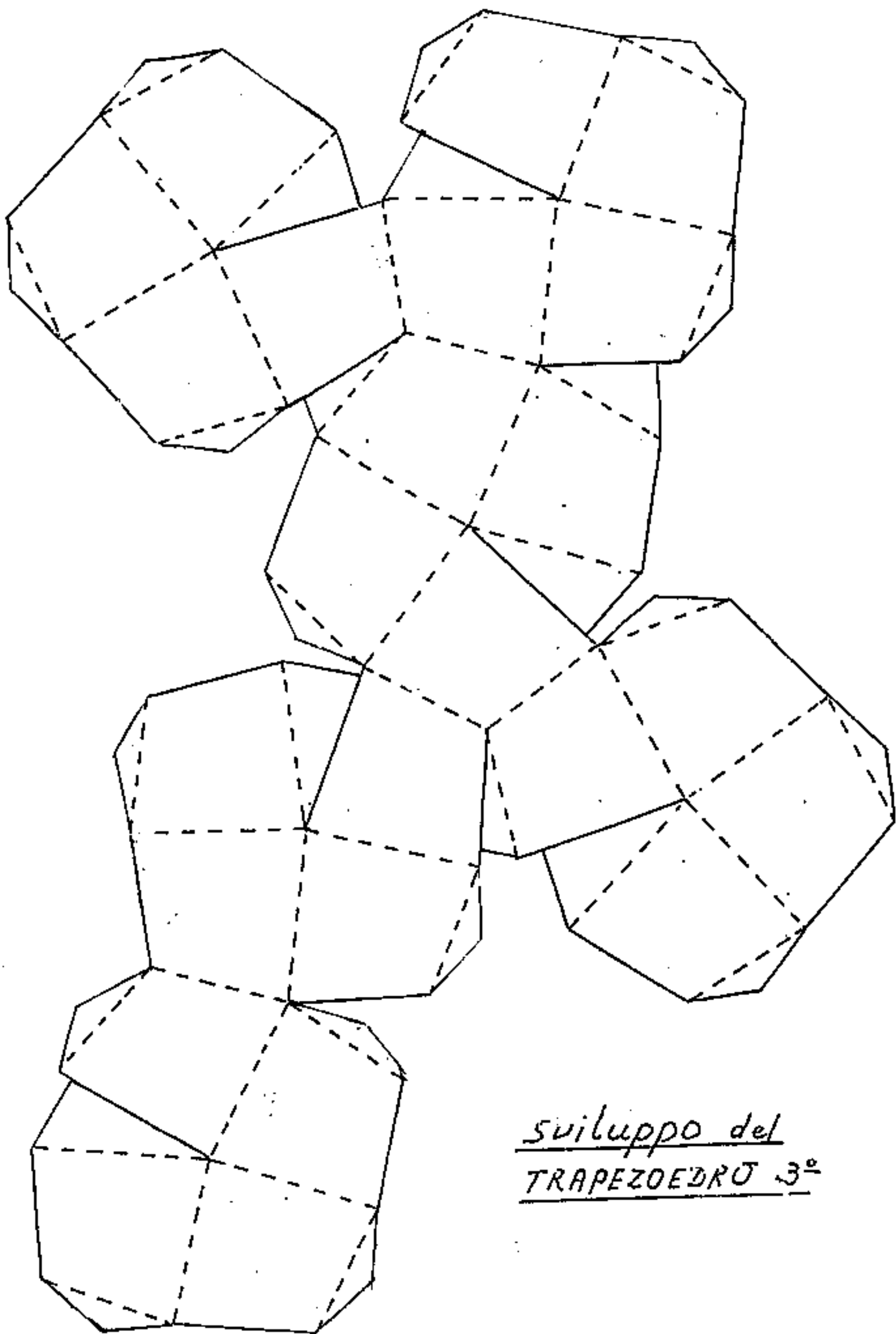
$$\boxed{\widehat{AP_2 V_1} = 48^{\circ} 23' 33'', 21012}$$

$$\boxed{\widehat{AP_1 Q} = 81^{\circ} 25' 15'', 83189}$$

$$\boxed{\widehat{P_2 Q V_1} = 56^{\circ} 58' 17'', 378226}$$

$$\boxed{\widehat{P_2 Q P_1} = 113^{\circ} 56' 34'', 756452}$$

Per questo solido vale:  $\overline{OA} = \rho_1 = \rho_0/\sqrt{2}$ , però non vale  $\overline{P_1 P_2} = \rho_1$ ,  
ma:  $\overline{P_2 P_1} = \rho_1 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ .



## Calcolo degli angoli diedri del trapezoedro 3°

$$\begin{aligned} \text{Diedro sullo spigolo } \overline{QP_1} &= \hat{D}_{QP_1} = 2 \arcsen \left( \frac{\overline{P_1 P_2}}{2h_1} \right) = 2 \arcsen \left( \frac{\overline{P_1 P_2}}{2} \cdot \frac{\overline{P_1 Q}}{\overline{P_1 P_2} \sqrt{Q}} \right) \\ &= 2 \arcsen \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 - 8\sqrt{3}}{9 - 5\sqrt{3}}} \right) = 2 \arcsen \left( \sqrt{\frac{5 + \sqrt{3}}{8}} \right) = \end{aligned}$$

$$\hat{D}_{QP_1} = 2 \arccos \left( \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{8}} \right) = 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{5 + \sqrt{3}}{5 - \sqrt{3}}} \right) = 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{3}}{3}} \right) =$$

$$2(66^\circ 32' 23", 13085) \quad \boxed{\hat{D}_{QP_1} = 133^\circ 04' 46", 26171}$$

$$\text{Diedro sullo spigolo } \overline{AP_1} = \hat{D}_{AP_1} = 2 \arcsen \left( \frac{\overline{P_1 P_2}}{2h_2} \right) =$$

$$\hat{D}_{AP_1} = 2 \arcsen \left( \frac{\overline{P_1 P_2} \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1 P_2} \sqrt{AV_1}} \right) = 2 \arcsen \left( \frac{\sqrt{11 - 6\sqrt{3}}}{\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$\hat{D}_{AP_1} = 2 \arcsen \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{99 - 54\sqrt{3} + 55\sqrt{3} - 90}{3}} \right) = 2 \arcsen \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9 + \sqrt{3}}{3}} \right) =$$

$$\hat{D}_{AP_1} = 2 \arccos \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} \right) = 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{9 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}} \right) = 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} \right)$$

$$\boxed{\hat{D}_{AP_1} = 142^\circ 03' 42", 741252}$$

## Generalizzazione dei trapezoedri

Consideriamo l'angoloide tetraedro di vertice  $O$ , delimitato dai raggi:  $\overline{OP_2}$ ,  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OP_1}$ ,  $\overline{OQ}$ , ove  $P_2, A, P_1, Q$  sono i vertici del quadrilatero piano, faccia generica del trapezoedro.

Gli angoli fra tali raggi sono:

$$\hat{AOP_1} = \hat{AOP_2} = 45^\circ \quad \left( \text{lati del quadrilatero sferico} \right)$$

$$\hat{AOQ} = 54^\circ 44' 08'' \quad \left( \text{diagonale " " " } \right)$$

$$\hat{QOP_1} = \hat{QOP_2} = 35^\circ 15' 52'' \quad \left( \text{lati " " " } \right) = (\hat{NOT})$$

$$\hat{P_1OP_2} = 60^\circ \quad \left( \text{diagonale " " " } \right)$$

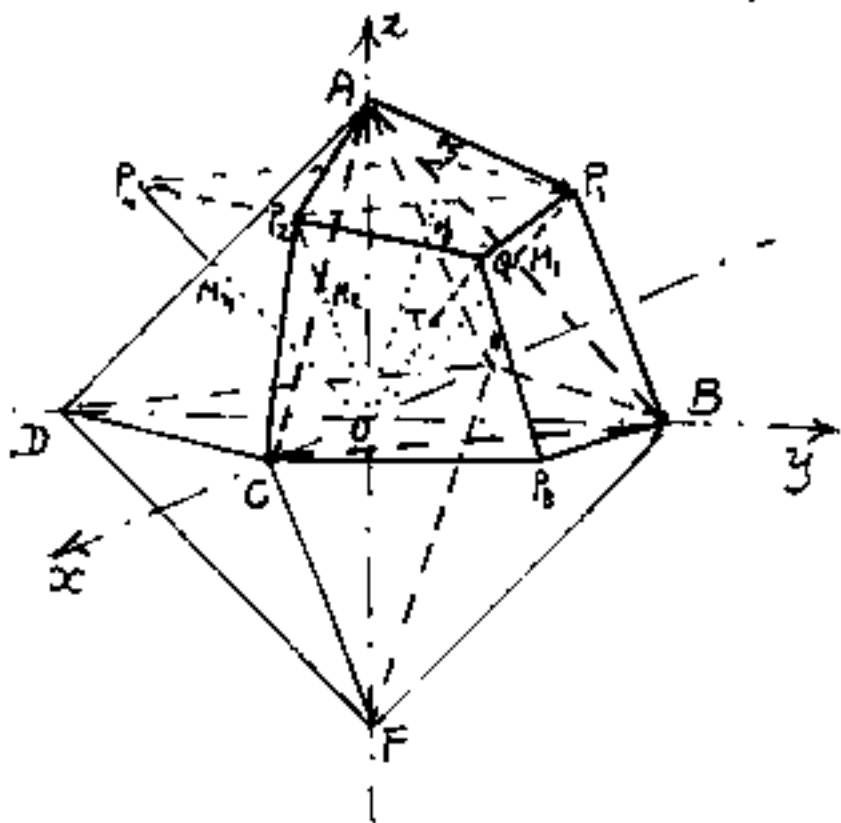
Bastano cinque elementi per determinare un quadrilatero sferico (oltre il raggio  $\rho$ ), il sesto è di controllo.

Questo angoloide è ottenuto dividendo in tre parti uguali l'angoloide costituente le facce dell'ottaedro, perciò, ( $3 \cdot 8 = 24$ ), il suo valore in stereoradianti sarà:  $\frac{1}{24} 4\pi = \frac{\pi}{6}$  stereoradianti. Esso può essere la base di un insieme di solidi aventi 24 facce quadrilatera simmetriche rispetto ad una diagonale. Chiameremo questo insieme, "insieme dei trapezoidi"

Poniamo:  $\overline{OA} = \rho = \frac{l_0}{\sqrt{2}}$ ;  $\overline{MP} = \lambda l_0$ ; (ove  $M$  è il punto medio degli spigoli  $l_0$  dell'ottaedro.)

$\overline{TQ} = K l_0$  (ove  $T$  = punto medio delle facce dell'ottaedro,

$A$  = vertice dell'ottaedro,  $O$  = centro sfera = centro ottaedro)



$$\overline{AP_1} = \overline{AP_2} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2} = \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + (\lambda l_0)^2}$$

$$\boxed{\overline{AP} = \frac{l_0}{2} \sqrt{1 + 4\lambda^2}}$$

$$\overline{P_1 P_2} = \overline{OP} = \overline{OM} + \lambda l_0 = \frac{l_0}{2} + l_0 \lambda =$$

$$\boxed{\overline{P_1 P_2} = \frac{l_0}{2} (1 + 2\lambda)}$$

$$\overline{OQ} = \overline{OT} + \overline{TQ} = \left(\frac{l_0}{\sqrt{6}} + K l_0\right) =$$

$$\boxed{\overline{OQ} = \frac{l_0}{\sqrt{6}} (1 + \sqrt{6} K)}$$

$$\cos(\widehat{QOP}) = \cos(\widehat{TOM}) = \left(\frac{\overline{OT}}{\overline{OA}}\right) = \left(\frac{l_0/\sqrt{6}}{l_0/2}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \quad \boxed{\widehat{QOP} = 35^\circ 15' 52''}$$

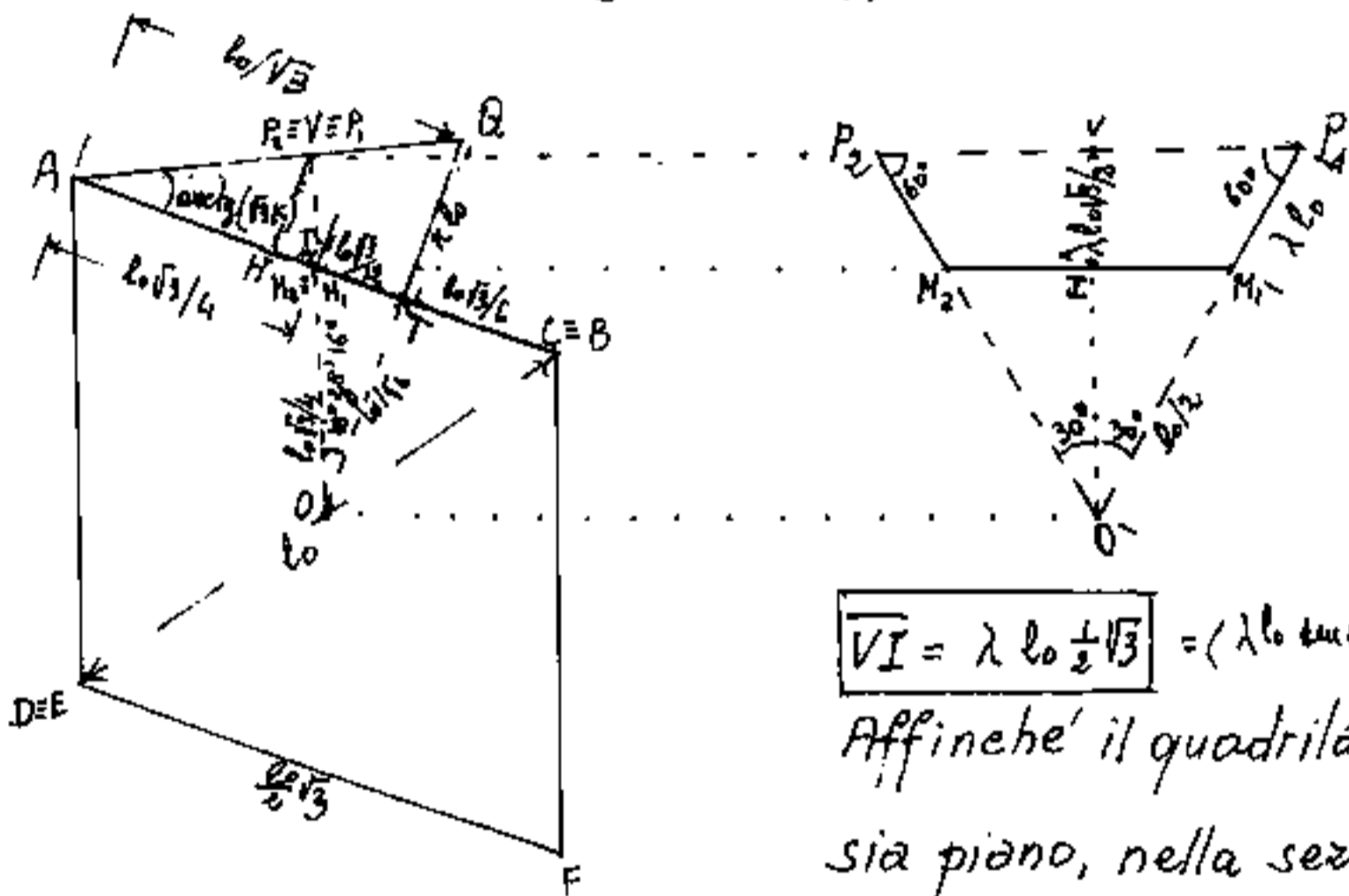
$$\overline{QP} = \sqrt{\overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 - 2(\overline{OP})(\overline{OQ})\cos(\widehat{QOP})} = l_0 \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}} + K\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}} + K\right)\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$\overline{QP} = l_0 \sqrt{K^2 + \frac{1}{6} + 2K/\sqrt{6} + \frac{1}{4} + \lambda^2 + \lambda - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{K}{2} + \frac{\lambda}{\sqrt{6}} + K\lambda\right)} = \boxed{\overline{QP} = l_0 \sqrt{K^2 + \lambda^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} K\lambda + \frac{\lambda}{3} + \frac{1}{12}}}$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{AT}^2 + \overline{TQ}^2} = \sqrt{\frac{l_0^2}{3} + K^2 l_0^2} = \boxed{\overline{AQ} = l_0 \sqrt{\frac{1}{3} + K^2}}$$

Possiamo imporre la condizione che il quadrilatero  $PAQ$  sia piano, in questo caso possiamo porre  $K = f(\lambda)$  e viceversa e ridurre ad un solo parametro il variare dei trapezoidi.

Sezioniamo l'ottaedro con un piano passante per  $ATQ$ . tale piano sarà perpendicolare alla faccia  $ABC$  dell'ottaedro, che, nel disegno, è rappresentata come traccia  $\overline{A-(B=C)}$ .



$$\boxed{\overline{VI} = \lambda l_0 \frac{1}{2} \sqrt{3}} = (\lambda l_0 \tan 60^\circ)$$

Affinché il quadrilatero  $APQP_2$  sia piano, nella sezione il

punto  $V$ , medio fra  $P_1$  e  $P_2$ , deve giacere sul segmento  $\overline{AQ}$ . Proiettiamo ora il piano  $P_1OP_2$  in modo da apprezzare le vere grandezze. Sia  $I$  il punto medio fra  $M_1$  ed  $M_2$ , si ha:

$$\boxed{\overline{IT}} = l_0 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \boxed{l_0 \frac{\sqrt{3}}{12}}; \quad \boxed{\overline{OI}} = \left( \frac{l_0}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \boxed{l_0 \frac{\sqrt{3}}{4}};$$

$$\boxed{\text{sen}(\widehat{IOT})} = \left( \overline{IT} / \overline{IO} \right) = \frac{\sqrt{3}/12 \cdot 4/\sqrt{3}}{1/3} = \boxed{\frac{1}{3}}; \quad \boxed{\cos(\widehat{IOT})} = \frac{2}{3}\sqrt{2}; \quad \boxed{\text{tg}(\widehat{IOT})} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tang}(\widehat{IOT}) = \left( \frac{1}{\sqrt{8}} \right); \quad \boxed{\widehat{IOT} = 19^\circ 28' 16'', 394284}$$

La distanza di  $V$  dalla faccia  $ABC$  dell'ottaedro  
 sia  $\overline{VH} = \overline{VI} \cos(\widehat{IOT}) = (\lambda l_0 \frac{\sqrt{3}}{2}) (\frac{2}{3} \sqrt{2}) = \overline{VH} = \lambda l_0 \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\overline{HI} = \overline{VI} \sin(\widehat{IOT}) = (\frac{l_0 \lambda \sqrt{3}}{2}) (\frac{1}{3}) = \overline{HI} = \frac{l_0 \lambda}{2\sqrt{3}} ; \overline{AI} = \frac{l_0 \sqrt{3}}{4} ; \overline{AH} = \overline{AI} - \overline{HI}$$

$$\overline{AH} = l_0 (\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\lambda \sqrt{3}}{6}) = \overline{AH} = \frac{l_0 \sqrt{3}}{12} (3 - 2\lambda)$$

possiamo ora scrivere la proporzione:  $\overline{QT} : \overline{AT} = \overline{VH} : \overline{AH}$

$$K l_0 : \frac{l_0}{\sqrt{3}} = l_0 \lambda \frac{\sqrt{2}}{3} : l_0 \frac{\sqrt{3}}{12} (3 - 2\lambda) \quad \text{da cui: } K = \frac{\sqrt{2}}{3} \lambda \frac{12}{\sqrt{3}(3-2\lambda)}$$

$$K = \frac{4\lambda}{(3-2\lambda)} \frac{\sqrt{2}}{3} ;$$

$$K = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{4}{(\frac{3}{\lambda} - 2)}$$

$$\lambda = \frac{(3\sqrt{3} K)}{(4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} K)}$$

per  $K=0$ ;  $\lambda=0$  si ha l'ottaedro a facce rigate.

$\lambda = \frac{3}{(\frac{4}{K} \sqrt{\frac{2}{3}} + 2)}$ ; Abbiamo così risolto la condizione  
 che il quadrilatero  $AP_1QP_1$  sia piano.

Possiamo ora esprimere in funzione di  $\lambda$  od in  
 in funzione di  $K$  gli elementi del trapezoedro  
 che dimensionalmente possono riferirsi allo spigolo  $l_0$   
 dell'ottaedro o al raggio  $S_1$  della sfera circoscritta  
 all'ottaedro o passante per punti determinati.

$$\text{L'angolo } \widehat{TAQ} = \arctg\left(\frac{K l_0}{\frac{l_0}{\sqrt{3}}}\right) = \arctg(K\sqrt{3}) = \arctg\left(\frac{4\sqrt{2}}{\frac{3}{\lambda} - 2}\right)$$

$$\cos(\widehat{TAQ}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} + K^2}} ; \overline{AQ} = \overline{AT} \cos(\widehat{TAQ}) = \frac{l_0}{\sqrt{3}} \sqrt{1+3K^2} = l_0 \sqrt{\frac{1}{3} + K^2} .$$

Possiamo far crescere i coefficienti  $\lambda$  o  $K$  fino a  
 che i diedri sugli spigoli convergenti sui vertici  
 dell'ottaedro ( $\widehat{\alpha}_{AP}$ ) diventino piani ( $180^\circ$ ) il trapezoedro  
 si trasforma in cubo, aumentando ancora diventa conoideo.

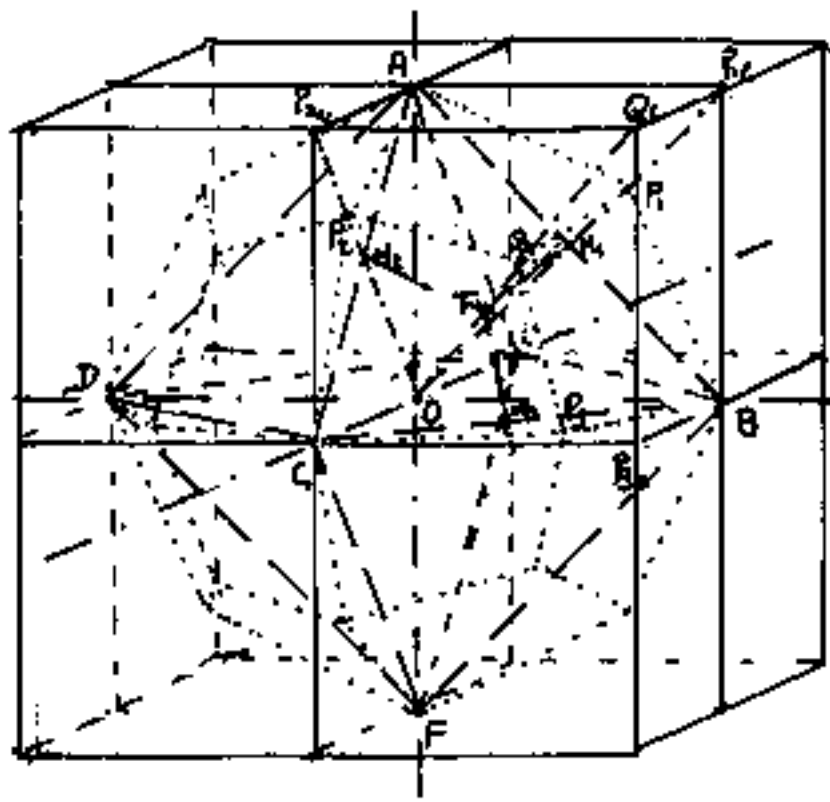


TABELLA dei TRAPEZOIDRI

$\lambda$	$K$	$\overline{AP}/\ell_0$	$\overline{P_1P_2}/\ell_0$	$\overline{QP}/\ell_0$	$\overline{AQ}/\ell_0$	$\widehat{PAQ}$	$\widehat{PQA}$	$\widehat{D_{AP}}$	$\widehat{D_{QP}}$	NOTE
$\lambda$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left( \frac{4}{3K} - 2 \right)$	$\frac{1}{2} \sqrt{1+4K^2}$	$\frac{1}{2} (1+2\lambda)$	$\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{2\lambda}{K}}$	$\frac{\sqrt{2\lambda^2 - 4\lambda + 3}}{3 - 2\lambda}$	$\arcsen \left( \frac{1+2\lambda}{2\sqrt{1+4K^2}} \right)$	$\arcsen \left( \frac{P_1P_2}{2QP} \right)$	$\arcsen \left( \frac{PA}{\sqrt{2}VA} \right)$	$\arcsen \left( \frac{PQ}{2VQ} \right)$	valori in funzione di $\lambda$
$\frac{3}{4\sqrt{\frac{2}{3}+2}}$	$K$	$\frac{\sqrt{30K^2+4\sqrt{6}K+8}}{2(\sqrt{8}+\sqrt{3}K)}$	$\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}K}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}K}$	$\sqrt{\frac{2}{3} + K^2}$		$\arcsen \left( \frac{P_1P_2}{2AP} \right)$	id	id	id	valori in funzione di $K$
0	0	$\frac{1}{2}$ 0,500000	$\frac{1}{2}$ 0,500000	$\frac{\sqrt{3}}{6}$ 0,288675	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ 0,577350	30°	60°	109° 28' 16"	180°	ottaedro a face rigate
$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 0,307106781	$\frac{2}{7} (\sqrt{3} - \sqrt{\frac{2}{3}})$ 0,261586921	$\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$ 0,541195100	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	$\frac{1}{7} \sqrt{10 - \sqrt{2}}$ 0,418593038	$\frac{1}{7} \sqrt{31 - 8\sqrt{2}}$ 0,633846236	40° 41' 22"	57° 37' 54"	138° 07' 05"	138° 07' 05"	trapezoidro a diedri uguali
$(\sqrt{3} - \frac{3}{2})$ 0,232050807	$\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ 0,298858491	$\sqrt{\frac{11-6\sqrt{3}}{2}}$ 0,551223707	$(\sqrt{3} - 1)$ 0,732050807	$(\sqrt{\frac{15-8\sqrt{3}}{6}})$ 0,436576365	$\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$ 0,650115177	41° 36' 27"	56° 58' 17"	142° 03' 43"	133° 04' 46"	Trapezoidro 3°
$\frac{3 - \sqrt{6}}{2}$ 0,275255129	$2(1 - \sqrt{\frac{2}{3}})$ 0,367006838	$\sqrt{\frac{8-3\sqrt{6}}{2}}$ 0,570758605	$2 - \sqrt{\frac{8}{3}}$ 0,775255129	$\sqrt{\frac{2(57-25\sqrt{6})}{3}}$ 0,46965800	$\sqrt{\frac{21-8\sqrt{6}}{3}}$ 0,684252477	42° 46' 36"	55° 37' 23"	148° 52' 55"	124° 37' 58"	Trapezoidro 2° (Assenzaione è AB) (diventa A10)
$\frac{1}{2}$ 0,500000	$\sqrt{\frac{3}{3}}$ 0,816496581	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	1 1,000000	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	1 1,000000	45°	45°	180°	90°	CUBO di spigolo: $\ell_0\sqrt{2}$

In figura, con diverso tratteggio, si è cercato di rappresentare il solido ottaedro base, le cui facce sono rigate dai segmenti  $\overline{TM}$  e sovrappongono le facce  $AM_2TM_1$ ,  $M_2CM_3T$ ,  $TM_3BM_1$  del trapezoedro con i coefficienti:  $\lambda = \kappa = 0$ .

Intermedio a puntini si è rappresentato un trapezoedro le cui facce sono divente:  $AP_2QP_1$ ,  $P_2CP_3Q_1$ ,  $Q_1P_3BP_1$ . I coefficienti di questo trapezoedro sono intermedi:  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ ;



questo trapezoedro sono intermedi:  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ ;

$$0 < \kappa < \sqrt{\frac{2}{3}};$$

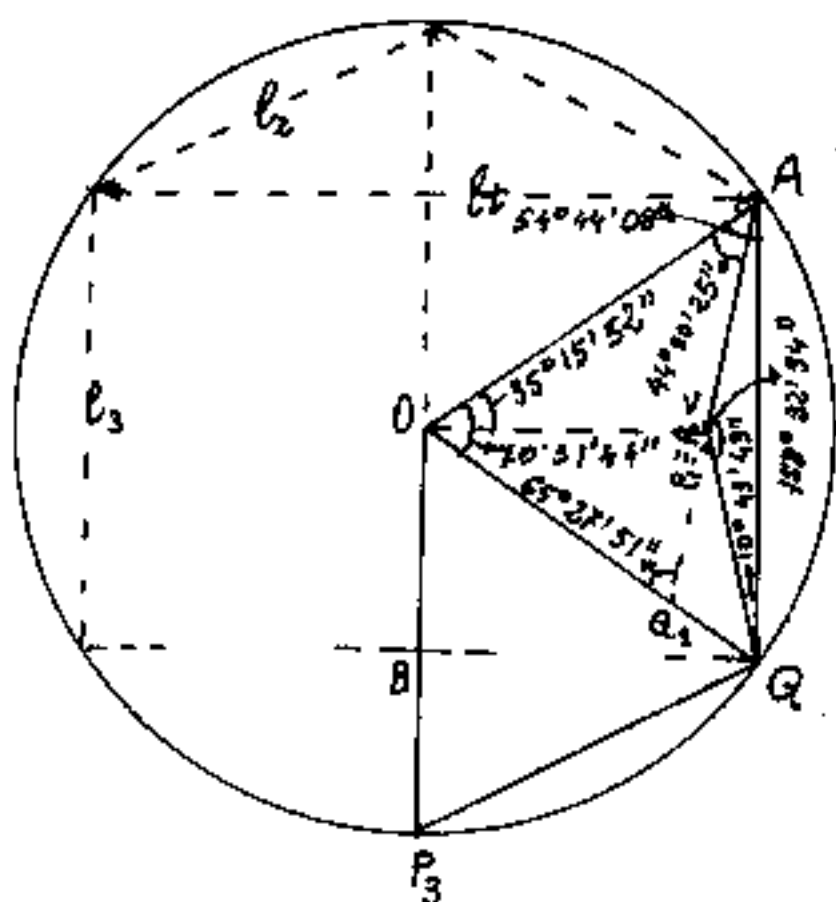
continuando a crescere i coefficienti della classe dei trapezoedri, quando

$\lambda = \frac{1}{2}$  e  $\kappa = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , il trapezoedro si trasforma in cubo ove si hanno le facce  $AP_2Q_2P_2$ ,  $P_2CP_2Q_2$ ,  $Q_2P_2BP_2$ .

Le relazioni che legano  $\kappa = f(\lambda)$  e  $\lambda = \text{argf}(\kappa)$ , sono riportate in tabella.

# Il deltoide dodecaedro

$$(F=12 ; V=14 ; S=24)$$



Abbiamo visto come l'esacistetraedro inscrittibile in una sfera, se convesso, corrisponde al tetracisesaedro, se concavo al triacisottaedro.

Avevamo anche  $l_1$ , il quadrilatero  $AP_2QP_1$ , non piano, con:  $A, P_2, Q, P_1$ ,

insistenti sulla superficie sferica. Come abbiamo operato sull'esacisottaedro per ottenere il trapezoedro, analogamente operiamo sull'esacistetraedro per ottenere il deltoide dodecaedro.

Lasciamo  $A, P_1, P_2$ , sulla superficie sferica, ci proponiamo, spostando  $Q$  in  $Q$ , di ottenere piano il quadrilatero  $AP_2QP_1$ . (abbiamo scelto i simboli dell'esacisottaedro)

Sezioniamo con un piano passante per  $O A Q P_3$ , l'esacistetraedro;

$$\overline{OA} = \overline{OQ} = \overline{OP_3} = \boxed{r_1 = \frac{lt\sqrt{6}}{4}} ; \boxed{lt = r_1 \frac{2}{3}\sqrt{6}} ;$$

$$\overline{AQ} = \boxed{l_3 = \frac{lt}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} r_1} ; \frac{\overline{P_1P_2}}{2} = \frac{\overline{P_1P_3}}{2} = \overline{PV} = \frac{l_2}{2} = \boxed{\overline{OV} = \frac{lt\sqrt{3}}{4}} ;$$

$$\widehat{AOV} = \arcsen\left(\frac{\overline{AQ}/2}{\overline{OA}}\right) = \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{35^\circ 15' 51.8028579}$$

$$\widehat{OAQ} = \underline{54^\circ 44' 08.1971421} ; \widehat{AVQ} = \underline{158^\circ 32' 34.202} ; \text{(V. triacisottaedro concavo = esocistetraedro)}$$

$$\widehat{VAQ} = \widehat{VQA} = (90^\circ - \widehat{AVQ}/2) = 10^\circ 43' 42,85'' ; \quad \boxed{l_2 = l_t \sqrt{3-\sqrt{3}}/2}$$

$$\widehat{OAQ_1} = (\widehat{OAQ} - \widehat{VAQ}) = 44^\circ 00' 25'' ; \quad \widehat{AQ_1O} = (180^\circ - \widehat{AOQ} - \widehat{OAQ}) = 67^\circ 27' 51''$$

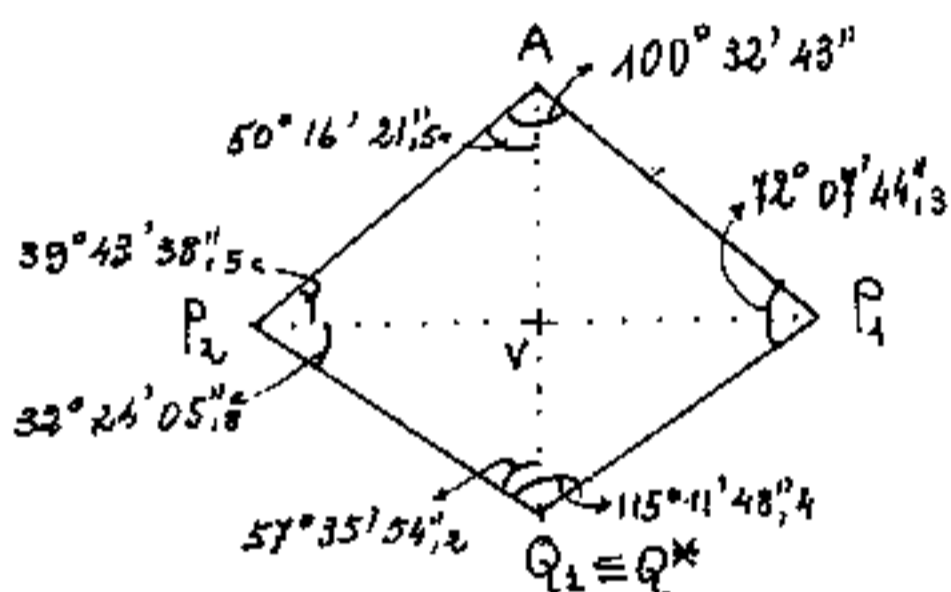
$$\overline{AQ_1} = \rho_1 \frac{\sin(\widehat{AOQ_1})}{\sin(\widehat{OQ_1A})} = 4,036393358 \rho_1 = (0,634658726) l_t ;$$

$$\boxed{\overline{AQ_1} = \rho_1 \sqrt{\frac{2(75-4\sqrt{3})}{39^2}} = l_t \frac{\sqrt{75-4\sqrt{3}}}{13}}$$

$$\overline{AV} = \sqrt{l_2^2 - \overline{OV}^2} = l_t \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{16}} = \boxed{\overline{AV} = \frac{l_t}{4} \sqrt{9-4\sqrt{3}}} = (0,359843436) l_t$$

$$\overline{Q_1V} = (\overline{AQ_1} - \overline{AV}) ; \quad \overline{Q_1V} = (0,274815289) l_t$$

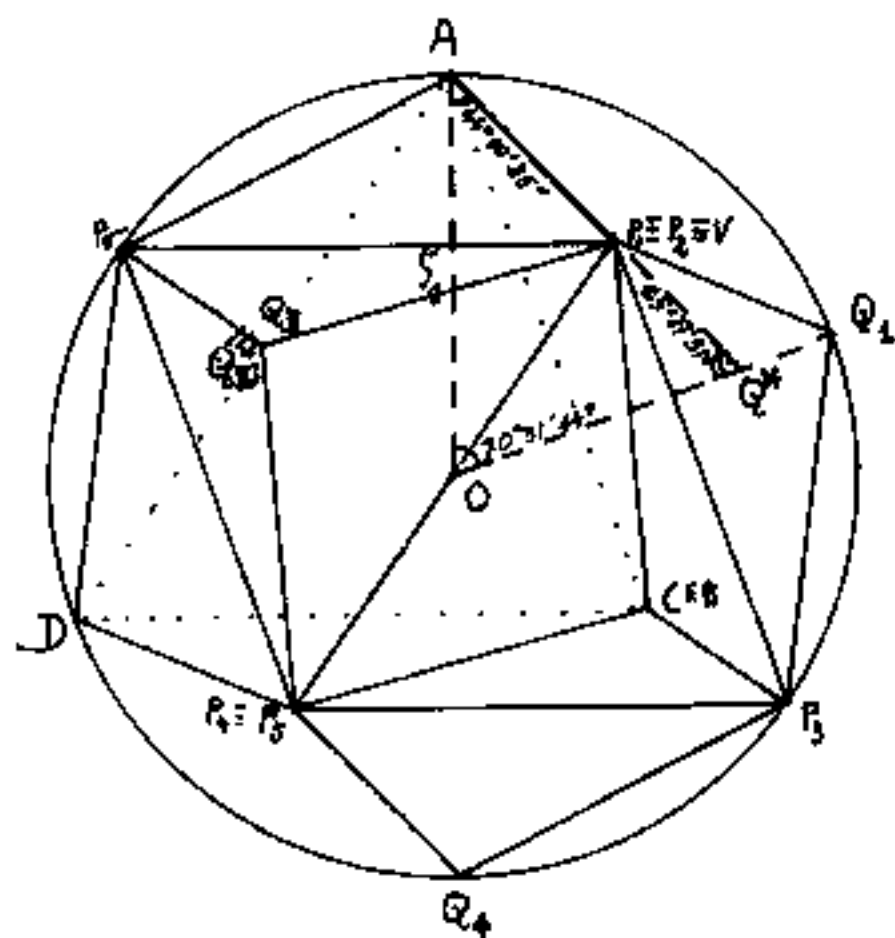
$$\overline{Q_1P_2} = l_t \sqrt{\overline{P_2V}^2 - \overline{VQ_1}^2} = \overline{Q_1P_2} = (0,512858112) l_t = \frac{1}{2}$$



Questi elementi ci consentono di disegnare la faccia del dodecaedro. ( $l_t = 5 \text{ cm}$ )

Se sezioniamo l'esacis-

tetraedro concano, inscrittibile in una sfera, con un piano passante per  $\widehat{AOQ}$ ; tenuto presente che  $A, B, C, D$ , è il tetraedro generante;  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ , sono i punti di intersezione con la superficie sferica dei raggi passanti per i centri delle facce del tetraedro. I punti:  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  sono i punti di intersezione con la superficie sferica dei raggi passanti per la mezzeria degli spigoli del tetraedro. Avendo indicizzato i vertici  $Q$  ove  $Q_1$  è relativo alla faccia  $ABC$ , indicheremo con  $Q^*$  il vertice spostato già indicato con  $Q_1$ .



Avremo:

In figura, abbiamo proiettato la sezione del tetraedro base, ove:  $\overline{A(B=C)} = \overline{D(B=C)} = a = \text{apotema delle facce del tetraedro, (si proietta in vera grandezza);}$  anche  $l_t = \text{spigolo del tetraedro} = \overline{AD}$  ed  $r_3 = \overline{OA} = \overline{OD} = \overline{OQ_1} = \overline{OP_3} = \dots$  raggio della sfera circoscritta al tetraedro si proiettano in vera grandezza.

$l_t = \frac{2}{3}\sqrt{6} r_3$ ;  $r_3 = l_t \sqrt{6}/4$ ;  $a = l_t \sqrt{3}/2$ ; (si è preso  $l_t = 5 \text{ cm.}$ )

$\overline{AQ} = \text{spigoli dell'esacitetraedro convesso} = \frac{l_t}{\sqrt{2}} = r_3 \frac{2}{\sqrt{3}}$ ; ( $\overline{AQ}$ , in vera grandezza)  
 $= \overline{DQ} = \overline{CQ} = \overline{BQ} \dots$

$\overline{P_1P_2} = \overline{P_4P_5} = \overline{P_1P_3} = \dots$  spigoli dell'esacitetraedro concavo;  $\overline{P_1P_2} = \frac{l_t \sqrt{3}}{2} = r_3 \sqrt{2}$ ;  
 si noti che gli spigoli  $\overline{P_1P_2} = a = \text{apotema delle facce del tetraedro.}$

$\overline{AV} = \text{distanza di A dal segmento } \overline{P_1P_2}$ ;  $\overline{AV} = \frac{l_t}{2} \sqrt{9-4\sqrt{3}} = r_3 \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}$ ;

$\overline{OV} = \text{distanza di V dal centro sfera}$ ;  $\overline{OV} = r_3/\sqrt{2} = \frac{\overline{P_1P_2}}{2} = \overline{P_1V} = \overline{VP_2}$ .

Calcoliamo l'angolo  $\widehat{O\hat{A}Q^*}$

$$\cos(\widehat{O\hat{A}Q^*}) = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{AV}^2 - \overline{OV}^2}{2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AV}} = \frac{r_3^2 + r_3^2 \left(\frac{9-4\sqrt{3}}{6}\right) - r_3^2/2}{2 r_3 \cdot r_3 \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}} = \frac{1 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}}{2 \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{9-4\sqrt{3}}} = 2 \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{9-4\sqrt{3}}} = 2 \sqrt{\frac{6-\sqrt{3}}{33}} = 0,719254597.$$

$$\sec(\widehat{O\hat{A}Q^*}) = \frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{3}}}; \quad \text{tang}(\widehat{O\hat{A}Q^*}) = \left(\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}\right) = 0,965925825$$

$$\boxed{\widehat{O\hat{A}Q^*} = 44^\circ 00' 25",2979042903}$$

Calcoliamo l'angolo  $(OQ^*A)$

$$\underline{\sin(OQ^*A)} = \sin[A\hat{O}Q^* + (O\hat{A}Q^*)] = \sin(A\hat{O}Q^*)\cos(O\hat{A}Q^*) + \cos(A\hat{O}Q^*)\sin(O\hat{A}Q^*)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{9-4\sqrt{3}}}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{3}}}\right) = \frac{1+4(\sqrt{3}-1)}{3\sqrt{9-4\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(9-8\sqrt{3})(9+4\sqrt{3})}}{3\sqrt{11}} = \boxed{\sin(OQ^*A) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{75+4\sqrt{3}}{11}}\right)}$$

$$\boxed{\cos(OQ^*A) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{6-\sqrt{3}}{11}}}$$

$$\boxed{\tan(OQ^*A) = \frac{1}{2}\sqrt{14+3\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{OQ^*A = 65^\circ 27' 51'', 096379875}$$

$$\underline{AQ^*} = AO \left( \frac{\sin A\hat{O}Q^*}{\sin OQ^*A} \right) = \int_1 \left( \frac{2}{3}\sqrt{2} \right) \left( \frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{75+4\sqrt{3}}} \right) = \int_1 \left( \sqrt{\frac{88}{75+4\sqrt{3}}} \right)$$

$$\boxed{AQ^* = (1,036393358) \int_1}$$

$$\underline{\sin(A\hat{O}V)} = \frac{1}{\sqrt{3}} ; \quad \underline{\cos(A\hat{O}V)} = \frac{\sqrt{2}}{3} ; \quad \underline{\tan(A\hat{O}V)} = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

$$\underline{\sin(A\hat{V}O)} = \sin(A\hat{O}V + O\hat{A}V) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(2\sqrt{\frac{6-\sqrt{3}}{33}}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(\sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}}\right) =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{6-\sqrt{3}}{33}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{18+8\sqrt{3}}{33}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}-1+1}{\sqrt{3}}\right) \sqrt{\frac{18+8\sqrt{3}}{33}}$$

$$\boxed{\sin(A\hat{V}O) = \sqrt{\frac{18+8\sqrt{3}}{33}}}$$

$$\boxed{\cos(A\hat{V}O) = \sqrt{\frac{15-8\sqrt{3}}{33}}}$$

$$\boxed{\tan(A\hat{V}O) = \sqrt{14+8\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{\tan(A\hat{V}O) = \sqrt{8+\sqrt{6}}}$$

$$\boxed{A\hat{V}O = 79^\circ 16' 17'', 1007622}$$

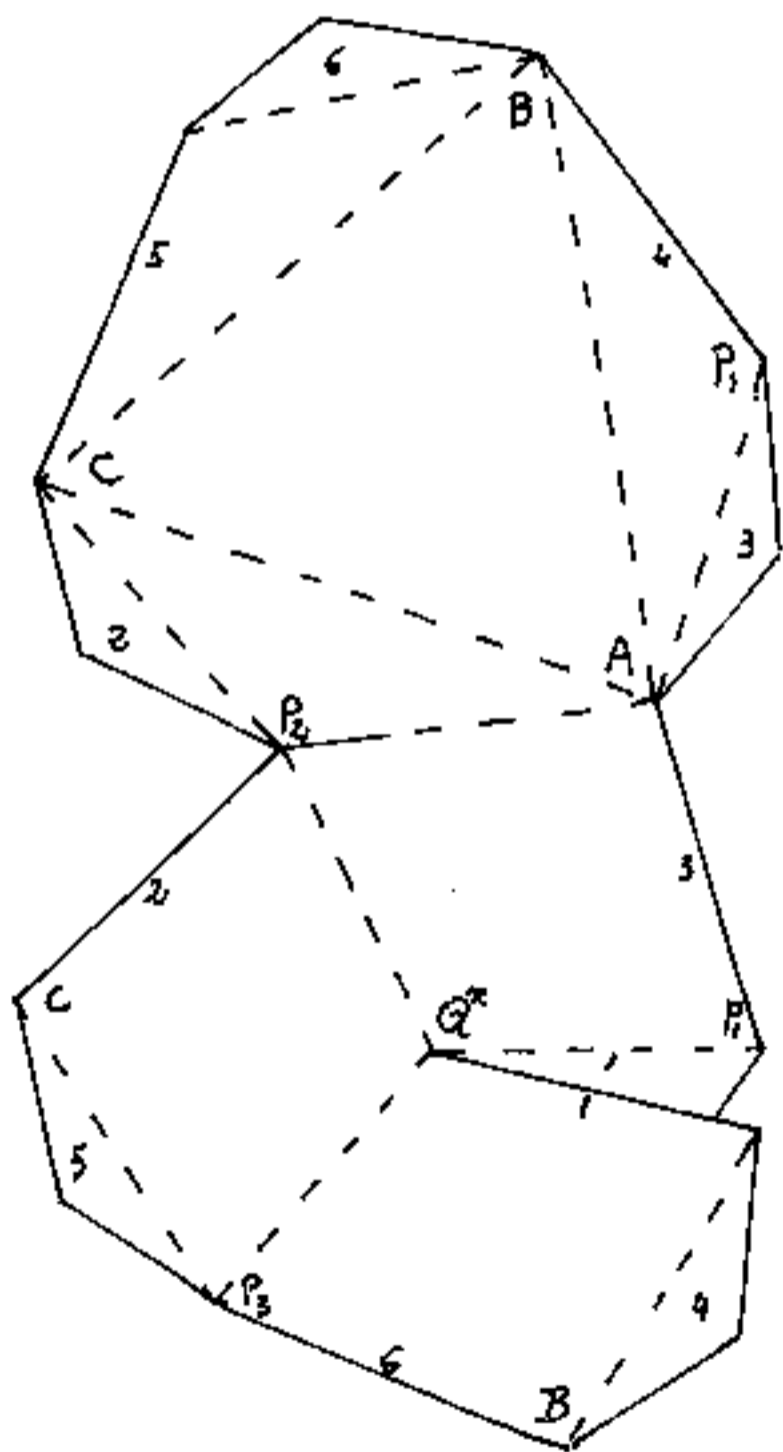
$$\overline{VQ^*} = \overline{OV} \left( \frac{\sin(\widehat{VOQ^*})}{\sin(\widehat{VQ^*O})} \right) = \left( \frac{\rho_1}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( 3 \sqrt{\frac{11}{75+4\sqrt{3}}} \right) = \rho_1 \sqrt{\frac{33}{150+8\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{\overline{VQ^*} = \frac{\rho_1}{13} \sqrt{\frac{75-4\sqrt{3}}{2}}} = (0,448771488) \rho_1$$

$$\overline{AP_1} = \overline{AP_3} = l_2 = \frac{l_t}{2} \sqrt{3-\sqrt{3}} = \rho_1 2 \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} = (0,919401686) \rho_1$$

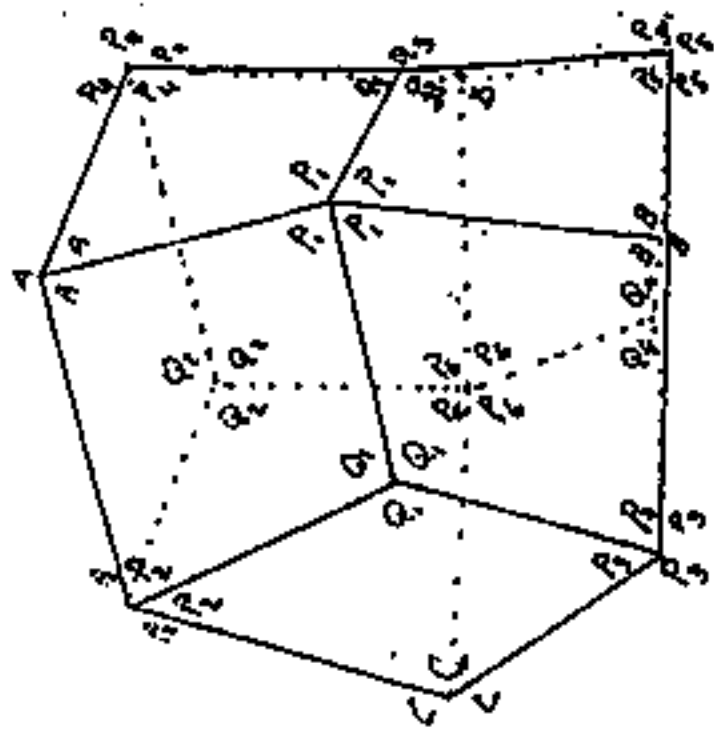
calcoliamo:  $\overline{Q^*P_1} = \overline{Q^*P_2} = \sqrt{\left(\frac{\overline{PP_1}}{2}\right)^2 + \overline{VQ^*}^2} = \rho_1 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{33}{150+8\sqrt{3}}}$

$$\overline{Q^*P_1} = \rho_1 \sqrt{\frac{108+4\sqrt{3}}{150+8\sqrt{3}}} = \overline{Q^*P} = \rho_1 2 \sqrt{\frac{11}{61+\sqrt{3}}} = (0,83749379) \rho_1$$



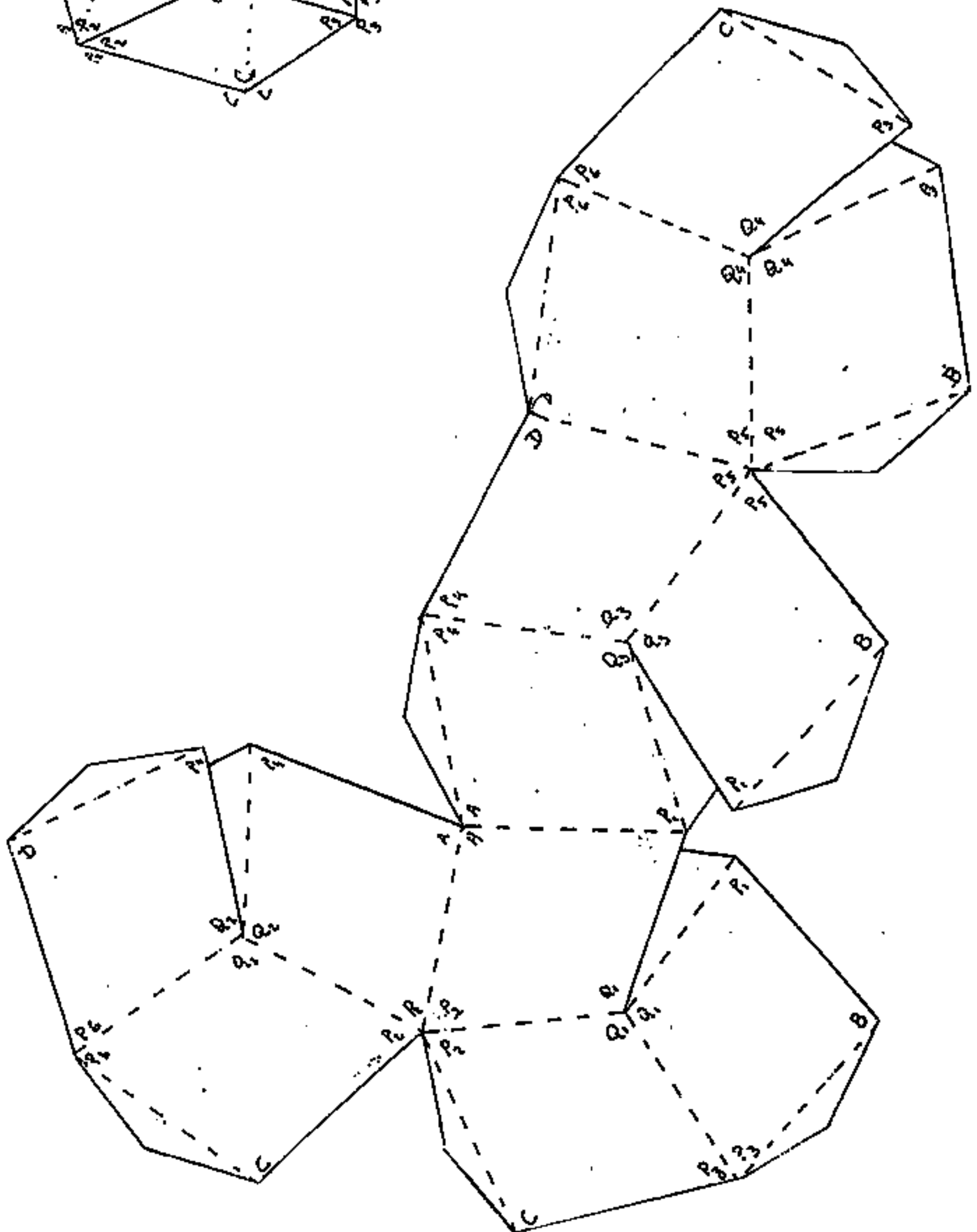
Il quadrilatero piano  $AP_2Q^*P_1$  fornisce la configurazione delle facce del nostro solido, che avevamo già calcolato e disegnato. A fianco è lo sviluppo, per costruire modelli, delle parti di solido da sovrapporre alle facce del tetraedro; ne occorrono quattro per ottenere il solido completo.

Abbiamo ripetuto i calcoli per esprimerli in radicali in funzione di  $\rho_1$ , comunque ricordiamo che  $l_t = \rho_1 \left( \frac{2}{3} \sqrt{6} \right) = (1,632993162) \rho_1$   
 $\rho_1 = l_t \left( \frac{\sqrt{6}}{4} \right) = (0,612372435) l_t$



Schema del  
DELTOIDE DODECAEDRO

diεδro  $\hat{D}_e = 137^\circ 50' 43,3''$

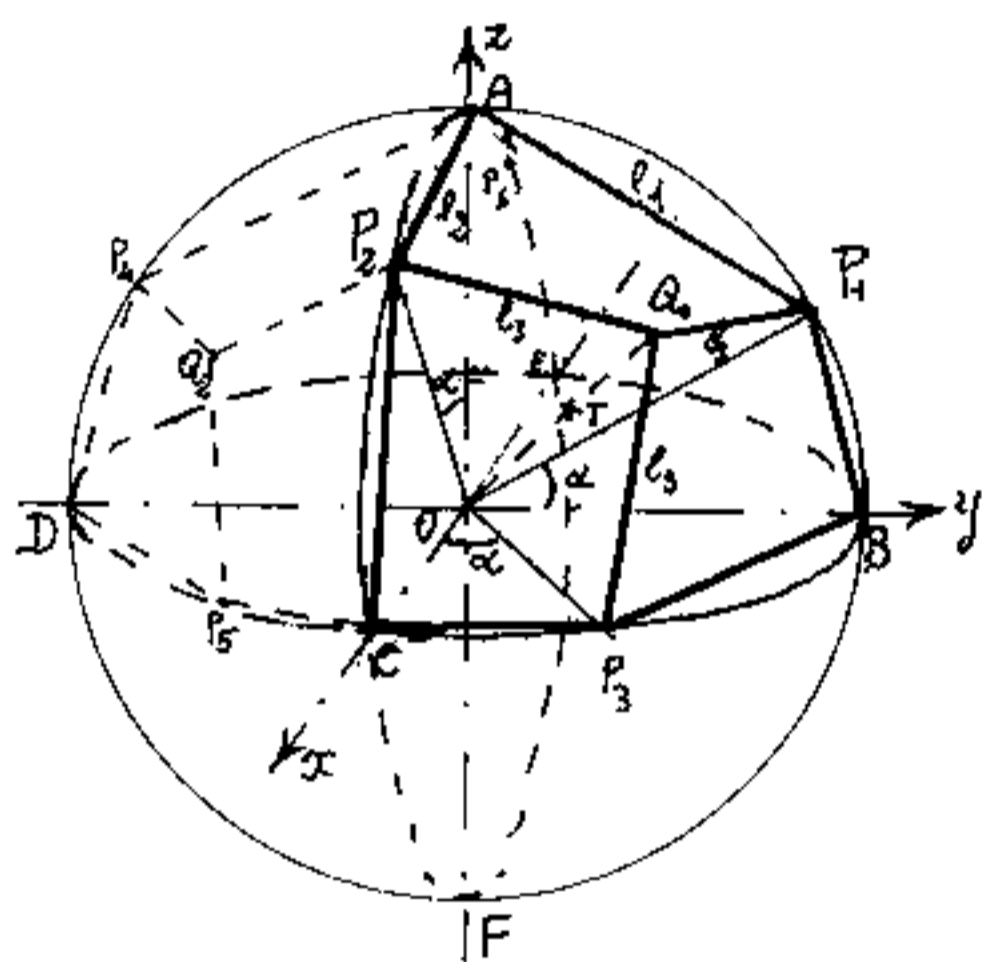




# Il diacisdodecaedro (o diploide)

(24 facce quadrilatera, 26 vertici, 48 spigoli)

Consideriamo un ottaedro regolare  $A, B, C, D, E, F$ , inscritto in una sfera di raggio  $R$ , e centro  $O$ .



Consideriamo il triangolo sferico  $ABC$ , proiettante la faccia  $ABC$ , dell'ottaedro; consideriamo che gli archi:  $\widehat{AC}$ ,  $\widehat{CB}$ ,  $\widehat{BA}$ ; siano tracciati dall'estremo  $P$  di tre raggi:  $\overline{OP}_4$ ;  $\overline{OP}_3$ ;  $\overline{OP}_1$ ;

che rispettivamente descrivono l'arco:  $\widehat{AC}$ ;  $\widehat{CB}$ ;  $\widehat{BA}$ ; e sia  $\widehat{AOP}_2 = \widehat{COP}_3 = \widehat{BOP}_1 = \alpha$  (con  $\alpha$  variabile da zero a  $\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$ , da assumere come parametro).

Consideriamo ora il raggio  $\overline{OT}$ , che passa per il centro  $T$  della faccia dell'ottaedro e prolunghiamo tale raggio fino ad un punto  $Q$ , tale che, i quadrilateri:  $AP_2QP_1 = BP_1QP_3 = CP_3QP_2$ ; risultino piani. Questi tre quadrilateri piani sono le facce da sovrapporre all'ottaedro per ottenere la classe di solidi detta: diploide o dei diacisdodecaedri.

Si noti che ciascun diacisdodecaedro è

individuato dal parametro  $\alpha$ . In particolare per  $\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$  si ha il trapezoedro (che abbiamo già trattato).

Si noti che i punti:  $P_1; P_2; P_3$ ; qualunque sia  $\alpha$ , sono i vertici di un triangolo equilatero:  $\overline{P_1 P_2} = \overline{P_1 P_3} = \overline{P_2 P_3}$ , il cui lato raggiunge il minimo =  $\rho_3$ , per  $\alpha = 45^\circ$ ; mentre per  $\alpha = 0$ , o per  $\alpha = 90^\circ$  si ha il massimo =  $\rho_3 \sqrt{2}$ .

Si ha anche:  $\overline{P_1 Q} = \overline{P_2 Q} = \overline{P_3 Q}$ . Abbiamo già dimostrato, (per  $\alpha = 45^\circ$ ), nel trapezoedro che, se  $Q$  è sulla superficie sferica:  $\overline{P_1 P_2} > \overline{A Q_3}$ ; cioè, a maggior ragione, se  $\alpha \neq 45^\circ$ . Questo implica che il quadrilatero  $A P_2 Q_3 P_1$  (ove  $Q_3$  è il punto sulla superficie sferica del raggio per il centro faccia dell'ottaedro) non è piano: e se, oltre al perimetro, tracciamo la diagonale  $\overline{A Q_3}$ , (non  $\overline{P_1 P_2}$ ), si ha un esacisottaedro convesso, se invece tracciamo la diagonale  $\overline{P_1 P_2}$ , (non  $\overline{A Q_3}$ ), si ha un angolo diedro concavo sugli spigoli:  $\overline{P_1 P_2}; \overline{P_1 P_3}; \overline{P_2 P_3}, \dots$

Consideriamo gli assi cartesiani, come si usa in cristallografia, cioè:  $\overline{OC}$  su  $x$ ,  $\overline{OB}$  su  $y$ ,  $\overline{OA}$  su  $z$ ; (terna antioraria con la  $x$  volta verso l'osservatore);

$$\text{avremo: } A \equiv (0, 0, \rho_3); \quad B \equiv (0, \rho_3, 0); \quad C \equiv (\rho_3, 0, 0);$$

$$P_1 \equiv (0, \rho_3 \cos \alpha, \rho_3 \sin \alpha); \quad P_2 \equiv (\rho_3 \sin \alpha, 0, \rho_3 \cos \alpha); \quad P_3 \equiv (\rho_3 \cos \alpha, \rho_3 \sin \alpha, 0)$$

$$\overline{A P_2} = \overline{B P_1} = \overline{C P_3} = \boxed{l_2 = \rho_3 \sqrt{2} \sin(\alpha/2)}$$

$$\overline{A P_1} = \overline{B P_3} = \overline{C P_2} = l_1 = \rho_3 \sqrt{2} \sin\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) \quad \boxed{l_1 = \rho_3 \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)}$$

Calcoliamo la distanza  $\overline{P_1 P_2}$  (dalle coordinate cartesiane)

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(0 - \rho_1 \operatorname{sen} \alpha)^2 + (\rho_1 \cos \alpha - 0)^2 + (\rho_1 \operatorname{sen} \alpha - \rho_1 \cos \alpha)^2} =$$

$$= \rho_1 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \boxed{\overline{P_1 P_2} = \rho_1 \sqrt{2 - \operatorname{sen}(2\alpha)}}$$

calcoliamo l'angolo:  $(P_2 \hat{A} P_1) = \arccos \left( \frac{l_1^2 + l_2^2 - \overline{P_1 P_2}^2}{2 l_1 l_2} \right)$ ;

$$(P_2 \hat{A} P_1) = \arccos \left( \frac{1}{2} \frac{4 \operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2}) + 2(\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + \operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2})) - 2 \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2})}{(2 \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}))(\sqrt{2})(\cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})} - (2 - 2 \operatorname{sen}(2\alpha)) \right)$$

$$= \arccos \left( \frac{2 \operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2}) + (\sqrt{2} - 2 \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2})) - (\sqrt{2} - \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) \cos \alpha)}{2 \sqrt{2} (\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}) (\cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})} \right)$$

$$= \arccos \left( \frac{\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) - \cos(\frac{\alpha}{2}) + \cos \frac{\alpha}{2} (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2})}{\sqrt{2} (\cos(\frac{\alpha}{2}) - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})} \right)$$

$$= \arccos \left( \frac{-1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\boxed{(P_2 \hat{A} P_1) = \arccos \left( \frac{\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) (\cos(\frac{\alpha}{2}) - \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}))}{\sqrt{2}} \right)} = \hat{A}$$

Posto:  $\rho_1 = 1$ , calcoliamo alcuni elementi di  $P_1 A P_2$  al variare di  $\alpha$ .

$\alpha$	$\overline{A P_2} = l_2$	$\overline{A P_1} = l_1$	$\overline{P_1 P_2}$	$(P_1 \hat{A} P_2) = \hat{A}$
$0^\circ$	0	1.414213562	1.414213562	$90^\circ$
$10^\circ$	0.174311486	1.285575219	1.287625666	$86^\circ 47' 18'', 45$
$15^\circ$	0.261052384	1.217522858	1.224744871	$85^\circ 26' 33'', 04$
$30^\circ$	0.517638090	1	1.064882433	$82^\circ 33' 52'', 30$
$45^\circ$	0.765366865	0.765366865	1	$81^\circ 34' 44'', 19$
$60^\circ$	1	0.517638090	1.064882433	$82^\circ 33' 52'', 30$
$75^\circ$	1.217522858	0.261052384	1.224744871	$85^\circ 26' 33'', 04$
$90^\circ$	1.414213562	0	1.414213562	$90^\circ$

Dobbiamo ora imporre la condizione che il quadrilatero  $AP_1QP_2$  sia piano. A tal fine scriviamo l'equazione del piano per  $A, P_1, P_2$ : ( $P_3 = 1$ )

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z = 1 \quad \left( \begin{array}{l} \text{Sostituiamo le coordinate di } A, P_1, P_2 \\ \text{per calcolare i coefficienti} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} A) \\ P_1) \\ P_2) \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{array} \right| = -\sin\alpha \cos\alpha = \Delta$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 1 & 0 & \cos(\alpha) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) - 1 \\ 1 & 0 & \cos(\alpha) - 1 \end{array} \right| = \Delta_a = \cos\alpha(\cos(\alpha) - 1)$$

$$\boxed{\frac{a}{d} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & 1 & \cos(\alpha) \end{array} \right| = \Delta_b = \sin(\alpha)(\sin(\alpha) - 1)$$

$$\boxed{\frac{b}{d} = \frac{1 - \sin(\alpha)}{\cos\alpha}}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(\alpha) & 1 \\ \sin(\alpha) & 0 & 1 \end{array} \right| = \Delta_c = \sin(\alpha)(-\cos(\alpha))$$

$$\boxed{\frac{c}{d} = \frac{-\sin\alpha \cos\alpha}{-\sin\alpha \cos\alpha} = 1}$$

L'equazione del piano sarà quindi:

$$\boxed{\left( \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} \right) x + \left( \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} \right) y + z = 1}$$

Notiamo che per i punti del raggio  $\overline{OQ}$  vale la relazione:  $\boxed{x_Q = y_Q = z_Q}$ , per cui dovendo  $Q$

soddisfare l'equazione del piano, si ha:

$$\left( \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) X = 1$$

$$(\cos \alpha - \cos^2 \alpha + \sin \alpha - \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) X = \sin \alpha \cos \alpha$$

$$X_Q = Y_Q = Z_Q = \int_3 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 1}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(X_Q - 0)^2 + (Y_Q - \int_3 \cos \alpha)^2 + (Z_Q - \int_3 \sin \alpha)^2} \quad \text{posto } \left( \int_3 = 1 \right)$$

$$\overline{P_1Q} = \overline{P_2Q} = \overline{P_3Q} = \sqrt{3X_Q^2 + 1 - 2X_Q(\sin \alpha + \cos \alpha)} = l_3$$

$$AQ_1 = AQ_2 = \sqrt{3X_Q^2 + 1 - 2X_Q}$$

Coefficienti dell'equazione del piano  $AP_1P_2$  ( $c/d = 1$ )

coseni direttori ed (angoli) (numericamente dai coeff.)

$d$	$a/d = \left( \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$	$b/d = \left( \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$	$\sqrt{\left( \frac{a}{d} \right)^2 + \left( \frac{b}{d} \right)^2 + \left( \frac{c}{d} \right)^2}$	$\cos(\hat{N}x)$ ( $\hat{N}x$ )	$\cos(\hat{N}y)$ ( $\hat{N}y$ )	$\cos(\hat{N}z)$ ( $\hat{N}z$ )
$0^\circ$	0	1	1,414213562	0 ( $90^\circ$ )	0,707106781 ( $45^\circ$ )	0,707106781 ( $45^\circ$ )
$10^\circ$	0,087488664	0,839099631	1,308335759	0,066870192 ( $86^\circ 09' 56''$ )	0,641348847 ( $50^\circ 06' 27''$ )	0,764329793 ( $40^\circ 09' 09''$ )
$15^\circ$	0,131652498	0,767326988	1,267329116	0,103881854 ( $84^\circ 02' 14''$ )	0,605467813 ( $52^\circ 44' 15''$ )	0,789061016 ( $37^\circ 57' 07''$ )
$30^\circ$	0,267949192	0,577350269	1,185381838	0,226044624 ( $76^\circ 56' 08''$ )	0,487058474 ( $60^\circ 51' 09''$ )	0,843610023 ( $32^\circ 28' 36''$ )
$45^\circ$	0,414213562	0,414213562	1,1589411651	0,267406744 ( $69^\circ 03' 32''$ )	0,357406744 ( $69^\circ 03' 32''$ )	0,862856571 ( $30^\circ 21' 40''$ )
$60^\circ$	0,577350269	0,267949192	1,185381838	0,487058474 ( $60^\circ 51' 09''$ )	0,226044624 ( $76^\circ 56' 08''$ )	0,843610023 ( $32^\circ 28' 36''$ )
$75^\circ$	0,767326988	0,131652498	1,267329116	0,605467813 ( $52^\circ 44' 15''$ )	0,103881854 ( $84^\circ 02' 14''$ )	0,789061016 ( $37^\circ 57' 07''$ )
$90^\circ$	1	0	1,414213562	0,707106781 ( $45^\circ$ )	0 ( $90^\circ$ )	0,707106781 ( $45^\circ$ )

( $\rho=1$ ) abbiamo già calcolato:  $\overline{AP}_2 = l_2 = e \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$  ;  $\overline{AP}_1 = l_1 = e \operatorname{sen} \left( \frac{90^\circ - \alpha}{2} \right)$   
 l'angolo  $(Q_2 \hat{O} Q_1) = (T_2 \hat{O} T_1) = 70^\circ 31' 44''$  ove  $T_1 =$  centro della  
 faccia ABC dell'ottaedro cui corrisponde  $Q_1$ ,  $T_2 =$  centro della  
 faccia ACD dell'ottaedro cui corrisponde  $Q_2$ .  $\left( \operatorname{sen} \left( \frac{Q_2 \hat{O} Q_1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ .

$$\overline{OQ}_1 = \overline{OQ}_2 = X_Q \sqrt{3}$$

$$\overline{Q_1 Q_2} = 2 \overline{OQ}_1 \operatorname{sen} \left( \frac{Q_2 \hat{O} Q_1}{2} \right) = 2 X_Q \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \overline{Q_1 Q_2} = 2 X_Q$$

$$(A \hat{P}_2 Q_1) = \arccos \left( \frac{1}{2} \frac{\overline{AP}_2^2 + \overline{Q_1 P}_2^2 - \overline{AQ}_1^2}{(\overline{AP}_2)(\overline{Q_1 P}_2)} \right)$$

$$(A \hat{P}_1 Q_1) = \arccos \left( \frac{1}{2} \frac{\overline{AP}_1^2 + \overline{Q_1 P}_1^2 - \overline{AQ}_1^2}{(\overline{AP}_1)(\overline{Q_1 P}_1)} \right)$$

} angoli delle  
 facce.  
 in  $\hat{P}_2$  e  $\hat{P}_1$ .

Siano:  $p, q, z$ , le coordinate dei punti intercettati dal piano sugli assi. ( $\rho=1$ )

$$p = \frac{\operatorname{sen} d}{1 - \operatorname{cos} d}$$

$$q = \frac{\operatorname{cos} d}{1 - \operatorname{sen} d}$$

$$z = 1$$

Valori delle coordinate e dei raggi  $\overline{OQ}_1 = \overline{OQ}_2 = \dots$  ( $\rho=1$ )

$d$	$X_Q = Y_Q = Z_Q$	$\overline{OQ}$	$p$ <small>(*)</small>	$q$ <small>(**)</small>	$z$ <small>(**)</small>
0	—	—	—	—	—
10°	0,5190522556	0,899024879	11,43005221	1,191753592	1
15°	0,5265986324	0,912095587	7,595754090	1,303225373	1
30°	0,5419174615	0,938628577	3,732050814	1,732050808	1
45°	0,5469181607	0,947290042	2,414213562	2,414213562	1
60°	0,5419174615	0,938628577	1,732050808	3,732050808	1
75°	0,5265986324	0,912095587	1,303225373	7,595754090	1
90°	—	—	—	—	—

## Dimensioni ed angoli delle facce ( $\rho_3 = 1$ )

$\alpha$	$\overline{AQ}$	$\overline{PQ} = l_3$	$\overline{Q_1Q_2}$	$\cos(\widehat{AP_2Q})$ ( $\widehat{AP_2Q}$ )	$\cos(\widehat{AP_1Q})$ ( $\widehat{AP_1Q}$ )
$0^\circ$	—	—	—	—	—
$10^\circ$	0,8775769031	0,7782335154	1,038104511	-0,494302761 ( $119^\circ 37' 26''$ )	0,443749608 ( $41^\circ 56' 54''$ )
$15^\circ$	0,8824517517	0,7362203544	1,053197265	-0,438499698 ( $116^\circ 00' 29''$ )	0,69484031 ( $45^\circ 59' 08''$ )
$30^\circ$	0,8928542335	0,6328329692	1,83834923	-0,19653601 ( $101^\circ 20' 04''$ )	0,47665728 ( $51^\circ 31' 58''$ )
$45^\circ$	0,8969939436	0,5919799513	1,093836321	0,14644661 ( $81^\circ 34' 44''$ )	0,14644661 ( $81^\circ 34' 44''$ )
$60^\circ$	0,8928542335	0,6328329692	1,83834923	0,476657281 ( $51^\circ 31' 58''$ )	-0,19653601 ( $101^\circ 20' 04''$ )
$75^\circ$	0,8824517517	0,7362203544	1,053197265	0,694840313 ( $45^\circ 59' 08''$ )	-0,438499698 ( $116^\circ 00' 29''$ )
$90^\circ$	—	—	—	—	—

calcoliamo l'angolo:  $(\widehat{P_2QP_1}) = 2 \arcsin\left(\frac{\overline{P_1P_2}/2}{PQ}\right)$ , verificiamo che la somma degli angoli delle facce quadrilatera è  $360^\circ$ .

Per ogni  $\alpha$  riportiamo le dimensioni e gli angoli della faccia, nonché il disegno in scala

$\alpha = 10^\circ$  lati e diag.:

$$\overline{AP_2} = l_2 = 0,144311486 \rho_3$$

$$\overline{AP_1} = l_1 = 1,285575219 \rho_3$$

$$PQ = l_3 = 0,7782335154 \rho_3$$

$$\overline{P_1P_2} = 1,287625666 \rho_3$$

$$\overline{AQ} = 0,8775769031 \rho_3$$

angoli:

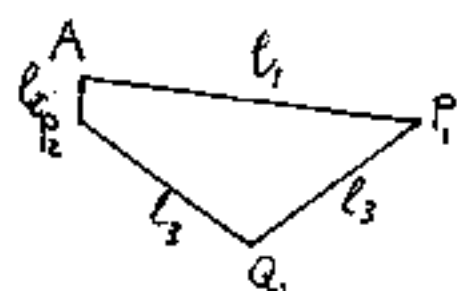
$$\widehat{P_1AP_2} = 86^\circ 47' 18''$$

$$\widehat{AP_2Q} = 119^\circ 37' 26''$$

$$\widehat{AP_1Q} = 41^\circ 56' 54''$$

$$\widehat{P_2QP_1} = 111^\circ 38' 22''$$

$$\underline{\underline{360^\circ 00' 00''}}$$



$\alpha = 15^\circ$  lati e diag. ; angoli

$$\overline{AP_2} = l_2 = 0,261052384 f_3$$

$$\hat{P_1AP_2} = 85^\circ 26' 33''$$

$$\overline{AP_1} = l_1 = 1,217522858 f_3$$

$$\hat{AP_2Q} = 116^\circ 00' 29''$$

$$\overline{PQ} = l_3 = 0,7362203544 f_3$$

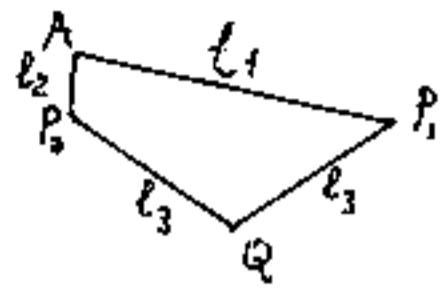
$$\hat{AP_1Q} = 45^\circ 59' 08''$$

$$\overline{P_1P_2} = 1,224744871 f_3$$

$$\hat{P_2QP_1} = 112^\circ 33' 50''$$

$$\overline{AQ} = 0,8824517517 f_3$$

$$\underline{\underline{360^\circ 00' 00''}}$$



$\alpha = 30^\circ$  lati e diag. ; angoli

$$\overline{AP_2} = l_2 = 0,517638090 f_3$$

$$\hat{P_1AP_2} = 82^\circ 33' 52''$$

$$\overline{AP_1} = l_1 = 1,00000000 f_3$$

$$\hat{AP_2Q} = 101^\circ 20' 04''$$

$$\overline{PQ} = l_3 = 0,6328329692 f_3$$

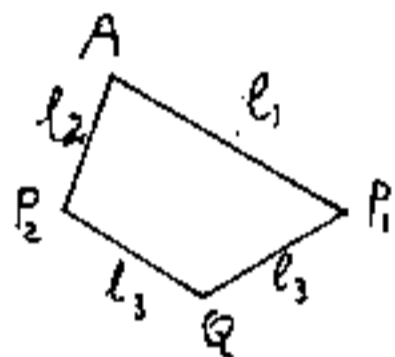
$$\hat{AP_1Q} = 61^\circ 31' 58''$$

$$\overline{P_1P_2} = 1,064882433 f_3$$

$$\hat{P_2QP_1} = 114^\circ 34' 06''$$

$$\overline{AQ} = 0,8928542335 f_3$$

$$\underline{\underline{360^\circ 00' 00''}}$$



$\alpha = 45^\circ$  lati e diag. ; angoli

$$\overline{AP_2} = l_2 = 0,765366865 f_3$$

$$\hat{P_1AP_2} = 81^\circ 34' 44'', 2$$

$$\overline{AP_1} = l_1 = 0,765366865 f_3$$

$$\hat{AP_2Q} = 81^\circ 34' 44'', 2$$

$$\overline{PQ} = l_3 = 0,5919799513 f_3$$

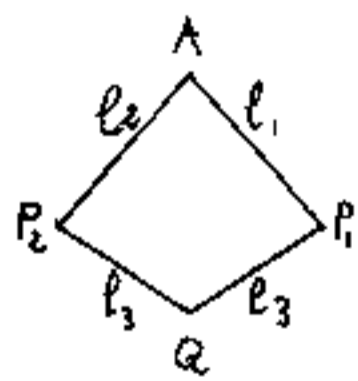
$$\hat{AP_1Q} = 81^\circ 34' 44'', 2$$

$$\overline{P_1P_2} = 1$$

$$\hat{P_2QP_1} = 115^\circ 15' 47'', 4$$

$$\overline{AQ} = 0,8963939436 f_3$$

$$\underline{\underline{360^\circ 00' 00''}}$$



trapezocedro

Per  $\alpha = 60^\circ$  ed  $\alpha = 75^\circ$  le facce sono simmetriche ad  $\alpha = 30^\circ$  ed  $\alpha = 15^\circ$ , per cui basta ribaltare le figure intorno all'asse di  $\overline{P_1P_2}$ , quindi Q è invariato  $P_2$  scambia  $P_1$ ;  $l_2$  scambia  $l_1$



Calcoliamo ora gli angoli diedri di questi solidi.  
diploidi

1) Angolo diedro sugli spigoli usenti da Q:  $\hat{D}_{QP}$

Sappiamo che gli angoli:  $\hat{P}_2QP_1 = \hat{P}_2QP_3 = \hat{P}_1QP_3 = 2 \arcsen \left( \frac{\overline{P_1P_2}/2}{PQ} \right) = \varphi$ .  
Sappiamo che un vertice ove concorrono tre facce con angolo  $= \varphi$ , il diedro sugli spigoli è:  $\hat{D} = 2 \arcsen \left( \frac{1}{2 \cos(\varphi/2)} \right)$   
 $\text{sen} \left( \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\overline{P_1P_2}}{2PQ}$ ;  $\cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{4PQ^2 - \overline{P_1P_2}^2}{4PQ^2}} = \frac{1}{2PQ} \sqrt{4PQ^2 - \overline{P_1P_2}^2}$   
per cui:

$$\hat{D}_{QP} = 2 \arcsen \left( \frac{\overline{P_1P_2}}{\sqrt{4PQ^2 - \overline{P_1P_2}^2}} \right)$$

si può anche scrivere:

$$\hat{D}_{QP} = 2 \arcsen \left( \frac{1}{2 \sqrt{1 - \left( \frac{\overline{P_1P_2}}{2PQ} \right)^2}} \right) \quad \text{Diedro sullo spigolo } \overline{QP}$$

Negli altri vertici concorrono quattro facce, per cui avremo: nel vertice P;

$\hat{D}_{PQ_1} = \hat{D}_{QP_1}$  (diedro che abbiamo già calcolato) (2 in P)

$\hat{D}_{PA} = \hat{D}_{AP_1}$ ; e  $\hat{D}_{PB} = \hat{D}_{BP_1} = \hat{D}_{AP_2}$

Nel vertice A abbiamo 4 diedri; due uguali a  $\hat{D}_{AP_2}$  e due uguali a  $\hat{D}_{AP_1}$ , che restano da calcolare.

Consideriamo quindi il triangolo  $AP_2P_1$  e cerchiamo di calcolare l'angolo diedro sullo spigolo  $l_2 = \overline{AP_2}$ .

Del piano  $AP_2QP$ , conosciamo l'equazione, che possiamo scrivere:

$$\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)x + \left(\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)y + z - 1 = 0$$

da esso possiamo ricavare le espressioni dei coseni direttori della retta di giacitura del piano. (coseni che abbiamo, numericamente, già calcolato e tabulato)

Indichiamo con:  $\Delta = \sqrt{2(1-\cos^3\alpha - \sin^3\alpha) - \sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

avremo:

$$\cos(NX) = \frac{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{\Delta}$$

$$\cos(NY) = \frac{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{\Delta}$$

$$\cos(NZ) = \frac{(\sin\alpha\cos\alpha)}{\Delta}$$

Se consideriamo il piano della faccia  $AP_2P_4$  (vedi fig.) abbiamo  $A \equiv (0,0,1)$ ;  $P_2 \equiv (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ ;  $P_4 \equiv (0, -\cos\alpha, \sin\alpha)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = -\sin\alpha\cos\alpha; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cos\alpha \\ 1 & -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha(\cos\alpha - 1);$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ 0 & 1 & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha(1-\sin\alpha); \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\alpha & 0 & 1 \\ 0 & -\cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = -\sin\alpha\cos\alpha$$

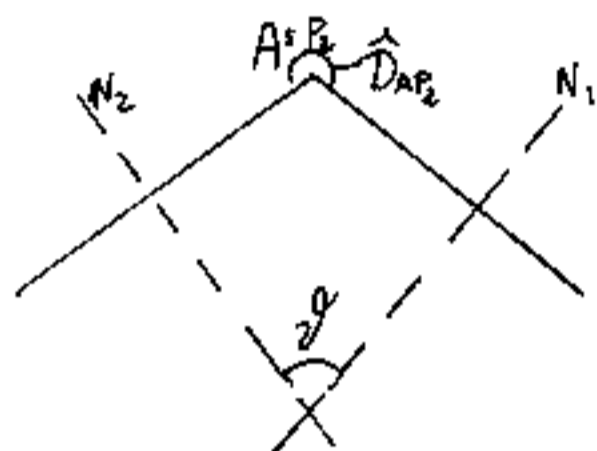
$$\frac{a'}{d} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \frac{b'}{d} = \frac{\sin\alpha-1}{\cos\alpha}; \quad \frac{c'}{d} = +1$$

l'equazione del piano sarà quindi:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} x - \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} y + z - 1 = 0$$

che differisce solo nel segno della  $y$  dall'altra equazione.

Premesso che l'angolo diedro su  $\overline{AP_2}$  cioè:  $\hat{D}_{AP_2}$  equivale all'angolo  $\gamma$  delle normali (rette di giacitura) ma è



giocato di un piatto:  $\hat{D}_{AP_2} = \gamma + 180^\circ$   
ricordando che l'angolo di due rette nello spazio tridimensionale è dato da:

$$\cos(\hat{e}, \hat{r}_i) = \cos(\hat{r}_i, x) \cos(\hat{e}, x) + \cos(\hat{r}_i, y) \cos(\hat{e}, y) + \cos(\hat{r}_i, z) \cos(\hat{e}, z)$$

cioè dalla somma dei prodotti dei corrispondenti coseni direttori, nel nostro caso abbiamo:

$$\hat{D}_{AP_2} = 180^\circ + \arccos \left[ \frac{\cos^2 \alpha (1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha (1 - \sin \alpha)(\sin \alpha - 1) + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \right]$$

$$\hat{D}_{AP_2} = 180^\circ + \arccos \left[ \frac{\cos^2 \alpha (1 - \sin \alpha)^2 - \sin^2 \alpha (1 - \sin \alpha)^2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\Delta^2} \right]$$

Per calcolare l'angolo diedro sullo spigolo  $\overline{AP_1} = l_1$ , il vertice  $P_1$  della faccia adiacente è sulle  $x$  negative, per cui l'equazione dell'angolo diedro dovrà essere:

$$\hat{D}_{AP_1} = 180^\circ + \arccos \left[ \frac{-\cos^2 (1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha (1 - \sin \alpha)^2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\Delta^2} \right]$$

Per calcolare  $\hat{D}_{AP_2}$  si può impostare il discorso in modo forse più semplice. Poiché:  $\overline{P_1P_4} = 2l_3 \cos \alpha$ , e poiché le aree dei triangoli:  $AP_1P_2$  ed  $AP_4P_2$  sono uguali, anche le altezze rispetto al lato comune  $\overline{AP_2}$  sono uguali

$$h_{\overline{AP_2}} = \frac{2S_{AP_1P_2}}{\overline{AP_2}} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) (\overline{AP_1}) (\overline{AP_2}) \operatorname{sen}(\widehat{P_2AP_1})}{\overline{AP_2}} = \overline{AP_1} \operatorname{sen}(\hat{A})$$

(ove:  $\hat{A} = \widehat{P_2AP_1} = \widehat{P_2AP_4} = \dots$ ) per cui:

$$\hat{D}_{AP_2} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{\overline{P_1P_4}/2}{h_{\overline{AP_2}}} \right) = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{\frac{2}{2} l_3 \cos \alpha}{\overline{AP_1} \operatorname{sen} \hat{A}} \right)$$

$$\overline{AP_1} = l_1$$

$$\boxed{\hat{D}_{AP_2} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{l_3 \cos \alpha}{l_1 \operatorname{sen} \hat{A}} \right)}$$

Formula abbastanza sintetica ove essendo noti:  $l_1/l_3$ , e  $\operatorname{sen} \hat{A}$  risulta facilmente calcolabile  $\hat{D}_{AP_2}$  in funzione di  $\alpha$ .

$$\text{Sostituendo abbiamo: } l_1 = l_3 \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

$$\cos(\widehat{P_2AP_1}) = \cos \hat{A} = \left( \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right); \operatorname{sen} \hat{A} = \sqrt{\frac{2 - \operatorname{sen}^2(\alpha/2) \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right)^2}{2}}$$

$$\hat{D}_{AP_2} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{\cos \alpha}{\left( \cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) \sqrt{2 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right)^2}} \right)$$

$$\text{ma: } \boxed{\left( \cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} \alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)}$$

$$\hat{D}_{AP_2} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{\cos \alpha}{\left( \sqrt{1 - \operatorname{sen} \alpha} \right) \left( \sqrt{2 - \frac{1 - \cos \alpha}{2}} \right) (1 - \operatorname{sen} \alpha)} \right)$$

$$\hat{D}_{AP_2} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{2 - (1 - \cos \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha)}} \right)$$

$$\boxed{\hat{D}_{AP_2} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \sqrt{\frac{2(1 + \operatorname{sen} \alpha)}{4 - (1 - \cos \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha)}} \right)}$$

(equazione in funzione di  $\alpha$ )

Per lo stesso ragionamento il diedro su  $AP_1$  sarà:

$$\hat{D}_{AP_1} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{l_1 \operatorname{sen} \alpha}{l_2 \operatorname{sen} \hat{A}} \right)$$

$$P_1 P_2 = 2l_1 \operatorname{sen} \alpha; \quad l_2 = l_1 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}; \quad \operatorname{sen} \hat{A} = \sqrt{\frac{2 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})^2}{2}}$$

sostituendo:

$$\hat{D}_{AP_1} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})^2}{2}}}} \right)$$

$$\hat{D}_{AP_1} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{\sqrt{2} \cos(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{2 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})^2}} \right)$$

$$\hat{D}_{AP_1} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \sqrt{\frac{2(1 + \cos \alpha)}{4 - (1 - \cos \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha)}} \right) \quad \text{(equazione in funzione di } \alpha \text{)}$$

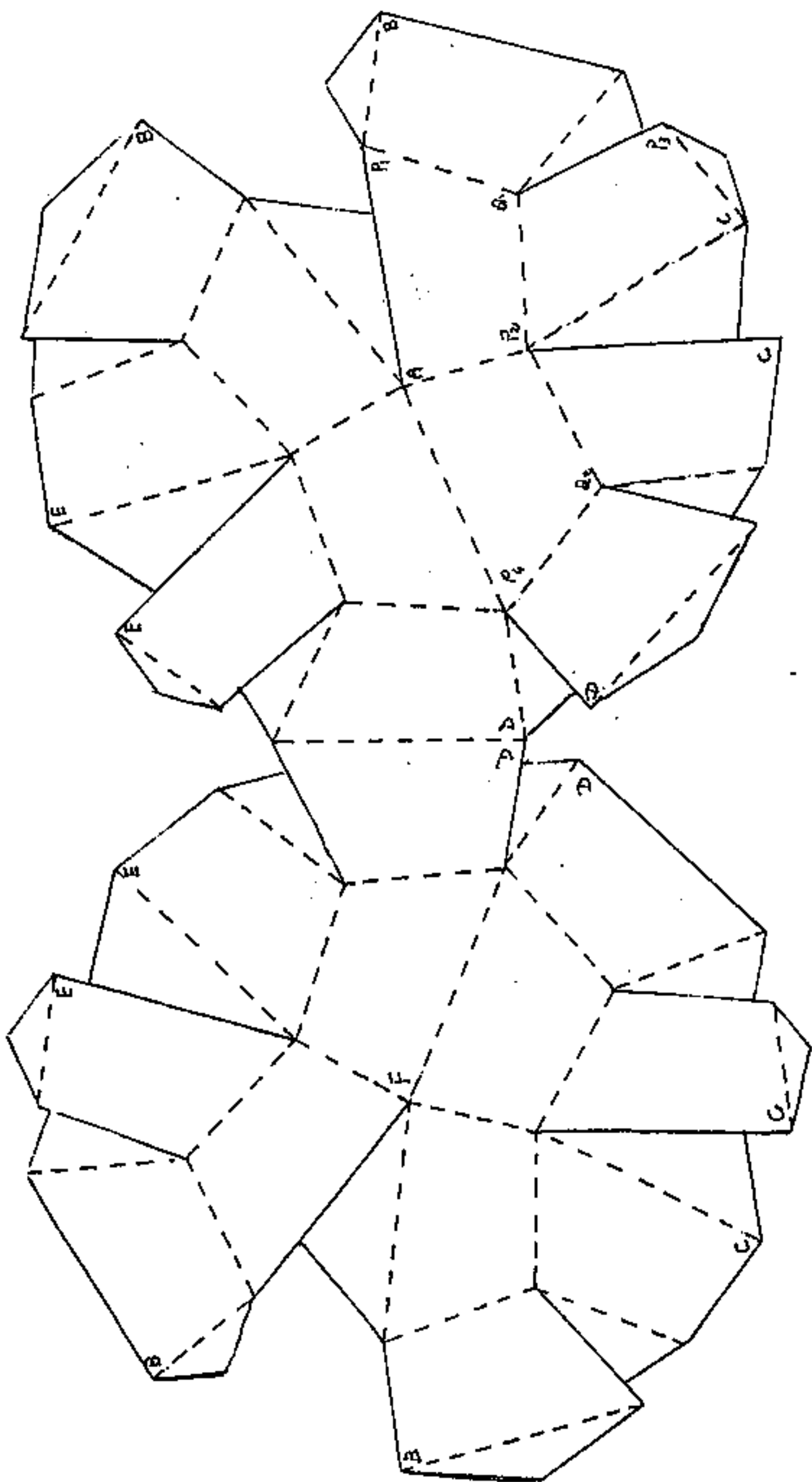
$$\hat{D}_{QP} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{1}{2 \sqrt{1 - \left( \frac{P_1 P_2}{2QP} \right)^2}} \right) \quad \text{(già trovata)}$$

poiché:  $P_1 P_2 = l_1 \sqrt{2 - \operatorname{sen} 2\alpha}$ ;  $\left( \frac{P_1 P_2}{2QP} \right) = \operatorname{sen} \frac{\hat{P}_2 Q P_1}{2} = \operatorname{sen} \frac{\hat{Q}}{2}$

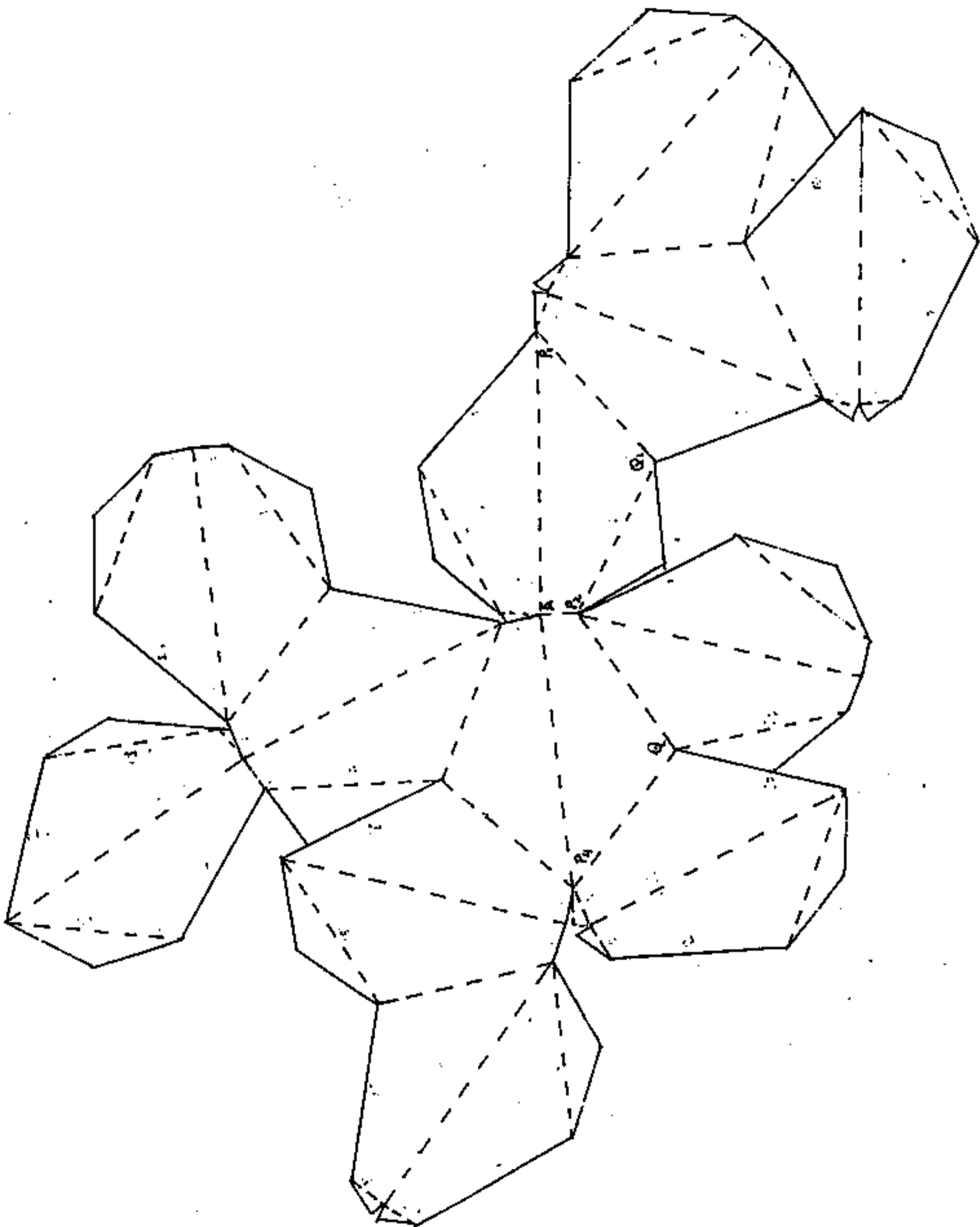
$$\hat{D}_{QP} = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{1}{2 \cos \frac{\hat{Q}}{2}} \right)$$

$\alpha$	$\hat{D}_{QP}$ ( $l_1$ )	$\hat{D}_{AP_2}$ ( $l_2$ )	$\hat{D}_{AP_1}$ ( $l_1$ )	NOTE
$0^\circ$	-	-	-	
$10^\circ$	$125^\circ 44' 47''_{,386}$	$100^\circ 12' 54''$	$172^\circ 19' 54''$	
$15^\circ$	$128^\circ 30' 27''_{,036}$	$105^\circ 28' 30''$	$168^\circ 04' 28''$	
$30^\circ$	$135^\circ 22' 17''_{,716}$	$121^\circ 42' 19''$	$153^\circ 52' 17''$	
$45^\circ$	$138^\circ 07' 04''_{,653}$	$138^\circ 07' 05''$	$138^\circ 07' 05''$	(trapezoido)
$60^\circ$	$135^\circ 22' 17''_{,746}$	$153^\circ 52' 17''$	$121^\circ 42' 19''$	
$75^\circ$	$128^\circ 30' 27''_{,036}$	$168^\circ 04' 28''$	$105^\circ 28' 30''$	
$90^\circ$	-	-	-	

sviluppo di Diaisdodecaedro  $\alpha=30^\circ$

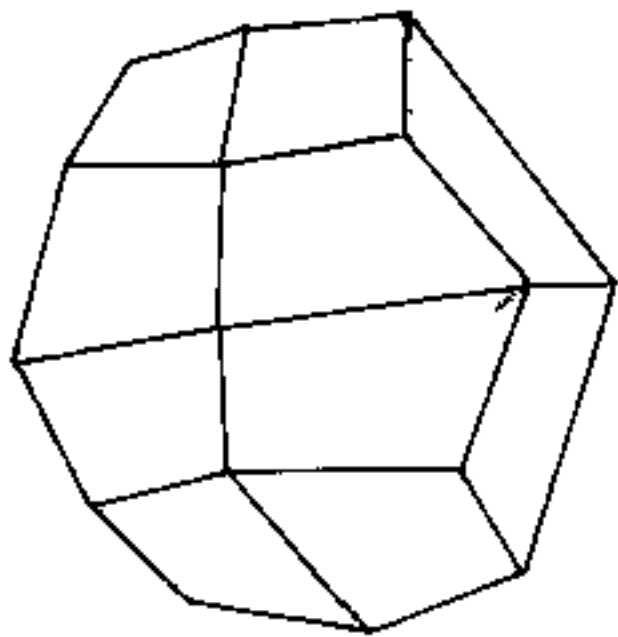


sviluppo di Diaisdodecaedro (o diploide)  
 parametro di individuazione  $\alpha = 10^\circ$   
 lati  $l_2 = 0,6162841689$ ,  $l_1 = 4,545194775$ ,  $Q_1 = Q_2 = 2,75147098$   
 spigolo dell'ottaedro base = em. 5;  $S_2 = 3,535513906$



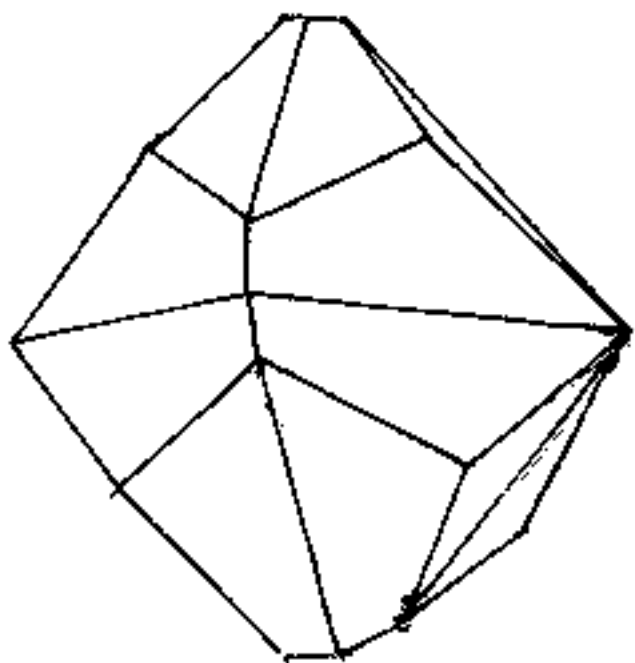
diamo un abbozzo prospettico di due solidi diacisdodecaedri, individuati dai parametri:  $\alpha = 30^\circ$  ed  $\alpha = 10^\circ$ , dei quali abbiamo dato anche lo sviluppo. Per l'angolo limite  $\alpha = 45^\circ$  il solido diventa un trapezoedro.

(vedasi anche quanto esposto per il solido: pentagonododecaedro - (tetartoedro)



diacisdodecaedro diploide

$$\alpha = 30^\circ$$



diacisdodecaedro diploide

$$\alpha = 10^\circ$$



# L'ICOSITETRAEDRO pentagonale

24 facce pentagonali, 30 vertici, 30 spigoli

Consideriamo un cubo ed un ottaedro aventi lo stesso

centro e riferiti agli stessi assi passanti

per i vertici dell'ottraedro e per i

centro faccia del

cubo. Siano  $ox, yz$

tali assi, e siano:

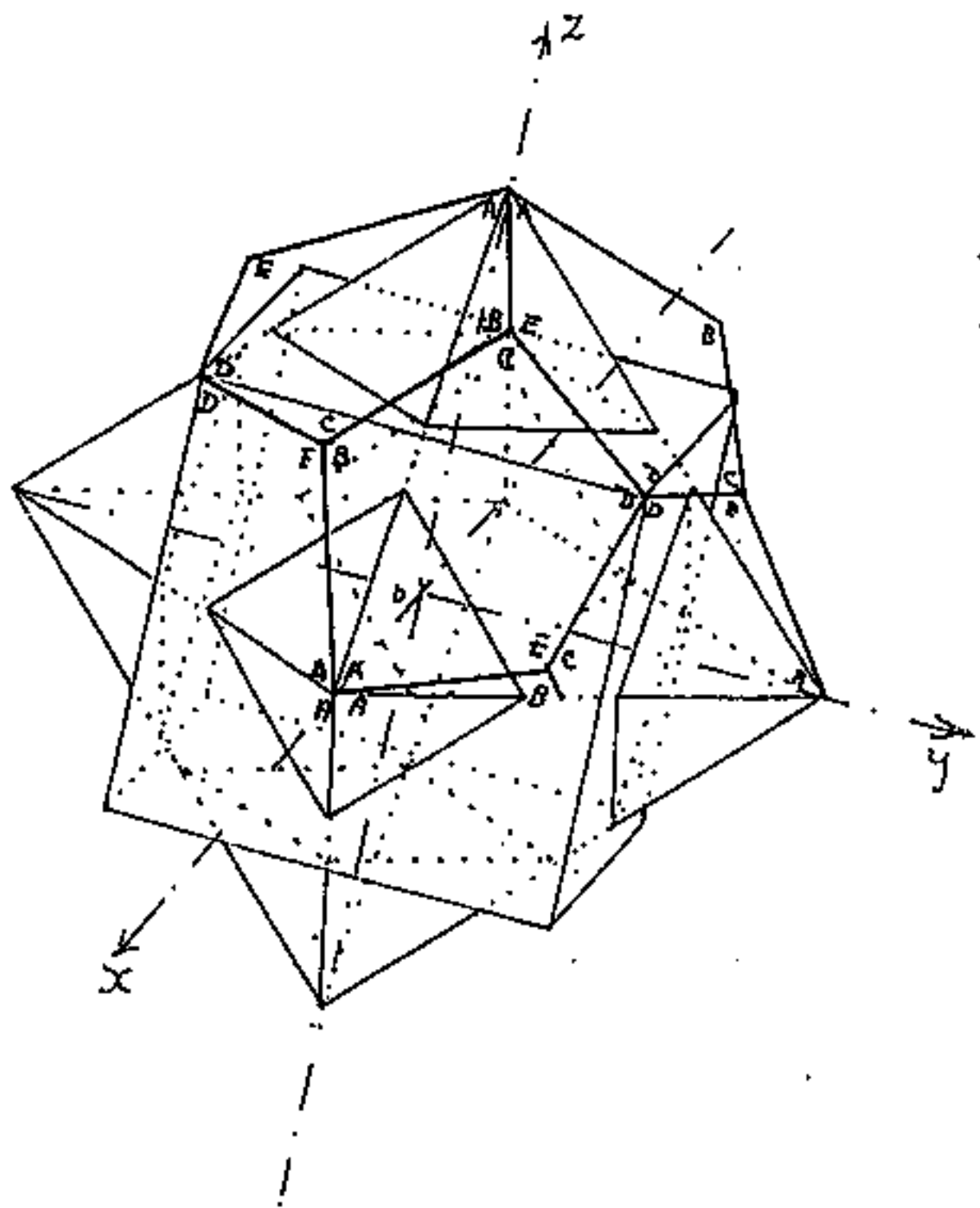
$A, B, C, D, E$ , i vertici di una faccia

generica dell'icositetraedro pentagonale, ove i vertici  $A$

corrispondono ai vertici dell'ottraedro, mentre i vertici

$D$  corrispondono ai vertici del cubo. I vertici  $A$  sono comuni a quattro facce, come nell'ottraedro; i vertici  $B$  sono comuni a tre facce come nel cubo; però la giacitura delle facce dell'icositetraedro pentagonale non corrisponde alla giacitura delle facce del cubo o dell'ottraedro.

In cristallografia, il solido icositetraedro del gruppo monometrico, sistema cubico, è la forma della classe "giraedrica", detta anche: "classe pentagonoicositetraedrica".



Gli elementi di simmetria di questa classe sono: quattro assi ternari, tre assi quaternari, sei assi binari; in simboli:  $(3A_4, 4A_3, 6A_2)$ .

Noi consideriamo: Assi quaternari, i tre assi  $x, y, z$ , cioè vuol dire che i vertici  $A$  e le facce che hanno in comune  $A$  e tutte le altre facce si sovrappongono ogni quarto di giro per rotazione intorno a tali assi.

Consideriamo: Assi ternari, i quattro assi che si ottengono dalle diagonali interne del cubo; tali assi uniscono due vertici  $D$ . Nella rotazione ogni terzo di giro si sovrappone un vertice  $D$  e tutta la configurazione. Occorre però notare che preso un asse  $\overline{DD}$  gli altri 6 punti  $D$  si trovano disposti in modo tale che ogni sesto di giro si sovrappongono alternativamente; cioè, al primo  $\frac{1}{6}$  di giro si presenta il  $D$  più in alto, (se inizialmente si presentava il  $D$  più in basso). Dopo un altro  $\frac{1}{6}$  giro ritorna il  $D$  più basso che si sovrappone all'originario dopo  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$  di giro. Dopo un altro  $\frac{1}{6}$  di giro si ripresenta il  $D$  più alto che si sovrappone a quello che avevamo notato anche questo dopo  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$  e così via.

Considereremo "Assi binari" i sei assi che si ottengono unendo i punti medi degli spigoli opposti del cubo, o dell'ottaedro, ruotando intorno a questi assi il solido si sovrappone a se stesso ogni mezzo giro.

Il solido non presenta piani di simmetria.

Se perpendicolarmente agli assi binari facciamo passare dei segmenti bisecati dall'asse binario e ruotati di  $\varphi$  rispetto alla direzione dei rispettivi spigoli del cubo, avremo che gli estremi di tali segmenti sono i vertici in cui coincidono B, C, E di tre facce. Avviene che se la ruotazione è oraria (o antioraria) la distinzione dei vertici delle facce è scritta ABCDE in sequenza antioraria (od oraria). Si hanno così due tipi di icositetraedri pentagonali detti rispettivamente sinistri e destri e non sono sovrapponibili.

Al simbolo di faccia  $\{khl\}$  del destro corrisponde il simbolo di faccia  $\{\bar{k}\bar{h}\bar{l}\}$  del sinistro.

Unendo i punti medi degli spigoli opposti dell'ottaedro, si ottengono gli stessi assi binari.

Cerchiamo ora di determinare la posizione mutua dei vertici; vediamo quali elementi determinano le facce pentagonali (che debbono essere uguali).

Per definire un pentagono occorrono sette elementi opportuni e indipendenti fra loro. La somma dei cinque angoli interni è  $540^\circ$ , perciò il quinto angolo non è indipendente, e l'indipendenza degli altri quattro è limitata dal dover essere minori di  $180^\circ$ , e che la loro somma sia superiore a  $360^\circ$  ma inferiore a  $540^\circ$ , poiché dei sette elementi almeno uno è una misura lineare, occorrono sei angoli per determinare pentagoni simili e saranno presi fra lati e diagonali, poiché fra solo lati possono essere solo quattro indipendenti. Occorre che le terne di tre angoli non si riferiscano a maglie triangolari di vertici. Ciò premesso, attribuito il valore  $s$  ad un lato, è possibile determinare tutte le altre misure lineari in funzione di  $s$  e dei sei angoli (opportuni).

Nel caso del nostro solido, vi sono però delle condizioni iniziali che riducono il grado di arbitrarietà nella definizione delle facce pentagonali  $ABCDE$ . Abbiamo infatti, se  $A$  è il vertice comune a 4 facce, (cioè i vertici  $A$  corrispondono ai vertici di un ottaedro) che  $\overline{AE} = \overline{AB}$ . Analogamente i vertici  $D$  comuni a tre facce implicano  $\overline{ED} = \overline{DC}$ .

Attribuito il valore  $s$  ad  $\overline{AE} = \overline{AB}$  ed il valore  $x$  ad  $\overline{ED} = \overline{DC}$ , ove:  $x = Ks$ , restano da determinare il coeff.  $K$ , il lato  $\overline{BC}$  e due angoli o due diagonali.

Vi sono poi grandezze limite, per esempio, posto:  $\alpha = \widehat{EAB}$  avremo:  $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ , perché per  $\alpha = 60^\circ$  si ha l'ottaedro, per  $\alpha = 90^\circ$  le quattro facce aventi in comune  $A$  sono complanari.

Analogamente per l'angolo  $\widehat{EDC} = \delta$ , dovrà essere  $90^\circ < \delta < 120^\circ$ , per  $\delta = 90^\circ$  si ha il vertice del cubo; per  $\delta = 120^\circ$  le tre facce aventi in comune  $D$  sono complanari.

Introduciamo ora le condizioni arbitrarie.

1) Imponiamo che l'angolo diedro sugli spigoli uscenti da  $A$ , sia uguale all'angolo diedro sugli spigoli uscenti da  $D$ ; cioè:  $\widehat{D}_A = \widehat{D}_D$ . (Solido a diedri uguali).

Calcoliamo i due diedri in funzione dell'angolo delle facce.

$$\text{sia: } s = \overline{AE} = \overline{AB} \quad h = s \operatorname{sen}(\alpha)$$

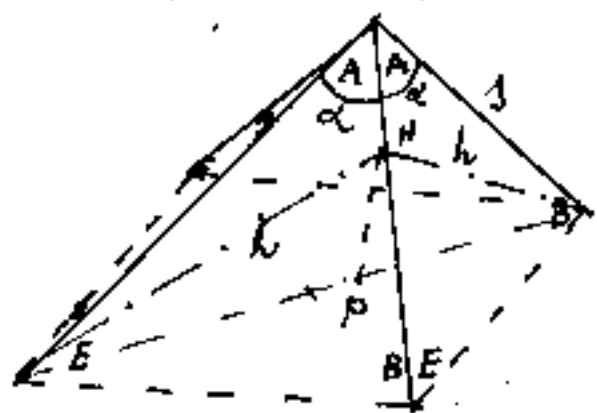
$$\overline{EB} = 2s \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

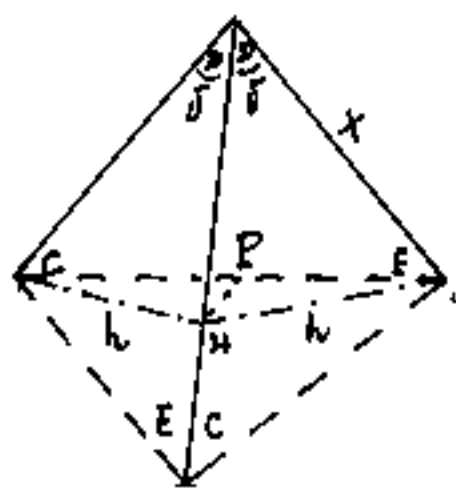
$$\overline{EP} = \overline{PB} = \overline{EB} / \sqrt{2} = \sqrt{2} s \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\widehat{D}_A / 2) = \overline{PB} / h = \frac{\sqrt{2} s \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{s \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\widehat{D}_A = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$\boxed{\widehat{D}_A = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \right)}$$





$$x = \overline{DE} = \overline{DC}; \quad h = x \operatorname{sen} \delta;$$

$$\overline{EC} = 2x \operatorname{sen}(\delta/2); \quad \overline{EP} = x \operatorname{sen}(\delta/2);$$

$$\operatorname{sen}(\hat{D}_D/2) = \frac{\overline{EP}}{h} = \frac{x \operatorname{sen}(\delta/2)}{x \operatorname{sen}(\delta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\delta/2)}{2 \operatorname{sen}(\delta/2) \cos(\delta/2)}$$

$$\hat{D}_D = 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{1}{2 \cos(\delta/2)} \right) = \hat{D}_{EB} \left( \frac{\operatorname{sen} \delta}{\delta} \right)$$

$$\hat{D}_A = \hat{D}_D \quad \text{da cui:} \quad \sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

2) Imponiamo che anche:  $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = x$

3) Imponiamo che:  $\hat{ABC} = \hat{BCD} = \hat{CDE} = \hat{DEA}$

$$\text{Avremo che:} \quad \delta = \frac{540^\circ - \alpha}{4} = \left(135^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$$

sostituendo  $\delta/2 = (67.5 - \frac{\alpha}{8})$  si ha:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} \cos \left(67.5 - \frac{\alpha}{8}\right)$$

equazione che risulta soddisfatta per  $\alpha = 80^\circ, 7517021$

$$\alpha = 80^\circ 45' 06'', 13$$

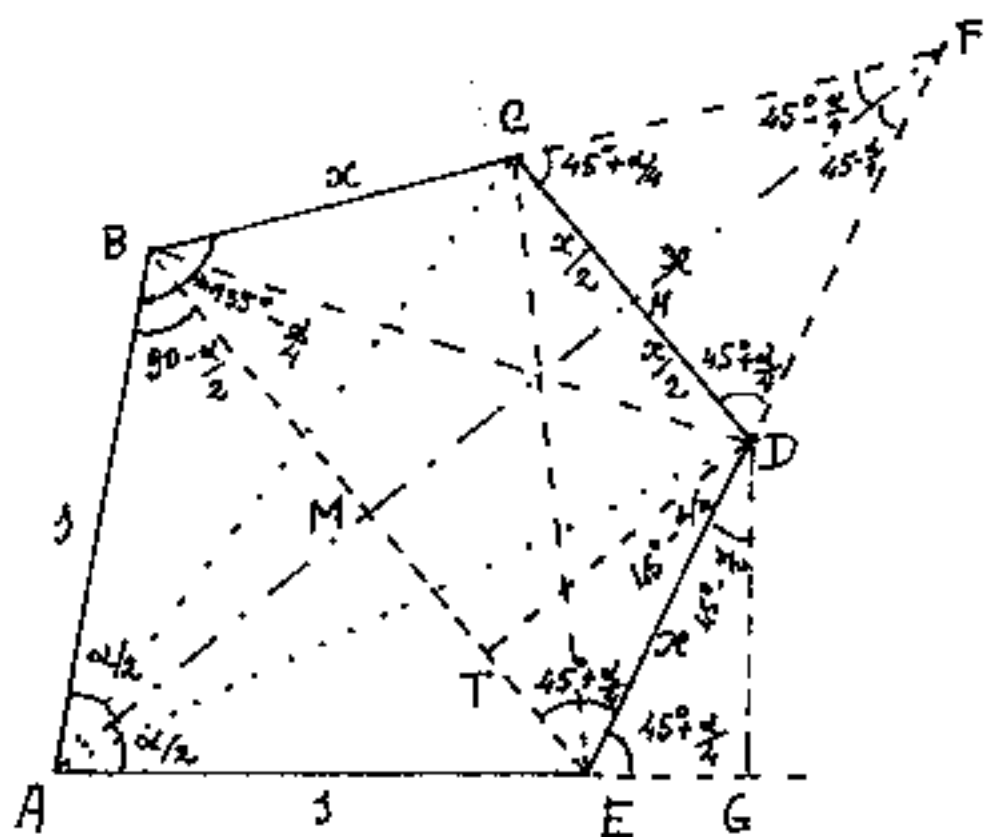
da cui:

$$\delta = 114^\circ, 8120745$$

$$\delta = 114^\circ 48' 43'', 4$$

Possiamo così disegnare la configurazione di una faccia (simile) e calcolare le correlazioni fra gli elementi lineari.

Tracciamo l'angolo in  $A = \alpha = 80^\circ 45' 06''_{13}$ ,  
 e stacciamo i due segmenti:  $\overline{AB} = \overline{AE} = s$ , e nei  
 vertici  $B$  ed  $E$  tracciamo l'angolo  $\delta = 114^\circ 48' 43''_4$   
 determiniamo così il punto  $F$ . Resta da tracciare la base



del pentagono  $x = \overline{CD} = \overline{BC} = \overline{DE}$ . Sappiamo  
 che tale base è pa-  
 rallela a  $\overline{BE}$ , che gli  
 angoli:  $\widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \delta$ .  
 Prendiamo su  $\overline{BE}$   
 il segmento  $\overline{BT} = s$   
 e da  $T$  la perpendi-

colare ad  $\overline{EB}$  fino a determinare  $D$ , da  $D$  la pa-  
 rallela a  $\overline{BE}$  fino a  $C$  su  $\overline{BF}$ . Dimostriamo ora di  
 aver tracciato il pentagono faccia dell'icositetraedro.

$$\boxed{\widehat{TED}} = (\widehat{AED} - \widehat{AEB}) = \left( (135^\circ - \frac{\alpha}{4}) - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) \right) = \boxed{45^\circ + \frac{\alpha}{4}} = \widehat{HDF} = \widehat{HCF}$$

notiamo che:  $(180^\circ - (45^\circ + \frac{\alpha}{4})) = (135^\circ - \frac{\alpha}{4}) = \widehat{AED}$ , per cui se da  $D$   
 tracciamo la perpendicolare ad  $AE$  fino a  $G$  ottenia-  
 mo che i triangoli  $DTE$  e  $DGE$  sono uguali:  $\widehat{DEG} = \widehat{DET}$ ,

$$\text{l'angolo: } \boxed{\widehat{TDE}} = 90^\circ - \widehat{TED} = (90^\circ - (45^\circ + \frac{\alpha}{4})) = \widehat{EDG} = \widehat{DFH} = \widehat{CFH} = \boxed{45^\circ - \frac{\alpha}{4}}$$

Sia  $M$  il punto medio di  $\overline{EB}$  per cui:

$$\overline{ME} = \overline{MB} = s \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{x}{2} = (\overline{ME} - \overline{TE}) = \left( (s \sin \frac{\alpha}{2}) - (x \sin (45^\circ - \frac{\alpha}{4})) \right) =$$

$$\frac{x}{2} = \left( 1 \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} \right) - \frac{x}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\alpha}{4} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{4} \right)$$

$$x \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{4} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{4} \right) \right) = 1 \cdot 2 \left( \operatorname{sen} \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} \right)$$

$$x = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}}{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{2} \left( \cos \frac{\alpha}{4} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{4} \right) \right)} ; \sqrt{\left( \cos \frac{\alpha}{4} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{4} \right)^2} = \sqrt{1 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} ;$$

$$x = 1 \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{1 + \sqrt{2} (1 - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})}$$

Se  $\overline{BT} = 1$  ;  $\overline{TE} = (\overline{BE} - \overline{BT}) = 1 \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} - 1 = 1 \left( 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} - 1 \right)$

$$\frac{x}{2} = \overline{MT} = (\overline{ME} - \overline{TE}) = \left( 1 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right) - \left( 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} - 1 \right) = (1 - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}) \cdot 1$$

$$x = 1 \cdot 2 \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right)$$

Entrambe le espressioni della  $x$  danno:

$$x = 1 \cdot (0,7044022574779156)$$

uguagliando le due espressioni si ha:

$$\left( 1 - \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right)}{1 + \sqrt{2} (1 - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})}$$

da cui:

$$\sqrt{2} (1 - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} - 1$$

elevando a quadrato, sviluppando e semplificando

otteniamo:

$$\operatorname{sen}^3 \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2} = 0$$

equazione di terzo grado che fornisce una sola radice

reale:  $\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = 0,6477988712610424 = \overline{BM} / 1$

$$\alpha = 80^{\circ}, 75170208839224$$

$$\alpha = 80^{\circ} 45' 06", 1275182$$



Cio' implica che non è possibile passare da una all'altra espressione della  $x$  con semplici passaggi trigonometrici; ma la loro uguaglianza è condizionata dal fatto che  $\alpha$  abbia quel certo valore che abbiamo calcolato, e l'uguaglianza non è più valida per valori di  $\alpha$  diversi da quello calcolato.

Ma anche  $\alpha$  ha lo stesso valore da due formule apparentemente diverse vediamo, se possibile di confrontarle:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2} \cos\frac{1}{2}\left(135^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \cos(135^\circ - \frac{\alpha}{4})}{2}}$$

eleviamo a quadrato (si aggiunge una radice)

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\left(135^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{1}{2}\left(270^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(270^\circ - \frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$\text{ma: } \cos\left(270^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - 1 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{2}}$$

elevando di nuovo a quadrato:

$$\boxed{\sin^4\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} = 0}$$

equazione di quarto grado che ha due radici reali:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = -90^\circ = 270^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha = 540^\circ$$

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = 0,6477988712610424} \quad (\text{identica alla radice reale di 3° grado})$$

confrontando le due equazioni (espressioni in  $\sin(\frac{\alpha}{2})$  uguali ad  $(\frac{1}{2})$ ).

$$\sin^4 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \sin^3 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}$$

semplificando e dividendo per  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , torna:

$$\boxed{\sin^3 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} = 0}$$

che è l'equazione di terzo grado; ciò vuol dire che dividendo per  $\sin(\frac{\alpha}{2})$ , togliamo la radice  $\sin \frac{\alpha}{2} = 0$ , e che le due espressioni sono confrontabili come uguali solo per il valore calcolato di  $\alpha$ . Notiamo che anche la coppia di radici immaginarie sono uguali nelle due equazioni, cioè le quattro radici dell'equazione di quarto grado sono:

$$x_1 = 0,1761005643694788 + i \cdot 0,8607166186235684$$

$$x_2 = 0,1761005643694788 - i \cdot 0,8607166186235684$$

$$\underline{x_3 = 0,6477988712610424 = \sin(\frac{\alpha}{2})}$$

$$x_4 = -1$$

nell'equazione di terzo grado le radici sono identiche, manca:  $x_4 = -1$  e rappresentano  $\sin(\frac{\alpha}{2})$ .

Diamo ora una tabella degli angoli della faccia e le loro funzioni trigonometriche.

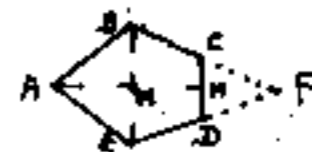
Ricordiamo l'uguaglianza dei triangoli:  $\triangle DTE$  e  $\triangle DGE$  per

$$\text{cui } \hat{DAG} = \hat{DAE} = \hat{CAB} = \arctg\left(\frac{\overline{DG}}{\overline{AG}}\right) = \arctg\left(\frac{\overline{TD}}{\overline{BE}}\right) = \arctg\left(\frac{x \sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2})}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\hat{DAE} = 0,4584345598885086 \text{ rad} = 26^\circ,26636545454887.$$

Pentagono irregolare - faccia dell'icositetraedropentagonale

Tabella di funzioni angolari



Angolo	radianti	sessadecimali	sessagesimali	1/n di giro	seno	coseno	tangente
$\widehat{BAE} = \alpha$	1,409383078	80°, 75170208	80° 45' 06", 1275	1/4, 458110364	0,987001141	0,160713244	6,141380206
$\widehat{BAH} = \widehat{EAH} = \alpha/2$	0,704691539	40°, 37585104	40° 22' 33", 0637	1/8, 916220728	0,647798871	0,761811408	0,850340207
$\alpha/4$	0,352345769	20°, 18792552	20° 11' 16", 53	1/17, 83244146	0,345100413	0,938565769	0,367689111
$\widehat{ABB} = \widehat{AEB} = 90^\circ - \alpha/2$	0,8661047878	49°, 62414896	49° 37' 26", 94	1/1, 254532472	0,7618114086	0,647798871	1,175999901
$\widehat{BAC} = \widehat{AED} = \beta = 135^\circ - \alpha/4$	2,003848721	114°, 8120745	114° 48' 43", 4	1/3, 135558708	0,907689063	-0,419643378	-2,16300104
$\widehat{EDF} = \widehat{HFC} = \widehat{HFD} = 45^\circ - \alpha/4$	0,433052393	24°, 81207448	24° 48' 43", 47	1/4, 50906494	0,419643377	0,907689063	0,462320627
$\widehat{ECF} = \widehat{CDF} = 45^\circ + \alpha/4$	1,137743933	65°, 18792552	65° 11' 16", 53	1/5, 522495111	0,907689063	0,419643377	2,163001042
$\widehat{EBD} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2}(45^\circ + \alpha/4)$	0,568871966	32°, 59396276	32° 35' 38", 27	1/11, 04499022	0,538682013	0,842509162	0,639378225
$\widehat{CAB} = \widehat{DAE}$	0,1458434559888	26°, 2663654645	26° 15' 58", 91547	1/13, 70574092125	0,442544847	0,89674637348	0,49350057065
$\widehat{DAC}$	0,492513958	28°, 218971159	28° 13' 08", 3	1/12, 7573751	0,472842546	0,881146937	0,536621676
$\widehat{ACD} = \widehat{ADC}$	1,324539348	75°, 89051442	75° 53' 25", 85	1/4, 743675843	0,96983167	0,243775575	3,978379169
$\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$	0,679309372	98°, 921560057	38° 55' 17", 62	1/9, 249372315	0,628255861	0,778006794	0,807519761

calcoliamo ora le correlazioni fra gli elementi di una faccia: abbiamo già calcolato:  $x = s \cdot 2(1 - \sin \frac{\alpha}{2})$

$$s = \frac{x}{2} \frac{1}{(1 - \sin \frac{\alpha}{2})} = \frac{x(1 + \sin \frac{\alpha}{2})}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \boxed{s = x(1,419643379)} = \overline{AB} = \overline{AE}$$

$$\boxed{x = s(0,7044022574)} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = (\text{lati})$$

$$\boxed{\overline{BE}} = \overline{AG} = 2\overline{EM} = 2s \sin \frac{\alpha}{2} = 2s \cdot 0,647798871 = \boxed{s(1,295597742)}$$

$$\boxed{\overline{BM}} = \overline{EM} = \boxed{s(0,647798871)} = (\text{semidiagonale})$$

$$\boxed{\overline{AM}} = s \cos \frac{\alpha}{2} = \boxed{s(0,761811408)} = \overline{HF} = \frac{x}{2} (\tan(45^\circ + \frac{\alpha}{4}))$$

infatti:  $\frac{x}{2} \tan(45^\circ + \frac{\alpha}{4}) = (1 - \sin \frac{\alpha}{2})s \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{4}}{1 - \tan \frac{\alpha}{4}} = s(1 - \sin \frac{\alpha}{2}) \frac{\cos \frac{\alpha}{4} + \sin \frac{\alpha}{4}}{\cos \frac{\alpha}{4} - \sin \frac{\alpha}{4}}$

$$\overline{HF} = s(1 - \sin \frac{\alpha}{2}) \frac{(\cos \frac{\alpha}{4} + \sin \frac{\alpha}{4})^2}{(\cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{4})} = s(1 - \sin \frac{\alpha}{2}) \frac{(1 + 2\sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4})}{\cos \frac{\alpha}{2}} = s \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\overline{HF}} = \overline{AM} = s \cos \frac{\alpha}{2} = \boxed{s(0,761811408)}$$

$$\boxed{\overline{TE}} = \overline{TG} = x(\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{4})) = s \cdot 2(1 - \sin \frac{\alpha}{2})(\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{4})) = \boxed{(\overline{BE} - s)}$$

$$\boxed{\overline{TE}} = s(2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1) \quad \boxed{\overline{TE}} = s(0,295597742) \quad \boxed{\overline{TE}} = x(0,419643377)$$

$$\overline{DT} = \overline{DG} = x(\cos(45^\circ - \frac{\alpha}{4})) = \overline{TE} \tan(45^\circ + \frac{\alpha}{4}) = s(2 - 2\sin \frac{\alpha}{2})(\cos(45^\circ - \frac{\alpha}{4}))$$

$$\boxed{\overline{DT}} = s(0,639378224) = \overline{MH}; \quad \overline{AH} = \overline{MF} = \overline{AM} + \overline{MH} = (s \cos \frac{\alpha}{2} + \overline{DT})$$

$$\boxed{\overline{AH}} = s(1,401189633) = \overline{MF} = \overline{BM} \tan(45^\circ + \frac{\alpha}{4}) = s(1,401189633);$$

$$\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AG} / \cos(\widehat{EAD}) = \overline{BE} / \cos(\widehat{EAD}) = 2s \sin \frac{\alpha}{2} / \cos(\widehat{EAD})$$

$$\boxed{\overline{AC}} = \overline{AD} = s(1,444776117); \quad \boxed{\overline{MT}} = \frac{x}{2} = \boxed{s(0,352201128)}$$

$$\overline{AF} = (\overline{AM} + \overline{MF}) = (\overline{AH} + \overline{HF}) = \boxed{\overline{AF}} = s(2,163001041)$$

$$\overline{AT} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MT}^2} = s \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + (\frac{x}{2})^2} = s \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + (1 - \sin \frac{\alpha}{2})^2} = s \sqrt{1 + 1 - 2\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\overline{AT} = s \sqrt{2 - 2\sin \frac{\alpha}{2}}; \quad \boxed{\overline{AT}} = s(0,839286754); \quad \boxed{\overline{AT}} = \sqrt{s \cdot x} \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{s : \overline{AT}} = \overline{AT} : x \quad \text{medio, prop.} \quad \boxed{\overline{AT}} = \frac{x}{2 \cos(45^\circ + \frac{\alpha}{4})} = s \frac{(1 - \sin \frac{\alpha}{2})}{2 \cos(45^\circ - \frac{\alpha}{4})}$$

cioè l'angolo  $\widehat{ATM} = (45^\circ + \frac{\alpha}{4})$

$$\boxed{\overline{BD}} = \overline{CE} = 2x \cos(\frac{1}{2}(45^\circ + \frac{\alpha}{4})) = x(1,685018324) = \boxed{s(1,186930711)}$$

$$\overline{BF} = \overline{EF} = \overline{BM} / \cos(45^\circ + \alpha/4) = \boxed{1(1,543689014)}$$

$$\overline{CF} = \frac{x}{2} / \cos(45^\circ + \alpha/4) = \boxed{1(0,839286755)} \quad ; \quad (\overline{CH} = x/2)$$

$$\overline{CQ} = \frac{x}{2} / \cos\left(\frac{45^\circ + \alpha/4}{2}\right) = 1(0,352201128) / (0,842509162) =$$

$$\overline{CQ} = \boxed{1(0,418038336)} \quad \overline{QH} = \frac{x}{2} \tan\left(\frac{45^\circ + \alpha/4}{2}\right) = \boxed{\overline{QH} = 1(0,225189732)}$$

$$\overline{AQ} = \overline{AH} - \overline{HQ} \quad \boxed{\overline{AQ} = 1(1,175999901)}$$

$$\overline{BQ} = \overline{EQ} = (\overline{EC} - \overline{QC}) = \boxed{\overline{BQ} = 1(0,768892375)}$$

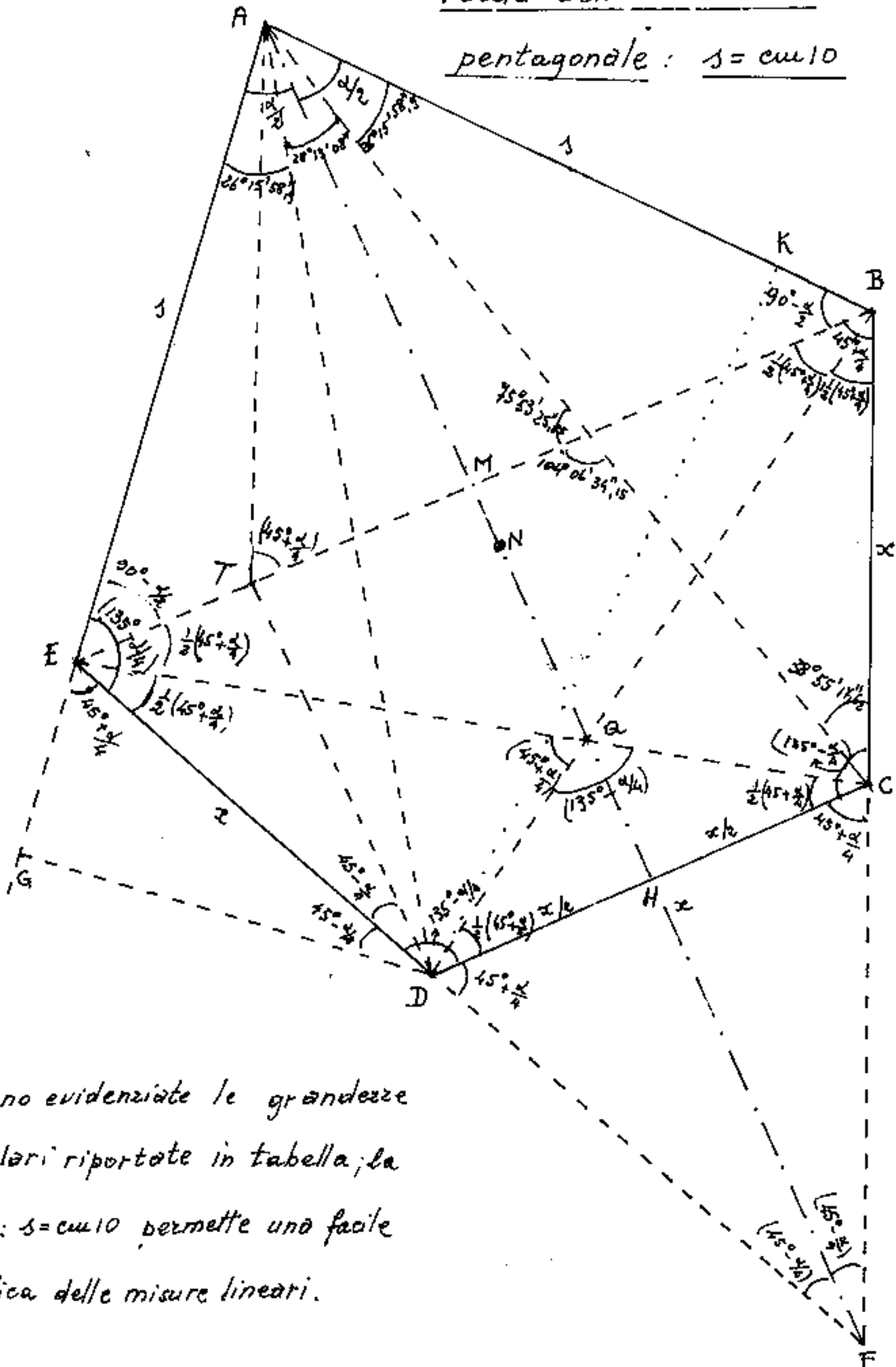
Correliamo ora gli elementi lineari del solido. Poichè il vertice "A" è comune a quattro facce adiacenti e sullo stesso vertice di ottaedro, cioè ogni vertice di ottaedro è comune al vertice A di quattro facce adiacenti indicizziamo le lettere delle facce con l'ordine in cui si è ruotato coi vertici delle facce, ed avremo:  $A_1, A_2, A_3, A_4$ ;  $B_1, B_2, \dots$  ecc.

Pero' nella proiezione del solido, per distinguere la proiezione di A da A apposteremo un apice A' specificando la posizione del piano.

Indicheremo con:  $l_0$  = spigolo dell'ottaedro;  $\rho_1 = \frac{l_0}{\sqrt{2}}$  = raggio della sfera circoscritta all'ottaedro; indicheremo con  $l_c$  = spigolo del cubo (interno, non circoscritto dalla sfera di raggio  $\rho_1$ ), avente ogni vertice comune a tre vertici "B" delle facce. (Le lettere delle facce sono già indicizzate, ma per l'ottaedro indicheremo i vertici con  $\pm x; \pm y; \pm z$ ).

Faccia dell'icositetraedro

pentagonale:  $s = cu10$



si sono evidenziate le grandezze  
angolari riportate in tabella; la  
scala:  $s = cu10$  permette una facile  
verifica delle misure lineari.

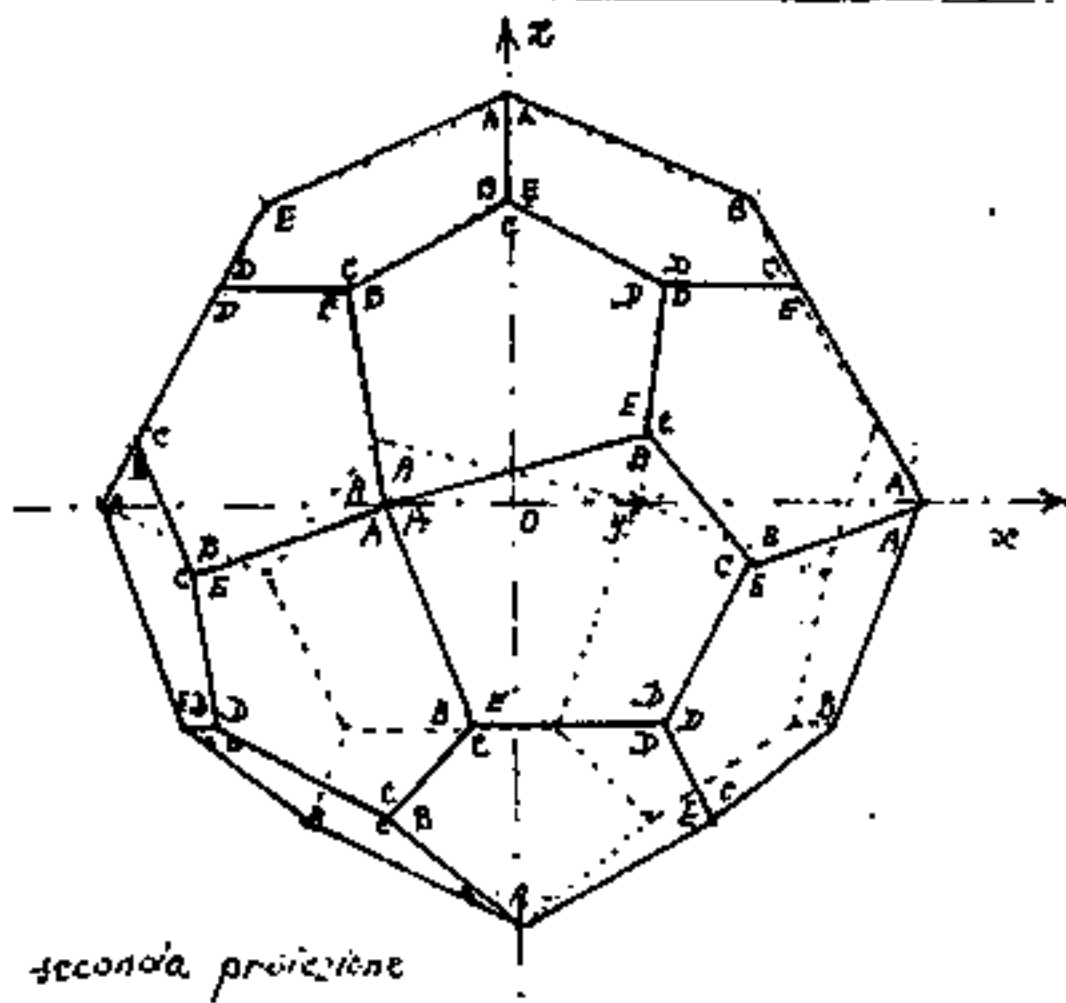
# Riepilogo alfabetico delle misure lineari della faccia

segmento	$f(s)$	$f(x)$	NOTE
$\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{BT} = s =$	1	1,419643379 x	lati
$\overline{AC} = \overline{AD} =$	1,444776117 s	2,051045629 x	
$\overline{AF} =$	2,163001041 s	3,070690107 x	
$\overline{AG} = \overline{BE} =$	1,295597742 s	1,839286756 x	<sup>BE</sup> diagonale
$\overline{AH} = \overline{FM} =$	1,401189633 s	1,989189585 x	
$\overline{AM} = \overline{FH} =$	0,761811408 s	1,081500521 x	
$\overline{AQ} =$	1,175999901 s	1,669500473 x	Vedi: $\tan(90 - \frac{\alpha}{2})$
$\overline{AT} =$	0,839286754 s	1,191487883 x	
$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = x =$	0,7044022574 s	1	lati
$\overline{BD} = \overline{CE} =$	1,186930711 s	1,685018324 x	diagonali
$\overline{BF} = \overline{EF} =$	1,543689014 s	2,191487888 x	
$\overline{BM} = \overline{EM} =$	0,647798871 s	0,919643378 x	
$\overline{BQ} = \overline{EQ} =$	0,768892375 s	1,091552969 x	
$\overline{CF} = \overline{DF} =$	0,839286755 s	1,191487883 x	Vedi $\overline{AT}$
$\overline{CH} = \overline{DH} = \overline{MT} = \frac{x}{2} =$	0,352201128 s	0,5 x	
$\overline{CQ} = \overline{DQ} =$	0,418038336 s	0,593465355 x	
$\overline{DG} = \overline{DT} = \overline{HM} =$	0,639378224 s	0,907689062 x	
$\overline{EG} = \overline{ET} =$	0,295597742 s	0,419643377 x	
$\overline{FQ} =$	0,98700114 s	1,401189633 x	
$\overline{HQ} =$	0,225189732 s	0,319689112 x	
$\overline{MQ} =$	0,414188492 s	0,587999995 x	

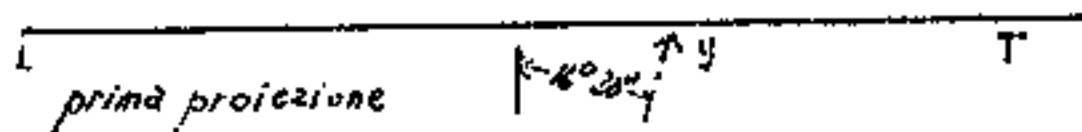
Abbiamo imposto l'uguaglianza degli angoli diedri,  $\widehat{D}_A = \widehat{D}_D$ , ma non li abbiamo calcolati

$$\boxed{\widehat{D}_A} = 2 \arcsen \left( \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \right) = \underline{136^\circ, 3092329} = \boxed{136^\circ 18' 33", 2}$$

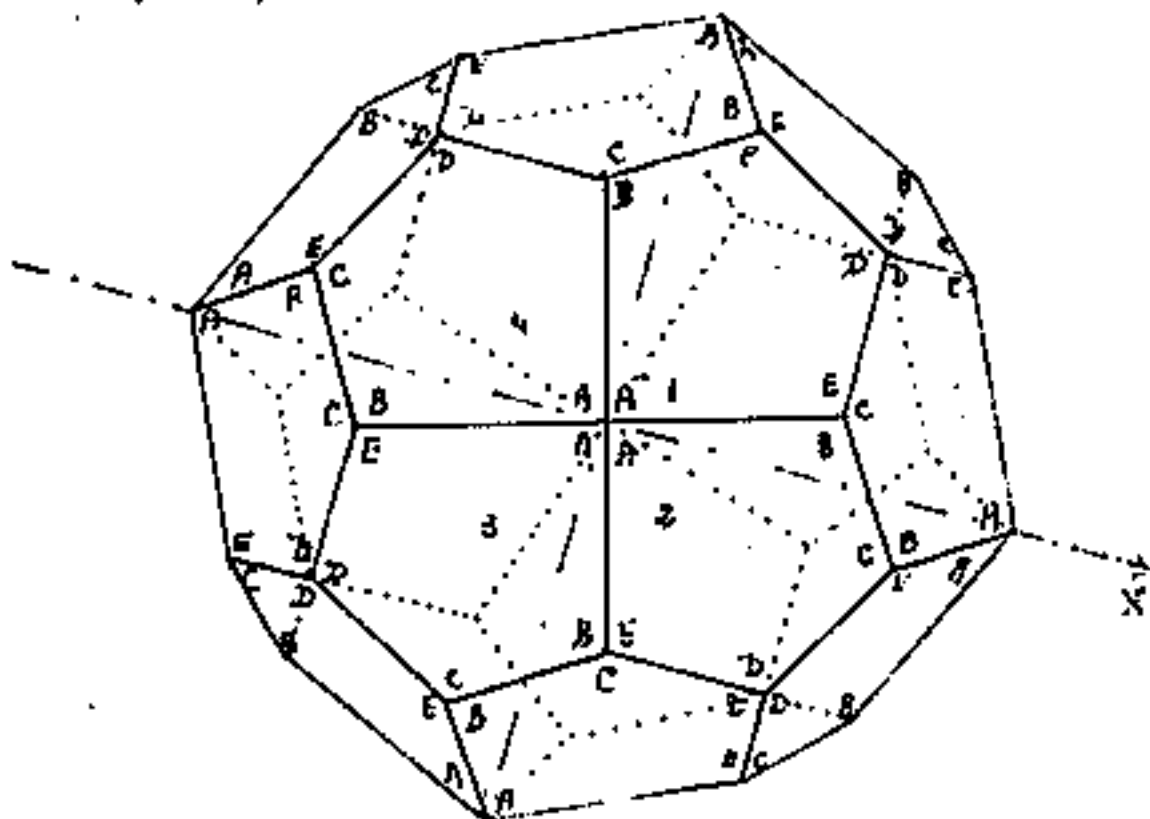
$$\boxed{\widehat{D}_D} = 2 \arcsen \left( \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right) = \underline{136^\circ, 3092329} = \boxed{136^\circ 18' 33", 2}$$



seconda proiezione



prima proiezione



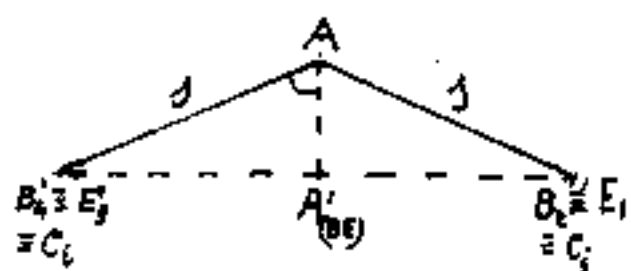
La proiezione a fianco riferisce il solido ad una terna ortoria di assi cartesiani ortogonali, mentre le facce hanno i vertici simboleggiati in sequenza oraria. I vertici "D" sono i vertici del cubo.

Consideriamo il vertice "A" sul semiasse positivo delle z, le quattro facce che vi concorrono hanno i segmenti  $\overline{BE}$  e  $\overline{CD}$  paralleli al piano xy, che assumiamo come primo piano di proiezione,

quindi, in prima proiezione i segmenti:  $\overline{BE}$  e  $\overline{CD}$  si proiettano in vera grandezza, in particolare i



segmenti  $\overline{BE}$  formano un quadrato di lato  $\overline{BE}$  le cui semidiagonali sono le proiezioni dei segmenti  $\overline{AB} = \overline{AE} = s$ ; cioè  $\overline{A'B'} = \overline{A'E'} = \overline{BE}/\sqrt{2}$ ; indichiamo



con  $A'_{(BE)}$  la proiezione di A sul piano dei B, E ed avremo:

$$\overline{A'B'} = 1,295597742/\sqrt{2} = \boxed{0,916125949 \cdot s}$$

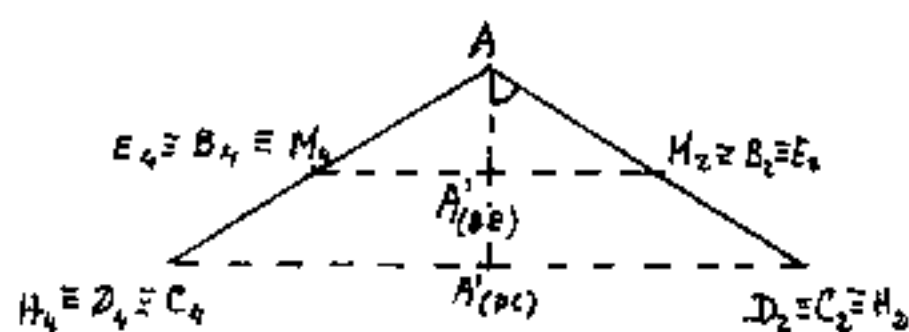
$$\widehat{(BAA'_{(BE)})} = \arcsen\left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right) = \arcsen\left(\frac{0,916125949 \cdot s}{s}\right) = \underline{\underline{66,36613616}}$$

$$\widehat{(BAA')} = 66^{\circ} 21' 58,09'' \quad ; \quad \widehat{(EAB_4)} = 2\widehat{(BAA')} = 132^{\circ} 43' 56,1''$$

$\overline{AA'_{(BE)}} = \overline{AB} \cos(\widehat{BAA'_{(BE)}}) =$  quota di A sul piano dei B, E.

$$\overline{BE_2} = 1,832251898 \quad \overline{AA'} = 0,4008905646 \cdot s$$

sezioniamo ora il solido con un piano verticale passante per  $\overline{AH} =$  asse della faccia, notiamo che anche i vertici C e D giacciono su piani paralleli ad xy, cioè i lati  $\overline{CD}$  si proiettano in vera grandezza, ed i vertici D proiettano in prima proiezione i lati del quadrato che è la faccia del cubo normale a z.



Il segmento  $\overline{AH}$  passa per "M" ed "M" è alla stessa quota di  $\overline{EB}$ , perciò l'angolo:

$$\widehat{(A'_{(BE)}AM)} = \arccos\left(\frac{\overline{AA'_{(BE)}}}{\overline{AM}}\right) =$$

$$\widehat{(A'_{(BE)}AM)} = \arccos\left(\frac{0,4008905646 \cdot s}{0,7518114087 \cdot s}\right) = \underline{\underline{58,24869151}}$$

$$\widehat{(A'_{(BE)}AM)} = 58^{\circ} 14' 55,289''$$

$$2\widehat{(A'_{(BE)}AM)} = 116^{\circ} 29' 50,578''$$

$$\overline{A'_{(DC)}D_2} = \overline{A'H'} = \overline{AH} \operatorname{sen}(58^\circ 14' 55", 289) = \boxed{1,191487882_1}$$

$$\overline{AA'_{(DC)}} = \overline{AH} \cos(58^\circ 14' 55", 289) = \boxed{0,737352707_1} \text{ quota di } A \text{ sul piano di } DC.$$

$$\overline{DK} = \overline{BD} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\delta - 90\right) = \boxed{\overline{DK} = 1,175999902_3} \text{ (distanza di } D \text{ da } \overline{AB})$$

$$\overline{D_2C_1} = 2 \overline{DK} \operatorname{sen}\left(\widehat{D_A}/2\right) = \boxed{\overline{D_2C_1} = 2,183105939_3} = \overline{D'_2C'_1}$$

Si noti che  $\overline{D_2C_1}$  è parallelo al piano di  $\overline{B_1E_2}$ , mentre  $\overline{D_1D_2}$  è parallelo ad  $y$ , si noti che  $\overline{C_1D_1} = x$  è inclinato di  $45^\circ$  rispetto a  $\overline{D_2C_1}$ , perciò:

$$\overline{D_1D_2} = \sqrt{\left(x/\sqrt{2}\right)^2 + \left(\overline{D_2C_1} - x/\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{(0,248091269 + 2,83928676)} =$$

$$\boxed{\overline{D_1D_2} = 1,757093631} \text{ (lato del quadrato e spigolo del cubo)}$$

calcoliamo ora quanto ha ruotato il lato del quadrato  $\overline{D_1D_2}$  rispetto agli assi (che è la rotazione degli spigoli  $\overline{AB}$  rispetto agli spigoli dell'ottaedro).

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\overline{D_1D_2} - x/\sqrt{2}}{\overline{D_1D_2}}\right) = \operatorname{arc}\operatorname{sen}\left(\frac{x/\sqrt{2}}{\overline{D_1D_2}}\right) =$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}(\overline{D_1D_2}) - x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}\overline{D_1D_2}}{x} - 1}\right) =$$

$$\varphi = 0,28741314853 \text{ rad.}$$

$$\varphi = 16^\circ,467560387 \text{ sessages.$$

$$\boxed{\varphi = 16^\circ 28' 03",218} \text{ sessages. (angolo di rotazione sinistra o destra rispetto agli assi)}$$

$$\varphi = 1/21,86116167 \text{ di giro.}$$

$$\operatorname{sen} \varphi = 0,2834724365$$

$$\operatorname{cos} \varphi = 0,95898038443$$

$$\operatorname{tang} \varphi = 0,29559774227$$

Consideriamo il quadrato:  $D_1 D_2 D_3 D_4$  faccia del cubo i cui spigoli sono paralleli agli assi, cio' implica che il diametro della sfera circoscritta all'ottaedro, che è anche la distanza di due vertici opposti:

$$\overline{A_{z+} A_{z-}} = \overline{A_{x+} A_{x-}} = \overline{A_{y+} A_{y-}} = (\overline{D_1 D_2} + 2 \overline{A_{(CD)} A}) = 2 \rho_3 =$$

$$\rho_3 = (\overline{D_1 D_2} / 2 + \overline{A_{(CD)} A}) = (1,757093631 / 2 + 0,737352707) \text{ s}$$

$$\boxed{\rho_3 = 1,615899522 \text{ s}}; \quad \text{raggio della sfera circoscritta}$$

$$l_0 = \sqrt{2} \rho_3 = \boxed{l_0 = 2,285227019 \text{ s}} \quad \text{spigolo dell'ottaedro}$$

$$\overline{D_1 D_3} = \overline{D_1 D_2} \sqrt{2} = \boxed{\overline{D_1 D_3} = 2,484905643 \text{ s}} \quad \text{diagonale del quadrato}$$

$$\overline{D_1 D_2} \sqrt{3} = \boxed{\overline{D_{1z+} D_{3z-}} = 3,043375443 \text{ s}} \quad \text{diagonale del cubo}$$

$$\boxed{2 \rho_3 = 3,231799044 \text{ s}} = \text{diametro sfera} = \text{diagonale cubo circoscritto}$$

$$\boxed{l_c = 1,86588048 \text{ s}} = \text{spigolo del cubo circoscritto} > \overline{D_1 D_2}$$

Il cubo di spigolo  $\overline{D_1 D_2}$  non è inscritto nella stessa sfera dell'ottaedro, i vertici  $D$  del solido sono interni alla sfera.

$$\text{Area di una faccia} = S_f = \left( \frac{(\overline{AM} \times \overline{EB})}{2} + \frac{\overline{EB} + \overline{CD}}{2} \overline{MH} \right)$$

$$\frac{\overline{EB} + \overline{CD}}{2} = 1$$

$$\boxed{S_f = 1^2 (1,132878796)} = 0,49350057 + 0,639378226$$

superficie laterale del solido:  $S_L = 24 \cdot S_f$

$$\boxed{S_L = 1^2 (27,1890911)}$$

Tutte le facce hanno la stessa distanza dal centro "O" della sfera, per cui dalle coordinate di tre punti di una faccia si può calcolare l'equazione del piano e da

essa la distanza:  $h_f$  ove il volume del solido sarà dato

da:  $V = \left(\frac{1}{3} h_f S_f\right) \cdot 24$ .

I tre punti siano:  $A_2, B_2, C_2$ ; avremo:

$$x_A = 0; \quad y_A = 0; \quad z_A = \rho_3 = 1,615899522$$

$$x_{B_2} = \overline{A'_{(BE)} B_2} \cos \varphi; \quad y_{B_2} = (\overline{A'_{(BE)} B}) \operatorname{sen} \varphi; \quad z_{B_2} = \rho_3 - \overline{A'_{(BE)} A}$$

$$x_{E_2} = \overline{A'_{(BE)} E_2} \operatorname{sen} \varphi; \quad y_{E_2} = -(\overline{A'_{(BE)} B}) \cos \varphi; \quad z_{E_2} = \rho_3 - \overline{A'_{(BE)} A}$$

$$\overline{A' B'} \operatorname{sen} \varphi = (0,916125949) (0,2884224365) = (0,259696454)$$

$$\overline{A' B'} \cos \varphi = (0,916125949) (0,95898038443) = (0,878546814)$$

$$(\rho_3 - \overline{A'_{(BE)} A}) = (1,615899522 - 0,400890566) = 1,215008958$$

$$\begin{cases} 0 + 0 + 1,615899522 \left(\frac{c'}{d}\right) = 1 \\ +(0,878546814) \left(\frac{a}{d}\right) + (0,259696454) \frac{b}{d} + (1,215008958) \frac{c}{d} = 1 \\ +(0,259696454) \frac{a}{d} - (0,878546814) \frac{b}{d} + (1,215008958) \frac{c}{d} = 1 \end{cases}$$

da cui l'equazione del piano ai coseni direttori

$$-(0,46232062759) x + (0,251358646139) y - (0,85034020739) z + \underline{\underline{1,37406433466}} = 0$$

cioè la distanza dal centro O di ciascuna faccia è:

$$h_f = \underline{\underline{(1,37406433466)}} \cdot 1 = \frac{h_f = \frac{\rho_3 \cdot 1}{\sqrt{2(\overline{AA_{(BE)}})^2 + 1^2}}}{h_f}; \text{ ove: } s' = \overline{A'_{(BE)} B'}$$

e quindi il volume  $V = (1,37406433466) (27,1890911) \frac{1^3}{3}$

$$\boxed{V = (12,45318678) 1^3}$$

Il volume del cubo interno  $V = (5,42481227) 1^3$

Il volume del cubo circoscritto  $V = (6,496081486) 1^3$

Il volume dell'ottaedro  $V = (5,625767681) 1^3$

Il volume della sfera per i punti A;  $V = (17,67387043) 1^3$

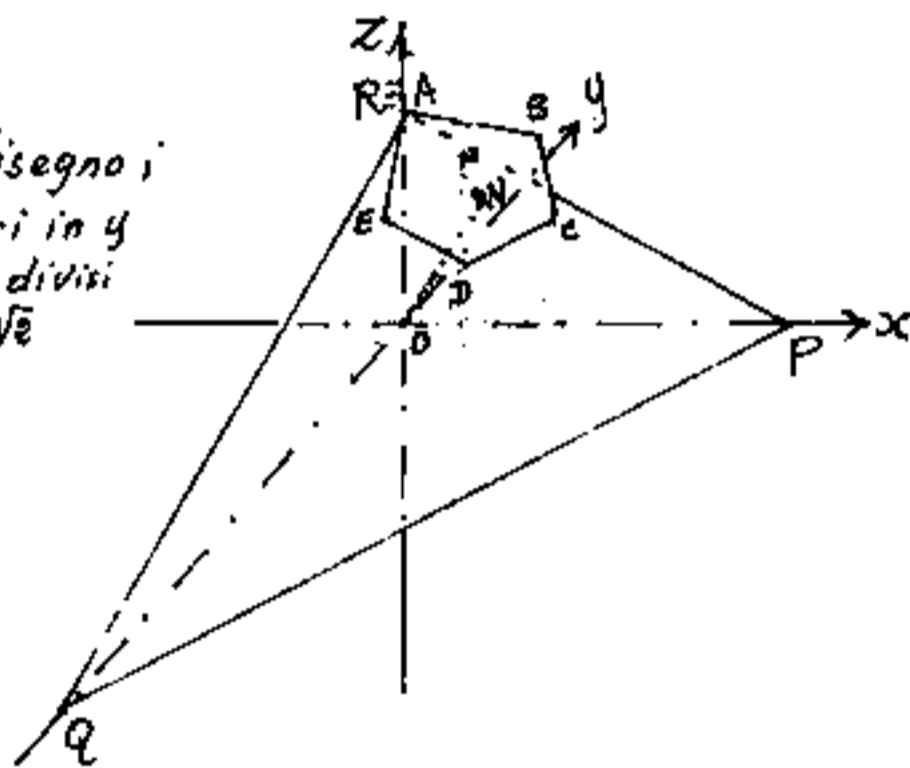
Se dividiamo l'equazione del piano per il termine noto otteniamo l'equazione segmentaria del piano della faccia;  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$  ove  $p, q, r$ ; sono i segmenti staccati dal piano sugli assi

in  $x$ ;  $\overline{OP} = p = +(2,972102597) \text{ s}$

"  $y$ ;  $\overline{OQ} = q = -(5,466548933) \text{ s}$

"  $z$ ;  $\overline{OR} = r = +(1,615899522) \text{ s} = \rho$

nel disegno i valori in  $y$  sono divisi per  $\sqrt{2}$



se invece moltiplichiamo i coseni direttori per la distanza del piano dall'origine "o" degli assi, otteniamo le coordinate di N ortocentro del

triangolo PQR e punto di intersezione della normale condotta da "O" al piano stesso. (vedi Vol III).

$x_N = +(0,635258284) \text{ s}$ ;  $y_N = -(0,34538295) \text{ s}$ ;  $z_N = +(1,16842215) \text{ s}$

ove:  $(\overline{ON} = 1,3740643346) \text{ s} = h_p$ .

Ma "N" rimane entro la faccia, perciò il solido che non ha sfera circoscritta in quanto passa solo per i vertici "A", ammette invece la sfera inscritta che è tangente alle facce nel punto N.

$\widehat{AON} = \arccos(0,85034020739) = 31^\circ 45' 04,4''$  ove  $\overline{AN} = \overline{ON} \tan(\widehat{AON})$

$\overline{AN} = (0,850340209) \text{ s}$  (fra M e Q). "N" appare equidistante da B, C, D, E cioè è sul punto comune agli assi dei lati DC.

Si è eseguito anche la proiezione dell'icositetraedro

sinistro, se confrontiamo

mo la prima proiezione

del solido destro con la

prima proiezione

del solido sinistro, notiamo

che le parti sottostante

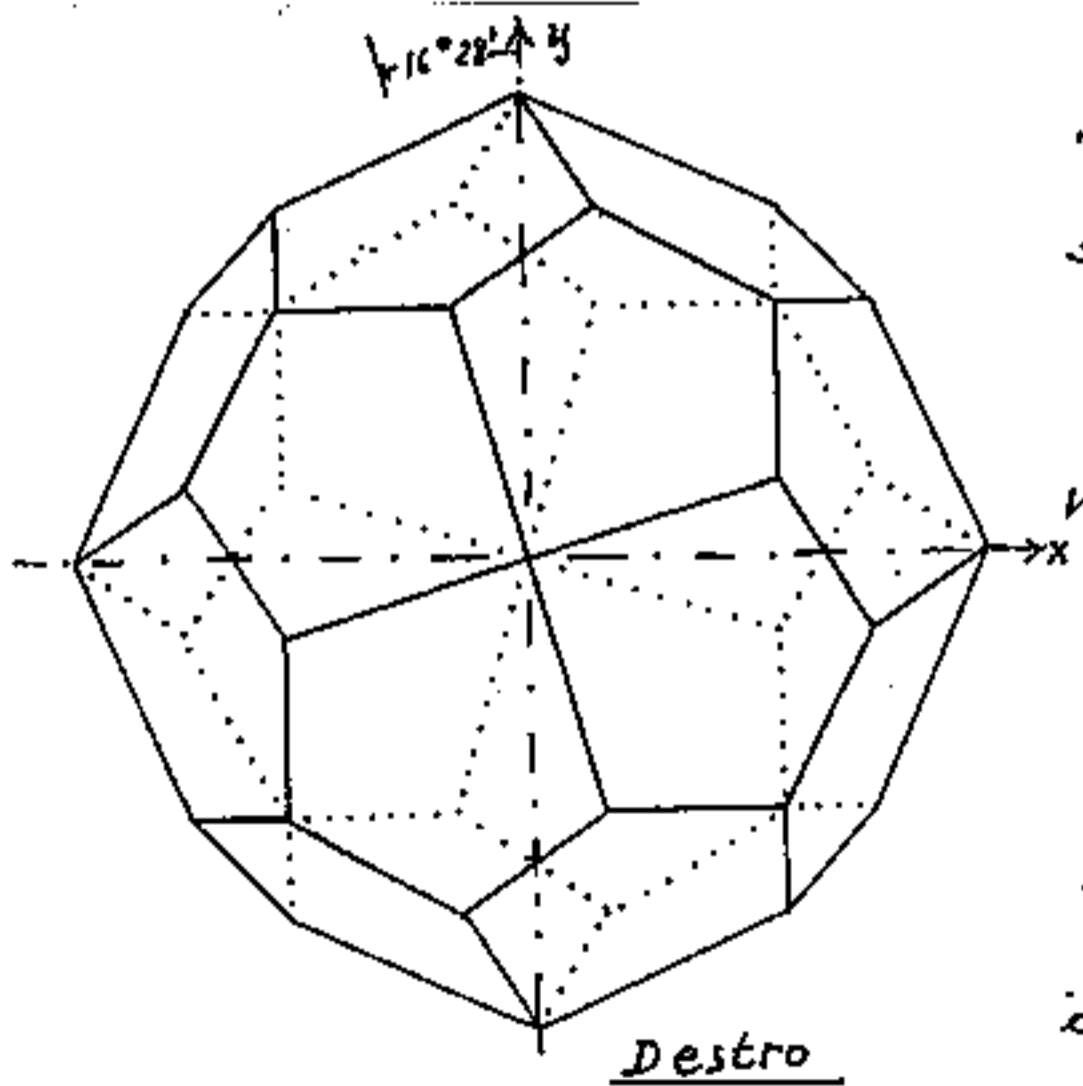
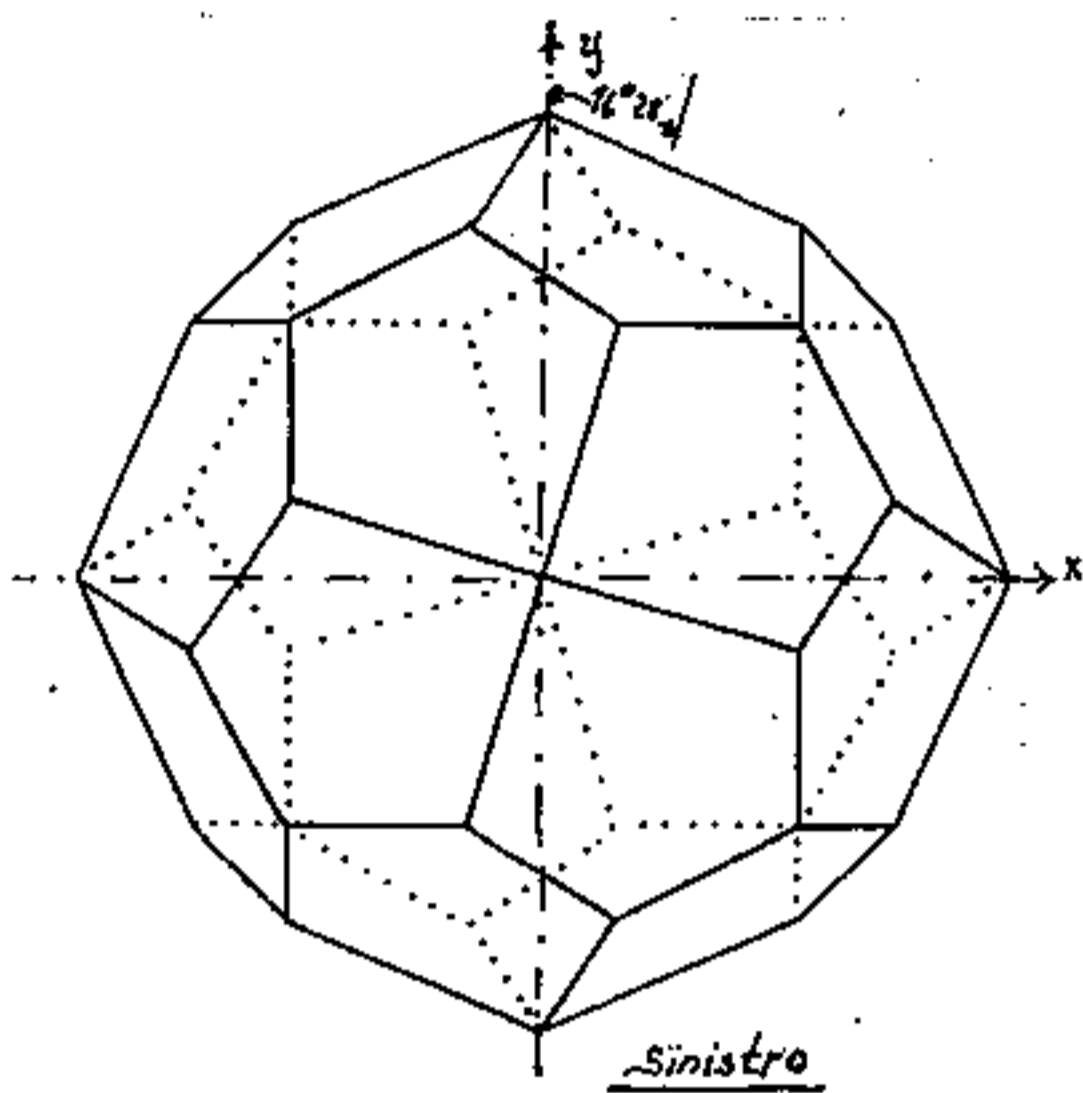
e la parte soprastante

sono mutuamente ruotate

e ruotate anche rispetto agli assi;

le due rotazioni sono di verso opposto.

Per paragonare con la vite dextro-gira e sinistro-gira pensiamo la parte inferiore del solido e la parte superiore come il dado ed il bullone e noteremo che per allineare le due parti nel destro si devono muovere come l'avvitamento della vite dextro-gira; nel sinistro come lo svitamento della stessa vite dextro-gira e non vale invertire le parti.

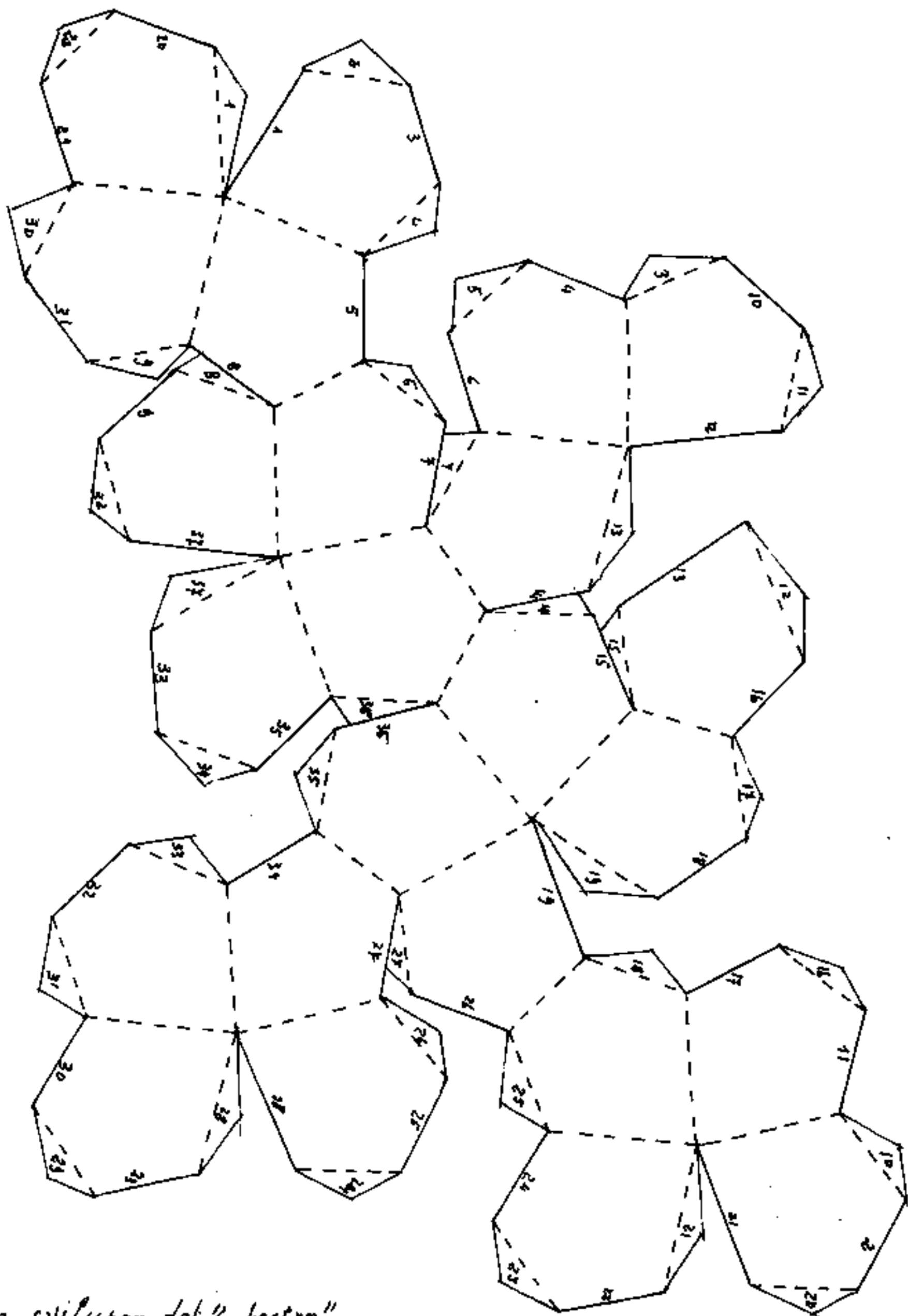


neare le due parti nel destro si devono muovere come l'avvitamento della vite dextro-gira; nel sinistro come lo svitamento della stessa vite dextro-gira e non vale invertire le parti.

mento della stessa vite dextro-gira e non vale invertire le parti.

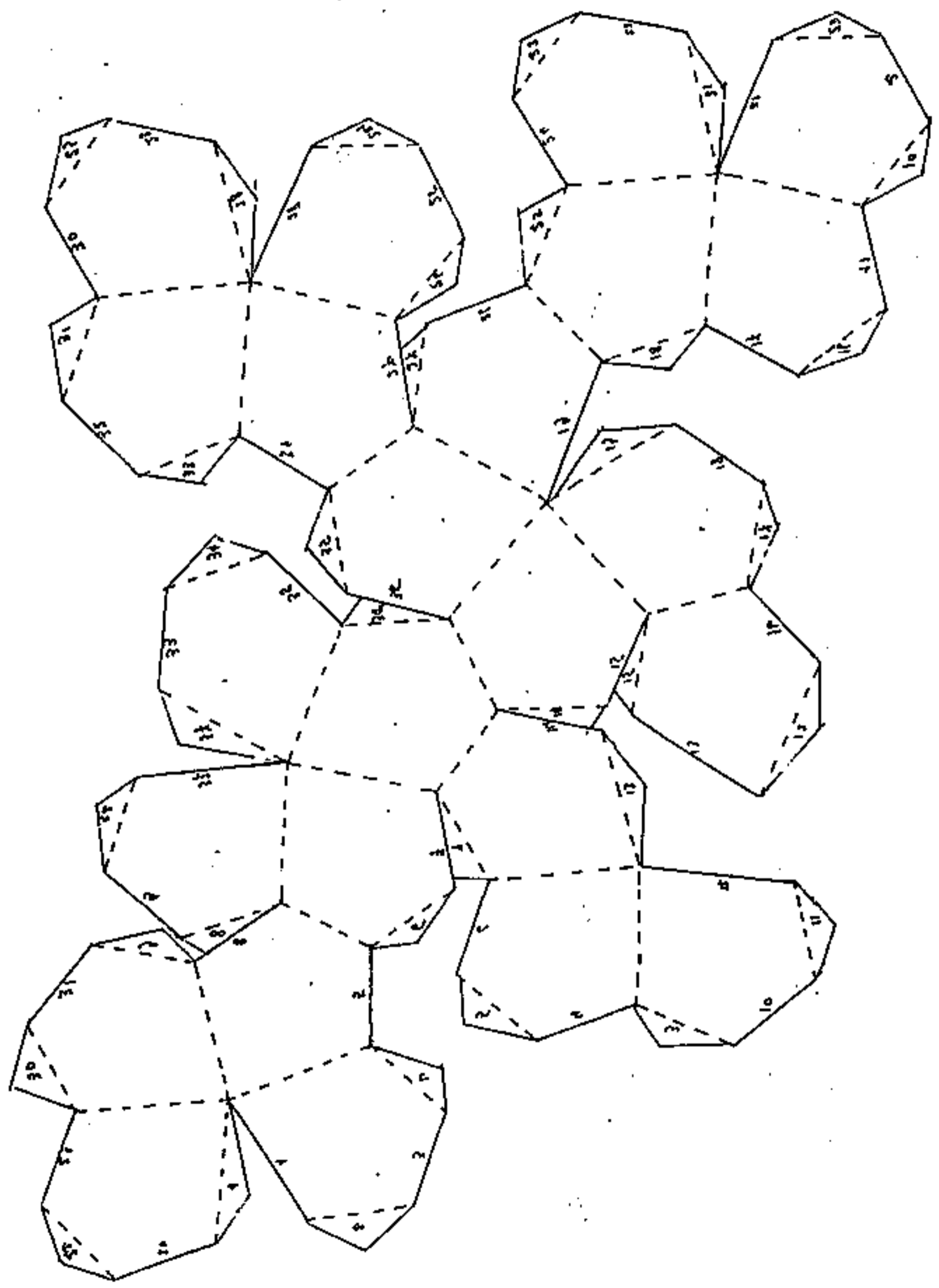
mento della stessa vite dextro-gira e non vale invertire le parti.

*Sviluppo di Icositetraedro  
pentagonale (sinistro)*



*(Lo sviluppo del "destro"  
è l'immagine speculare)*

Sviluppo d'ell'icositetraedro  
pentagonale (destra)





## Il calcolo degli angoli diedri

Abbiamo già trattato il problema al capitolo: "Angoli diedri ed angoli delle facce" in generale per tre facce con angoli al vertice fra loro diversi:  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  con  $\alpha_0$  opposto ad " $a$ " =  $\overline{BC}$ ,  $\beta_0$  opposto a " $b$ " =  $\overline{AC}$ , ed  $\gamma_0$  opposto a " $c$ " =  $\overline{AB}$ ; ed abbiamo ricavato la formula per il diedro sullo spigolo  $\overline{OC}$  (" $O$ " = vertice) =  $\hat{D}_c$  con la formula del coseno:

$$\cos(\hat{D}_c) = \frac{\cos \gamma_0 - \cos \alpha_0 \cos \beta_0}{\sin \alpha_0 \sin \beta_0}$$

Analogamente si è trattato un vertice con quattro facciate scomponendo la base quadrilatera in due triangoli. Analogamente si possono calcolare i diedri con la formula del coseno, se scomponiamo in triangoli il poligono di base del poliedro angoloide.

Consideriamo ora il caso particolare di facce aventi angoli uguali nel vertice comune, per cui sono uguali i diedri sugli spigoli uscenti dal vertice comune.

Indicheremo con " $\alpha$ " l'angolo delle facce al vertice comune, indicheremo con  $\hat{D}_3$  il diedro quando gli spigoli sono tre, ed avremo:

$$\cos(\hat{D}_3) = \frac{\cos \alpha - \cos \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \sin \alpha} = \cos \alpha \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} =$$

$$\boxed{\cos(\hat{D}_3) = \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\cos \alpha} + 1}} \quad \boxed{\left(\frac{1}{\cos \alpha} + 1\right) = \frac{1}{\cos(\hat{D}_3)}}$$

"Il reciproco del coseno dell'angolo delle facce maggiorato di uno, equivale il reciproco del coseno del diedro a tre facce"

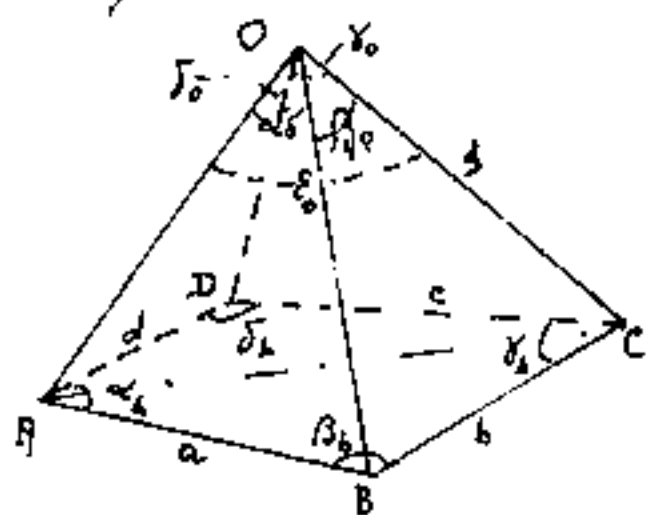
Tavola dei diedri sugli spigoli dei vertici a 3 facce

Angolo $\alpha$ al vertice delle 3 facce	Diedro sui 3 spigoli		NOTE
	$\hat{D}_3$ unadec	$\hat{D}_3$ unages	
120°	180°	180°	caso limite
119° 52' 44"	173°, 07328	173° 04' 23", 808	-
119° 51' 05", 52	172°, 3316667	172° 19' 54"	diacisdodecaedro (10)
119° 02' 21", 66	160°, 6125436	160° 36' 45", 1	triacisicosaedro
117° 12' 02", 05	147°, 9501	147° 21' 00", 36	triacisottaedro
116° 31' 54", 1	144°	144°	romboedro a 30 facce
115° 15' 47", 43	138°, 1179533	138° 07' 04", 632	trapezoedro
115° 11' 48", 4	137°, 8453763	137° 50' 43", 3	deltoido dodecaedro
114° 48' 43", 4	136°, 3092222	136° 18' 33", 2	icositetraedro pentagonale
112° 53' 07", 37	129°, 5211944	129° 31' 16", 3	triacistetraedro
111° 14' 45", 4	124°, 6327124	124° 37' 57", 7	esaesottaedro lim.
109° 28' 16", 3	120°, -	120°	rombododecaedro
108°	116°, 5650512	116° 33' 54"	dodecaedro
90°	90°	90°	cubo
60°	70°, 52877937	70° 31' 43", 61	tetraedro

## Diedri su vertici a quattro facce

Abbiamo già visto al capitolo: "angoli diedri ed angoli delle facce" che non basta la conoscenza dei quattro angoli delle facce che concorrono nel vertice comune per poter calcolare i diedri sugli spigoli uscenti da tale vertice.

Detto "O" il vertice comune, detti:  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$ , gli spigoli uscenti da esso; detti:  $\hat{AOB} = \alpha_0$ ,  $\hat{BOC} = \beta_0$ ;  $\hat{COD} = \gamma_0$ ;  $\hat{DOA} = \delta_0$ ; gli angoli delle facce sul vertice O, rispettivamente opposti ai lati del quadrilatero di base della piramide:  $a = \overline{AB}$ ,  $b = \overline{BC}$ ,



$c = \overline{CD}$ ;  $d = \overline{DA}$ ;  $\hat{DAB} = \alpha_b$ ;  $\hat{ABC} = \beta_b$ ;  $\hat{BCD} = \gamma_b$ ;  $\hat{CDA} = \delta_b$ .

A questi elementi, per definire il quadrilatero ABCD abbiamo

supposto di conoscere la diagonale  $\overline{AC}$  e quindi l'angolo sul vertice "O",  $\hat{ADC} = \epsilon_0$ , quindi applicando ripetutamente la formula dei diedri su vertici a tre facce si è ricavato:

$$\hat{\delta}_{OA} = \arccos\left(\frac{\cos\beta_0 - \cos\alpha_0 \cos\epsilon_0}{\sin\alpha_0 \sin\epsilon_0}\right) + \arccos\left(\frac{\cos\gamma_0 - \cos\delta_0 \cos\epsilon_0}{\sin\delta_0 \sin\epsilon_0}\right)$$

$$\hat{\delta}_{OB} = \arccos\left(\frac{\cos\epsilon_0 - \cos\alpha_0 \cos\beta_0}{\sin\alpha_0 \sin\beta_0}\right)$$

$$\hat{\delta}_{OC} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha_0 - \cos\beta_0 \cos\epsilon_0}{\sin\beta_0 \sin\epsilon_0}\right) + \arccos\left(\frac{\cos\delta_0 - \cos\gamma_0 \cos\epsilon_0}{\sin\gamma_0 \sin\epsilon_0}\right)$$

$$\hat{\delta}_{OD} = \arccos\left(\frac{\cos\epsilon_0 - \cos\delta_0 \cos\gamma_0}{\sin\delta_0 \sin\gamma_0}\right)$$

Nel caso in cui gli angoli delle 4 facce che concorrono nel vertice siano tutti uguali, e gli spigoli siano tutti uguali, cioè il quadrilatero di base sia un quadrato; se  $\varphi = \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \delta_0$ , è l'angolo delle facce, e  $s$  lo spigolo:  $2s \sin \frac{\varphi}{2} = l = \text{lato base}$   
 $l\sqrt{2} = 2\sqrt{2}s \sin \frac{\varphi}{2} = \text{diagonale} = 2s \sin \frac{E}{2}$  cioè  $E = \arcsin \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2}$

ma:  $\cos E = 1 - 2 \sin^2 \frac{E}{2} = 1 - (2)(\sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2})^2 = (1 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2})$ ; ed anche essendo:  $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi)$ ;  $\cos E = 1 - 2(1 - \cos \varphi) =$

$$\cos E = (2 \cos \varphi - 1)$$

$$\cos \hat{D} = \left( \frac{2 \cos \varphi - 1 - \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) = \left( \frac{-(1 - \cos \varphi)^2}{(1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)} \right)$$

$$\cos \hat{D}_4 = \left( \frac{\cos \varphi - 1}{\cos \varphi + 1} \right)$$

si noti che per:  $\varphi = 70^\circ 31' 43,61$  si ha:  $\sin \varphi = \frac{1}{3}$

per cui:  $\cos \hat{D}_4 = -\frac{1}{2}$        $\hat{D}_4 = 120^\circ$

se consideriamo i vertici di 3 facce ore:  $\hat{D}_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos \varphi}}$

e per  $\varphi = 109^\circ 28' 16,39$ , si ha  $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$

per cui  $\hat{D}_3 = -\frac{1}{2}$ ;       $\hat{D}_3 = 120^\circ$

È questo il caso del rombododecaedro i cui

vertici sono a tre facce uguali con  $\varphi = 109^\circ 28' 16,39$ ,

oppure a quattro facce uguali con  $\varphi = 180^\circ - \varphi = 70^\circ 31' 43,61$

ed i diedri sono sempre di  $120^\circ$  (facce piane).

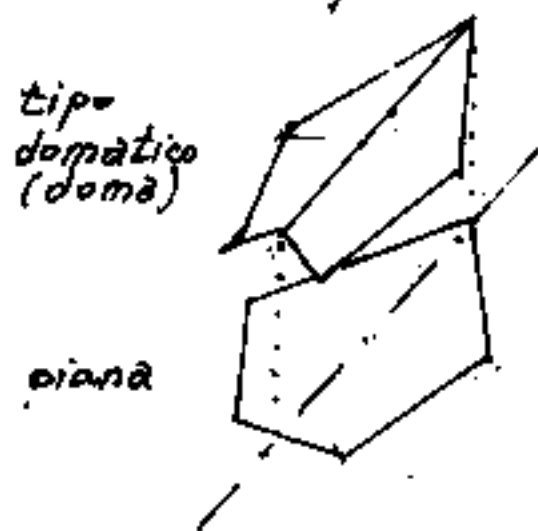
## Il pentagono-dodecaedro - (tetartoedro)

Il solido ha 12 facce pentagonali (generalmente irregolari), 20 vertici, 30 spigoli. ( $12+20=30+2$ )

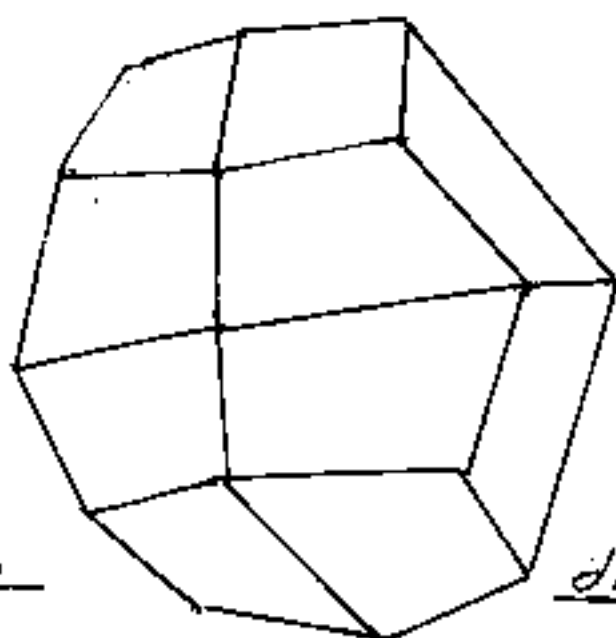
In cristallografia troviamo il pentagonododecaedro in due classi diverse, e precisamente: 1) nella classe diacisdodecaedrica o diploide (che noi abbiamo già trattato per solidi a facce quadrangolari) ed in cui cristallizza la pirite, la hauerite, la cobaltite. 2) nella classe pentagonododecaedrica o tetartoedrica, ove il pentagonododecaedro è detto "tetraedrico" ed in cui cristallizza l'ullmannite.

È opportuno rilevare che il diacisdodecaedro, il cui nome esprime la sua configurazione, il prefisso: dia che dal greco assume contemporaneamente vari significati come: "attraverso, separazione o distinzione in due parti da cui le parole italiane: diaframma, dialogo," ed il prefisso cis = al di qua, o sopra; stanno a significare che sopra il dodecaedro (pentagonale, regolare o irregolare) vi sono due facce simmetriche ad una linea che attraversa i pentagoni, necessariamente le facce sono quadrilateri, (vedi rappresentazione dei diacisdodecaedri o diploidi).

Qualora le due facce quadrangolari dei diploidi ruotassero intorno alla linea simmetrica di separazione fino a giacere sullo stesso piano si otterrebbe il pentagonododecaedro.



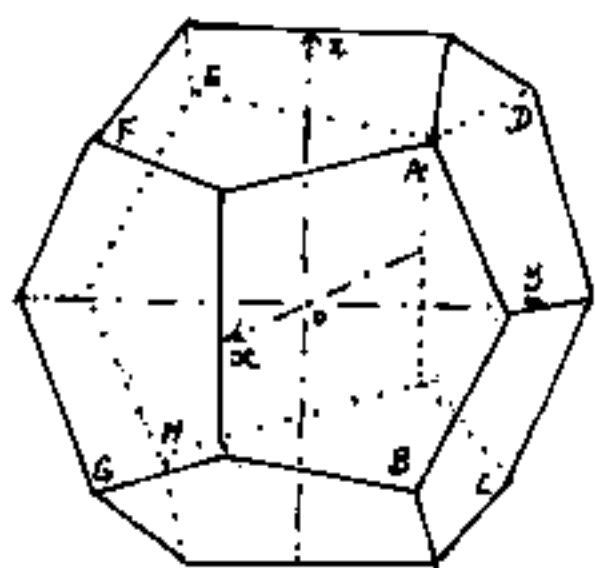
prospetto di diacisdodecaedro



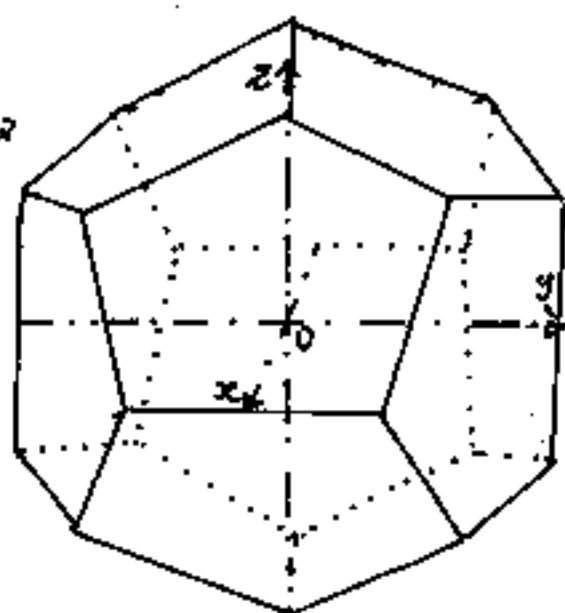
diploide

Rappresentiamo ora il pentagonododecaedro

destro, sinistro, con la  $z$  verso l'osservatore e terna antioraria:



questa figura è stata ripresa da: Carobbi "Lezioni di Mineralogia"

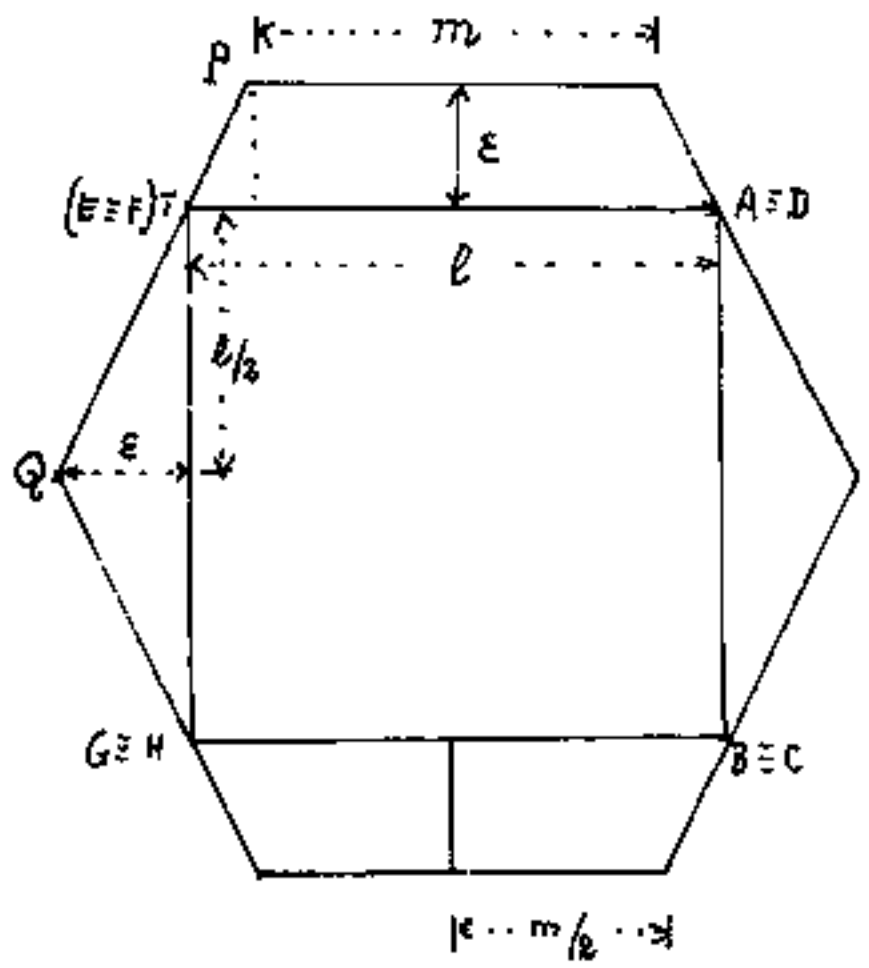


ove si nota che gli assi  $ox, y, z$  bisecano spigoli opposti paralleli, e che, fermi gli assi, ruotando di  $90^\circ$  il solido destro intorno all'asse  $z$ , si ottiene il sinistro.

Nel corso di questa opera, abbiamo trattato abbastanza sui concetti di "destro, sinistro, destrorso, sinistrorso, destro giro, sinistro giro, verso orario, verso antiorario, vite destrorigia, vite sinistrorigia, elica destro giro, ed

elica sinistrogira, solidi destri e solidi sinistri; ribadiamo ancora che la distinzione può essere relativa all'osservatore o al sistema di riferimento, ciò implica che non v'è diversità fra i due oggetti; ma la distinzione può essere indipendente dall'osservatore o dai sistemi di riferimento, ed in questo caso i due oggetti sono "in se" diversi (come la vite d'ortogira è diversa dalla vite sinistrogira perché è diversa l'elica del suo pannello pur avendo lo stesso diametro e lo stesso passo; come sono diversi certi cristalli, vedi icositetraedri pentagonali ecc.).

Date le condizioni di parallelismo di spigoli opposti, espresse per questa specie di pentagonododecaedro, si rileva che vertici come: A, B, C, D, E, F, G, H, sono comuni ai vertici di un cubo, che ha per spigoli la stessa



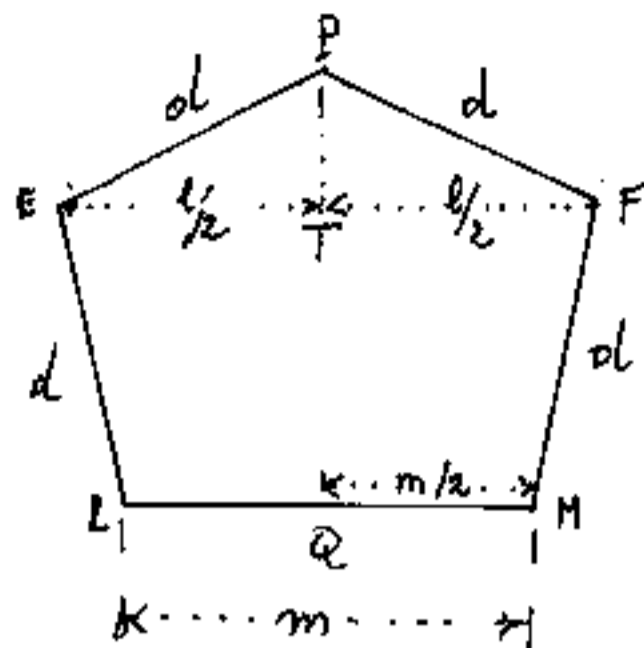
diagonale di pentagoni uguali (non regolari).

Consideriamo una sezione mediana di tale cubo, (per es. quella del piano  $\pi y$ ).

Sia "m" il lato delle facce pentagonali bisecato dagli assi. Sia "l" il lato del

cubo; e siano "d" i restanti lati del pentagono.

Sia  $T$  il punto medio di  $\overline{EF}$ , avremo: (vedi figure)



$$\left(\frac{l-m}{2}\right)^2 + \epsilon^2 = \overline{PT}^2$$

$$d^2 = \overline{PT}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

ma:  $\epsilon^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \overline{QT}^2$

ed essendo allineati  $P, T, Q$ :

$$\epsilon : \frac{l}{2} = \frac{l-m}{2} : \epsilon$$

Cioè:  $\epsilon^2 = \frac{l^2 - lm}{4}$

Riferiamoci al lato del cubo e poniamo:  $\boxed{\frac{m}{l} = k}$

avremo:

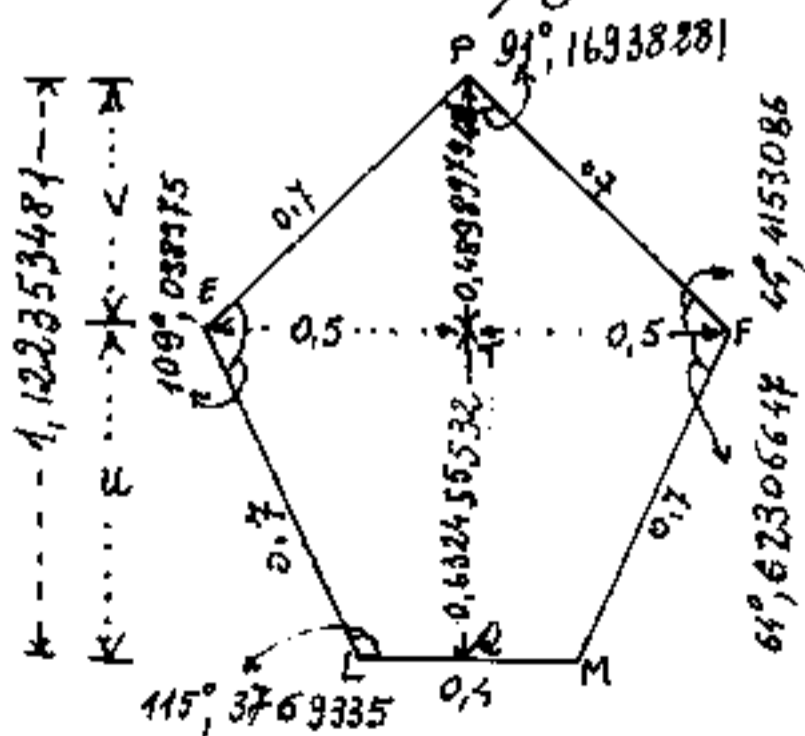
$$\boxed{\frac{\epsilon}{l} = \frac{1}{2} \sqrt{1-k}}$$

$$\boxed{\frac{d}{l} = \frac{1}{2} \sqrt{3-3k+k^2}}$$

Abbiamo così ridotto al parametro  $k$  questa specie di pentagonododecaedro  
 ore (se consideriamo unitario il lato del cubo,  $k$   
 diventa il valore dello spigolo  $m$ )

Assumiamo:  $m/l = 0,4$  per fare lo schema per la

costruzione di un modello in cartoncino.



$$\boxed{\frac{u}{l} = \frac{1}{2} \sqrt{2-k}} ; \quad \boxed{\frac{v}{l} = \frac{1}{2} \sqrt{2-3k+k^2}}$$

Angoli diedri:

$$\boxed{\hat{D}_m} = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{l}{2\epsilon}\right) = \boxed{2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{1-k}}\right)}$$

$$\boxed{\hat{D}_d} = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\hat{P}\hat{E}L}{2}\right)}\right)$$

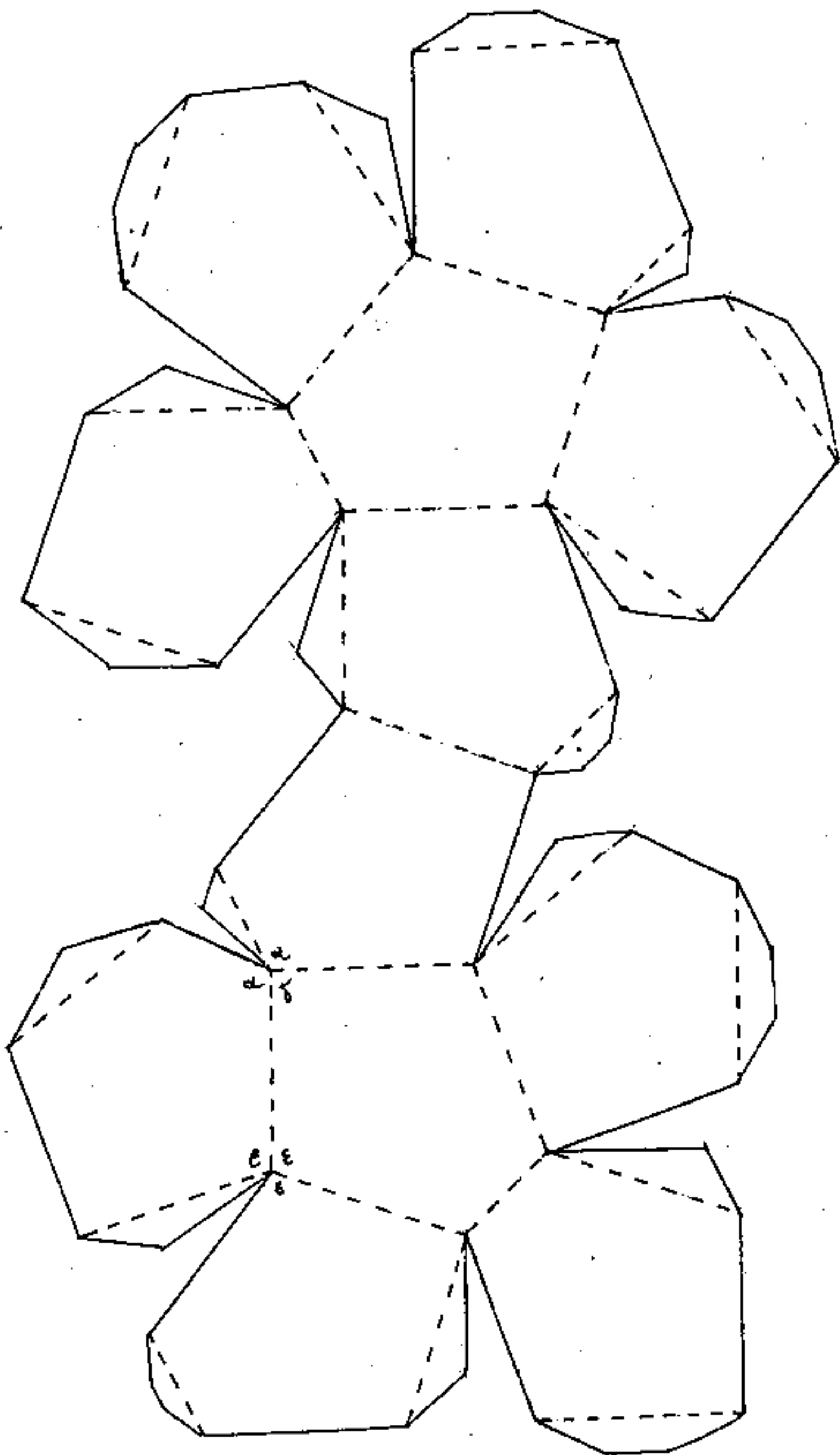
$$\hat{D}_m = 104^\circ 28' 39'' ; \hat{D}_d = 118^\circ 57' 18'' ;$$



TABELLA

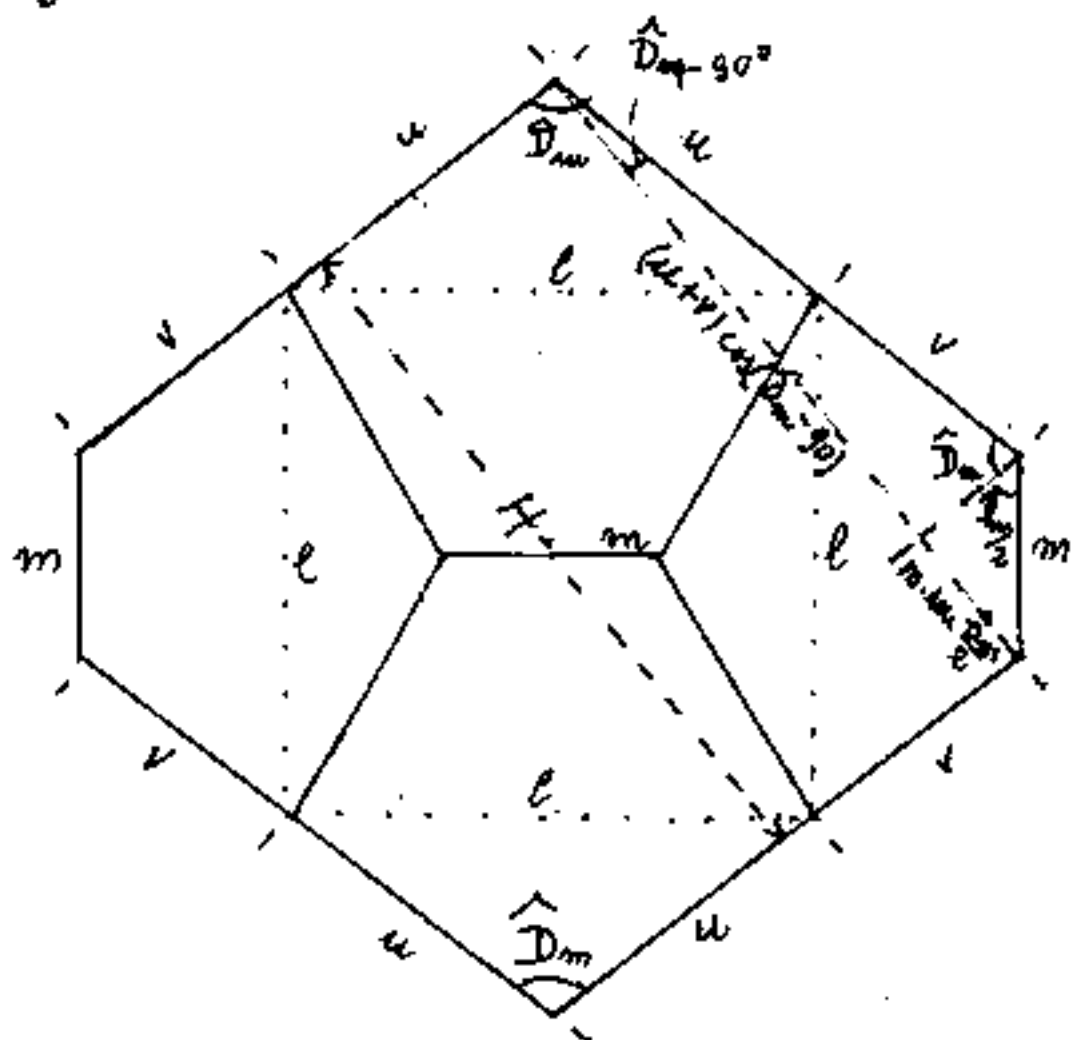
$k = m/l$	$E/l$	$d/l$	$V_e = \overline{PT}/l$	$u_e = \overline{ET}/l$	angoli delle facce			angoli diedri		NOTE
					$\widehat{PFM} = \widehat{PEL}$	$\widehat{EPF}$	$\widehat{ELM} = \widehat{FME}$	$\widehat{D}_{pm}$	$\widehat{D}_{dl}$	
0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$109^{\circ}28'16",3$	$70^{\circ}31'43",61$	—	—	$120^{\circ}$	truncated dodecahedron
0,1	0,4743416	0,8231039	0,6538348	0,6892024	$109^{\circ}27'08",98$	$74^{\circ}48'42",01$	$123^{\circ}08'30",01$	$93^{\circ}01'01",05$	$119^{\circ}57'14",9$	
0,2	0,4472136	0,7810250	0,600000	0,6708204	$109^{\circ}23'14",8$	$79^{\circ}36'40",11$	$120^{\circ}48'25",1$	$96^{\circ}22'45",73$	$119^{\circ}47'43",3$	
0,3	0,4183300	0,7399324	0,5454356	0,65119202	$109^{\circ}15'29",8$	$85^{\circ}01'22",35$	$118^{\circ}13'48",9$	$100^{\circ}09'51",29$	$119^{\circ}28'55",8$	
0,4	0,3872983	0,70000	0,4898979	0,6324555	$109^{\circ}02'18",15$	$91^{\circ}10'09",78$	$115^{\circ}22'36",9$	$104^{\circ}28'39"$	$118^{\circ}57'18"$	
0,5	0,3535534	0,6614378	0,4330127	0,6123724	$108^{\circ}41'08",67$	$98^{\circ}12'47",56$	$112^{\circ}12'27",5$	$109^{\circ}28'16",3$	$118^{\circ}07'31",82$	
0,6	0,3162278	0,6244998	0,3741657	0,5916080	$108^{\circ}07'48",26$	$106^{\circ}22'57",6$	$108^{\circ}40'42",3$	$115^{\circ}22'36",9$	$116^{\circ}51'22",5$	
0,618033989	0,3090170	0,6180340	0,3632713	0,5877853	$108^{\circ}00'00"$	$108^{\circ}00'00"$	$108^{\circ}00'00"$	$116^{\circ}33'54",1$	$116^{\circ}33'54",1$	regular dodecahedron
0,7	0,2738613	0,5894913	0,3122499	0,5700877	$107^{\circ}14'36",1$	$116^{\circ}01'49",66$	$104^{\circ}44'29"$	$122^{\circ}34'44",2$	$114^{\circ}55'05",78$	
0,8	0,2236068	0,5567764	0,2449490	0,5477226	$105^{\circ}45'12",1$	$127^{\circ}47'59"$	$100^{\circ}20'48",3$	$131^{\circ}48'37",1$	$111^{\circ}52'51",1$	
0,9	0,1581139	0,5267827	0,1658312	0,5244044	$102^{\circ}54'08",18$	$143^{\circ}18'09",3$	$95^{\circ}26'47",3$	$144^{\circ}54'11",5$	$106^{\circ}42'25",6$	
1	0	0,5	0	0,5	$90^{\circ}$	$180^{\circ}$	$90^{\circ}$	$180^{\circ}$	$90^{\circ}$	cube or square faces

Pentagono-dodecaedro (4 lati uguali)  
simmetrico -  $K=0,40$  ;  $d=0,70$  ;  $l=1$  ;



Tracciamo anche la prima e seconda proiezione del pentagonoicodecaedro simmetrico, a quattro lati uguali con  $m/l = 0,4$ .

Nel disegno si è evidenziato punteggiando la proiezione del cubo interno di spigolo  $l$  e si sono riportate in figura le denominazioni che si sono proiettate in vera grandezza, da cui ricaviamo:



grandezza, da cui ricaviamo:

$$H = (u+v) \cos(\hat{D}_m - 90^\circ) + m \sin \hat{D}_m / 2$$

$$H/l = 1,402938$$

notare che  $H < l\sqrt{2}$ .

L'area di una faccia sia

$$S_f = \frac{l \cdot v}{2} + \frac{l \cdot m \cdot u}{2}$$

$$S_f = l^2 (0,687667846)$$

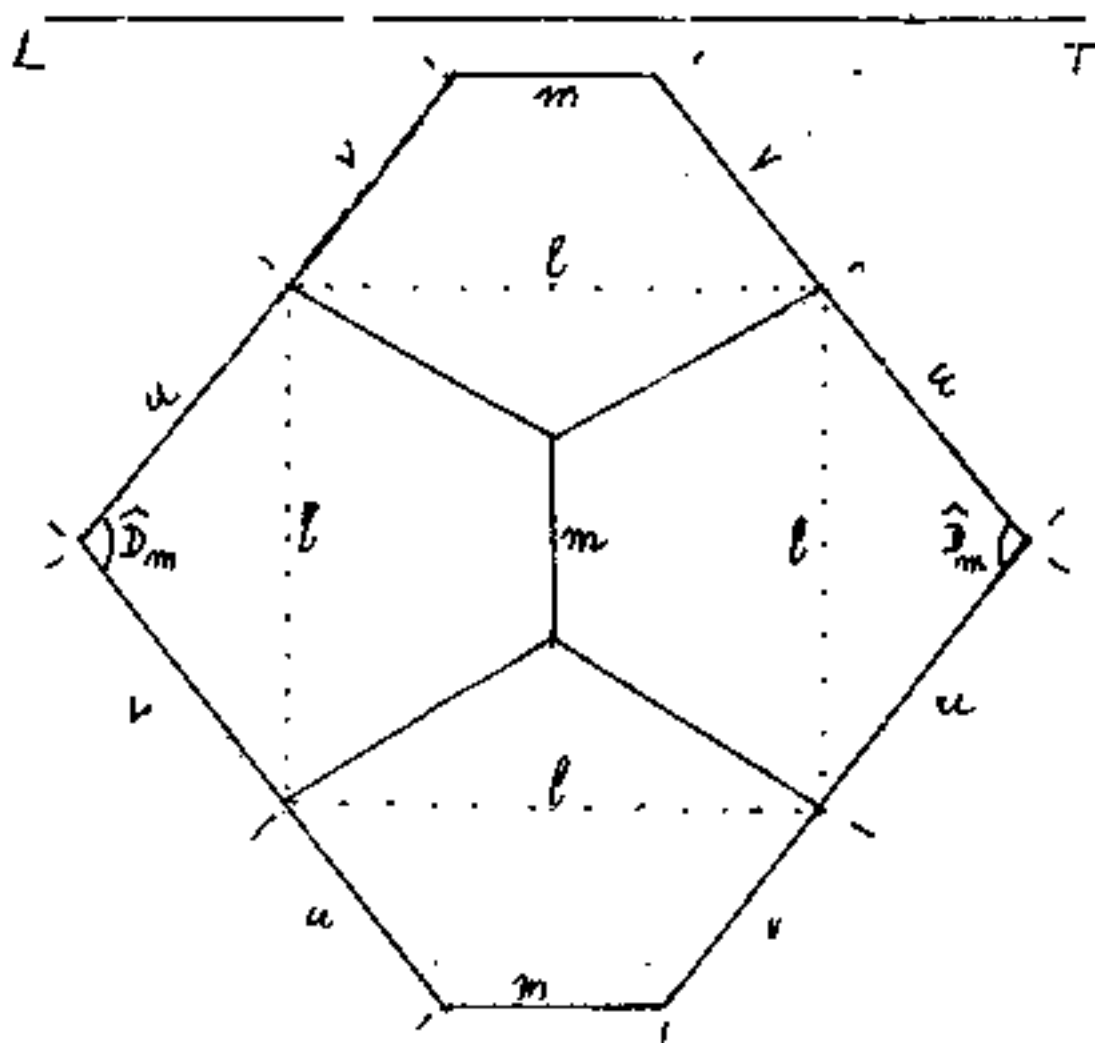
Superficie laterale del solido

$$S_L = l^2 (8,25201416)$$

Volume del solido:

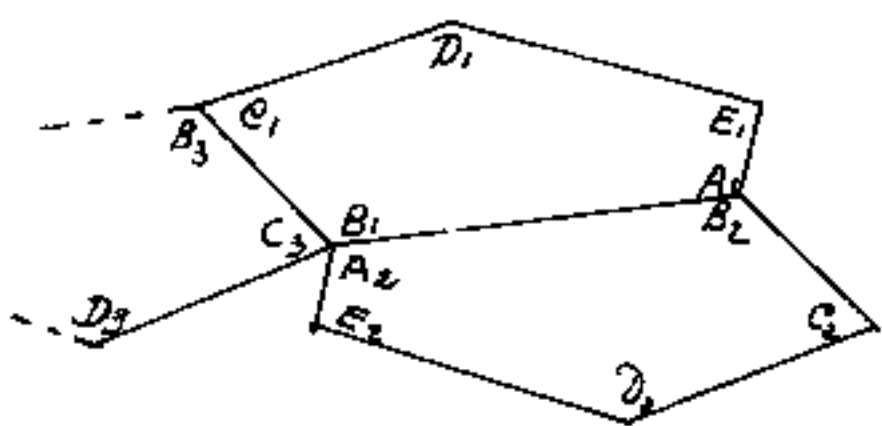
$$V = 12 \left( \frac{S_f \cdot (H/2)}{3} \right) =$$

$$V = l^3 (1,9295107)$$



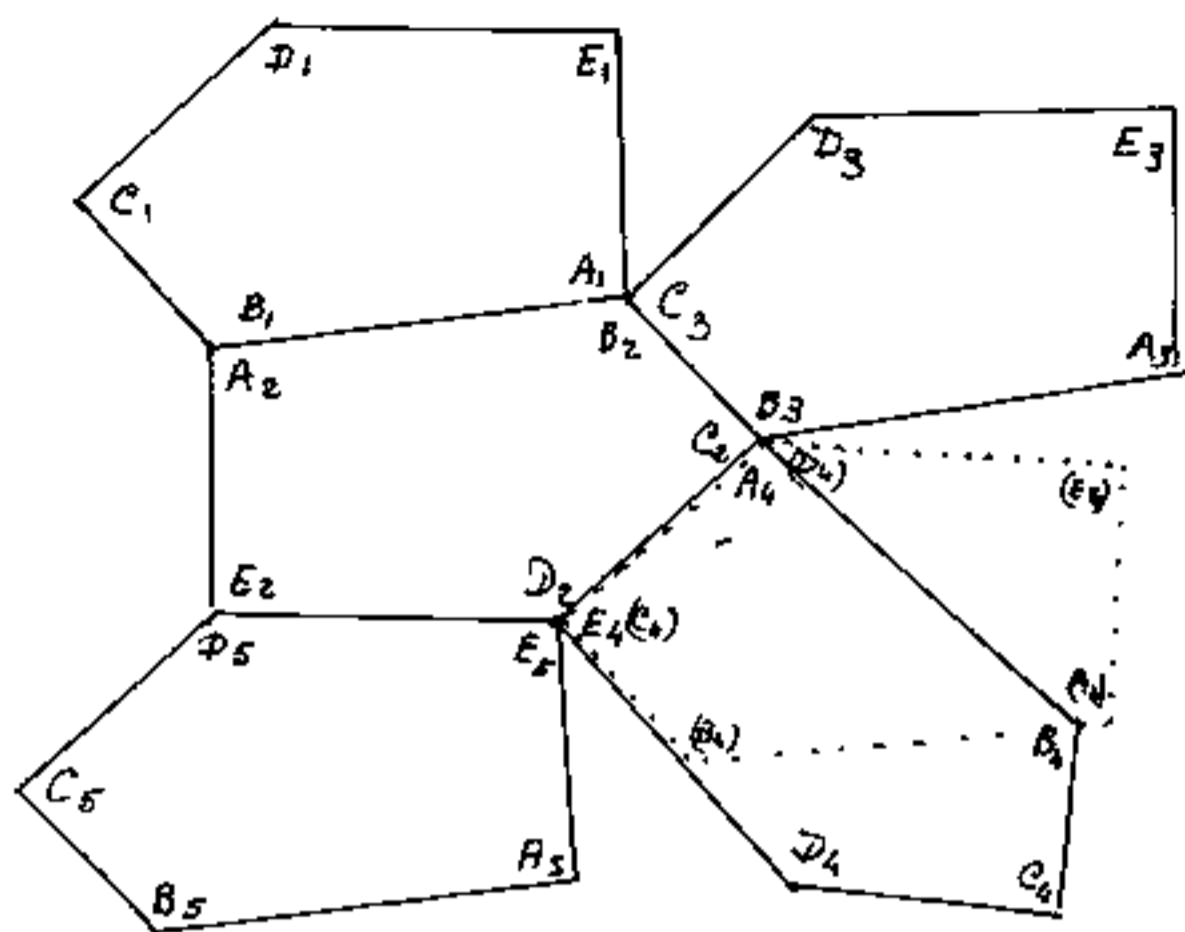
Abbiamo trattato un solido pentagono-dodecaedro (tetartoeдро) avente facce pentagonali con quattro lati uguali ed uno diverso, simmetriche rispetto all'asse del lato diverso (variabile). Comunque il lato diverso varia, come misura, rispetto alla misura degli altri quattro da zero (romboedro), a due (cubo), quando il rapporto è uno (dodecaedro regolare). Noi abbiamo preso il parametro rispetto allo spigolo del cubo: parametro "l" variabile da zero ad uno.

Cerchiamo ora di generalizzare il solido e vediamo quali limitazioni si impongono alla irregolarità delle facce.



1) Impossibile un solido pentagono-dodecaedro avente le facce uguali, con lati tutti diversi fra loro.

Infatti, nel fare il modello, si nota che, facce adiacenti, possono unirsi avendo in comune lo stesso spigolo (lati di faccia della stessa lunghezza:  $\overline{BA} = \overline{AB}$ ;  $\overline{BC} = \overline{CB}$ ; ecc.). (Attenzione, leggendo i simboli delle facce nello stesso verso orario avremmo:  $\overline{B_1A_1} = \overline{A_2B_2}$ ,  $\overline{B_1C_1} = \overline{C_2B_2}$ ) Ma ogni vertice è comune solo a tre facce, per cui, (vedi figura), nel vertice:  $B, A, C_3$  dovrebbe essere  $\overline{C_3D_3} = \overline{A_2E_2}$ , impossibile essendo diversi i lati delle facce.



2) E' impossibile  
un solido penta-  
gonododecaedro  
le cui facce ab-  
biano solo due  
lati uguali fra  
loro.

Infatti, dall'esem-

pio precedente, disegniamo una faccia pentagonale con:

$\overline{EA} = \overline{CD}$ . I lati  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{DE}$ , in quanto diversi, possono affiancarsi solo ad omonimi di altra faccia. (vedi figura)

Avremo così:  $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ ;  $\overline{B_2C_2} = \overline{B_3C_3}$ ;  $\overline{E_2D_2} = \overline{E_5D_5}$  il lato  $\overline{C_2D_2}$  può unirsi sia con  $(\overline{C_4})(\overline{D_4})$ , sia con  $\overline{E_4A_4}$ .

Se poniamo  $\overline{C_2D_2} = (\overline{C_4})(\overline{D_4})$ , si nota che:  $(\overline{D_3})(\overline{E_3}) \neq \overline{B_3A_3}$ , ed  $\overline{E_5A_5} \neq (\overline{B_4})(\overline{C_4})$  non consentono la costruzione.

Se poniamo  $\overline{C_2D_2} = \overline{E_4A_4}$  avremo  $\overline{A_3B_3} = \overline{A_4B_4}$ , ma i lati:  $\overline{E_5A_5} \neq \overline{E_4D_4}$  non consentono la costruzione.

Abbiamo preso due lati uguali non consecutivi altrimenti, se consecutivi, l'impossibilita' resta dimostrata fino dal 1) esempio.

Restano ora le seguenti condizioni:

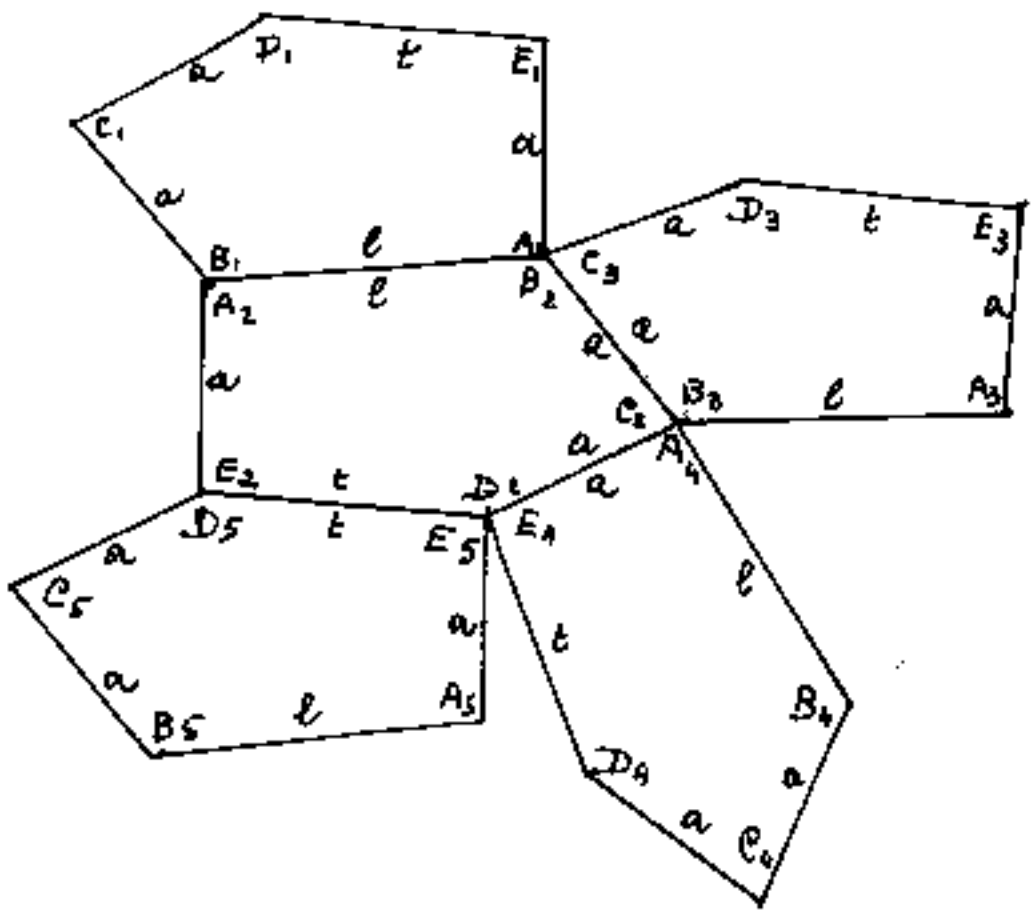
- 3) 3 lati non consecutivi uguali (impossibile)
- 4) 3 lati consecutivi uguali (impossibile)

- 5) due coppie di lati uguali non consecutivi (impossibile)
- 6) due coppie di lati uguali di cui una non consecutivi (impossibile)
- 7) due coppie di lati uguali consecutivi
- 8) una coppia di lati uguali non consecutivi e tre lati uguali (impossibile)
- 9) una coppia di lati uguali consecutivi e tre lati uguali
- 10) 4 lati uguali
- 11) 5 lati uguali.

3) Tre lati uguali non consecutivi:

(lati uguali =  $\underline{a}$ ; diversi:  $\underline{l}$ ,  $\underline{t}$ )

Impossibile perché in  $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$  il collegamento è obbligato, ed anche  $\overline{E_2D_2} = \overline{E_5D_5}$  è obbligato.



Per  $\overline{B_2C_2}$  se poniamo  $\overline{B_2C_2} = \overline{C_3D_3}$  avremmo  $\overline{E_1A_1} \neq \overline{D_2E_2}$ ;

se poniamo:  $\overline{B_2C_2} = \overline{E_3A_3}$  avremmo  $\overline{E_1A_1} \neq \overline{A_3B_3}$

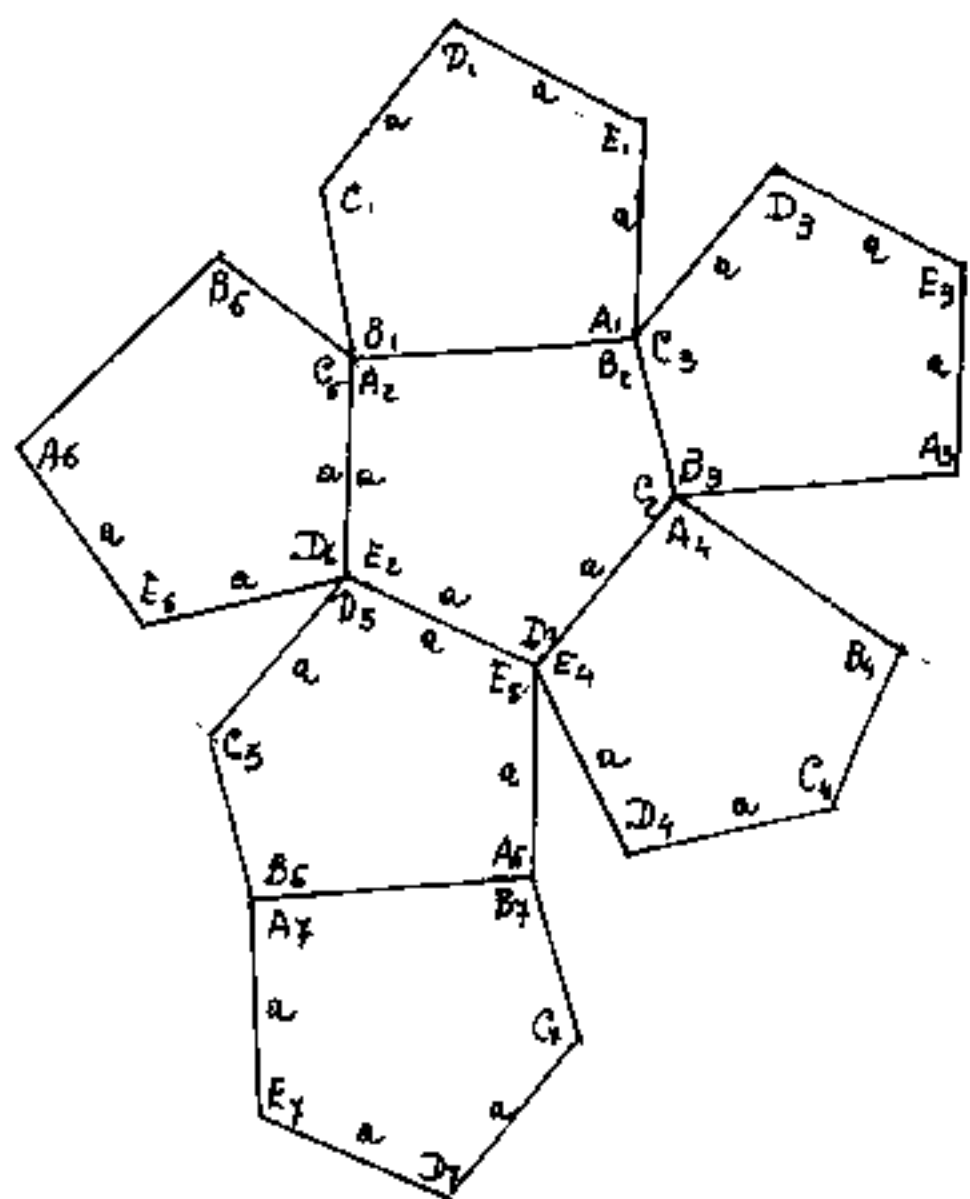
Resta compatibile  $\overline{B_2C_2} = \overline{C_3B_3}$  perché  $\overline{A_1E_1} = \overline{C_3D_3}$

Come si vede, le facce che abbiamo affiancato sono obbligate, però è comunque impossibile affiancare la faccia 4 alla 2 su  $\overline{C_2D_2}$ . Se:  $\overline{C_2D_2} = \overline{A_4E_4}$  si ha:  $\overline{E_5A_5} \neq \overline{E_4D_4}$ ;

Se  $\overline{C_2D_2} = \overline{C_4D_4}$  si ha:  $\overline{E_4D_4} \neq \overline{B_3A_3}$ ; se  $\overline{C_2D_2} = \overline{C_4B_4}$  si ha  $\overline{D_4C_4} \neq \overline{B_3A_3}$ ;

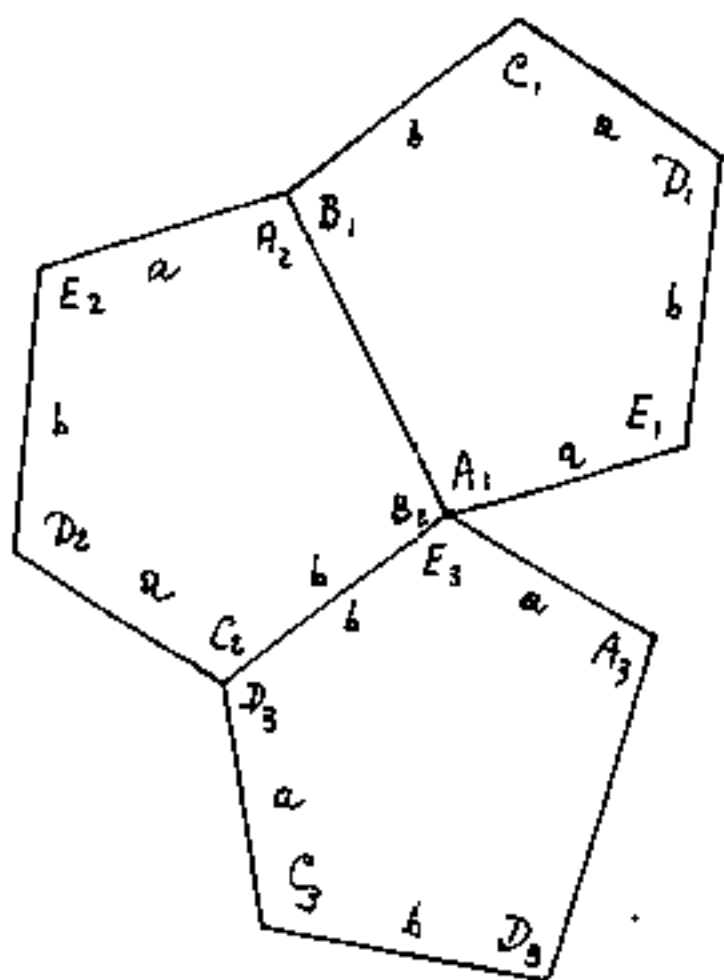
$\overline{E_5D_5} \neq \overline{A_4B_4}$ . D'altra parte  $\overline{A_2E_2}$  vuole tre lati uguali consecutivi.

che nessuna faccia del caso 3) può soddisfare, e ne conferma l'impossibilità.



4) Tre lati consecutivi uguali (a)

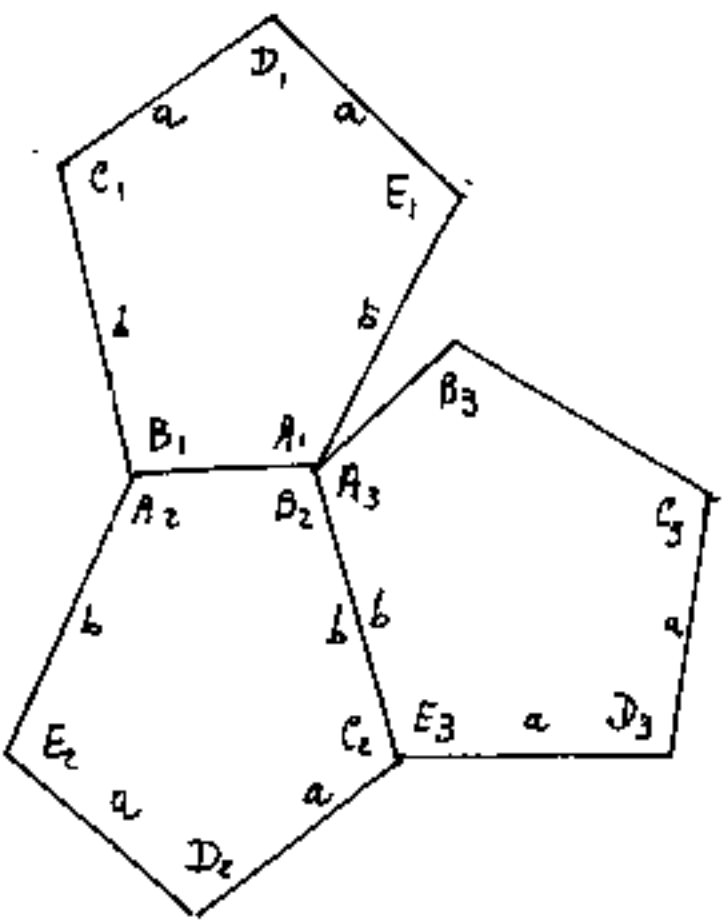
Impossibile perché l'applicazione delle facce: 1, 3, 4, 5, 6 intorno alla 2 è obbligato come in figura; ma ciò rende impossibile l'applicazione della faccia 7 perché:  $\overline{B_7 C_7} \neq \overline{C_4 D_4}$



5) Due coppie di lati uguali (a) e (b) non consecutivi.

Impossibile perché:  $\overline{A_1 B_1} = \overline{A_2 B_2}$ , obbligato; se:  $\overline{C_2 B_2} = \overline{E_3 D_3}$  occorrerebbe una faccia con due "a" consecutivi da porre in  $\overline{D_2 C_2} = \overline{D_3 C_3}$ .  
Se:  $\overline{C_2 B_2} = \overline{C_3 D_3}$ , avremmo in

$\overline{E_2 D_2} = \overline{E_4 D_4}$  che rende impossibile una faccia 5 con due lati b consecutivi.

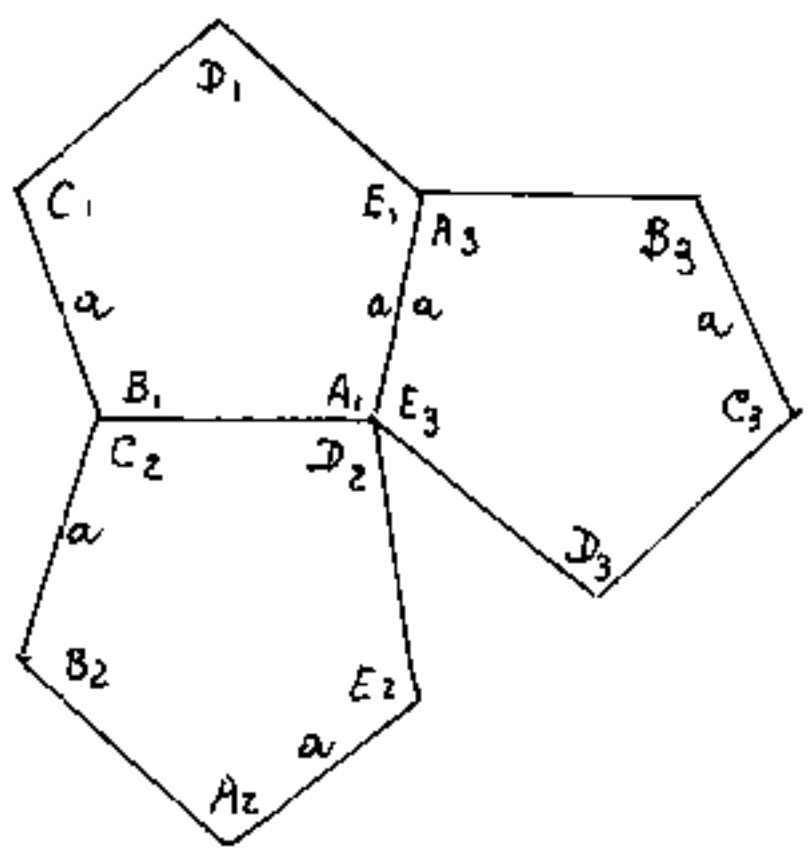


6) Due coppie di lati uguali di cui in una non consecutivi.

Impossibile perché:  $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$  obbligato. Se  $\overline{B_2C_2} = \overline{A_3E_3}$ , si ha:  $\overline{A_1E_1} \neq \overline{A_3B_3}$ . Se  $\overline{B_2C_2} = \overline{B_3C_3}$ , si ha:  $\overline{A_1E_1} \neq \overline{C_3D_3}$ .

7)\* Due coppie di lati uguali consecutivi.

E' possibile la costruzione dei vertici e degli spigoli comuni, resta da vedere se le facce si mantengono piane, caso che esamineremo dopo.



8) Una coppia di lati uguali non consecutivi (a) e tre lati uguali

Impossibile, infatti si hanno due modalità per affiancare il lato  $\overline{E_1A_1}$ , cioè:  $\overline{E_1A_1} = \overline{A_3E_3}$  che obbliga:  $\overline{A_1B_1} = \overline{C_3D_3}$ , ed implica  $\overline{C_1B_1} = \overline{C_2B_2}$  ed

occorrerebbero due lati uguali consecutivi (impossibile).

$\overline{E_1A_1} = \overline{B_3C_3}$  obbliga ancora  $\overline{A_1B_1} = \overline{D_2C_2}$  come prima; (impossibile).



9) una coppia di lati uguali consecutivi e tre lati uguali.

È un caso particolare del caso  $f^*$  che tratteremo; il caso simmetrico è già stato trattato all'inizio.

10) Quattro lati uguali

Anche questo è un caso particolare del  $f^*$  quando il rapporto fra i lati delle due coppie è 1 che tratteremo dopo il  $f^*$ . Come simmetrico vedi tabella all'inizio.

11) Cinque lati uguali

Ammette solo variazioni angolari, vedremo che ammette solo il dodecaedro regolare

Solo tre delle undici condizioni, sui lati delle facce pentagonali, risultano non impossibili alla costruzione del solido; e poiché il caso  $f^*$ ) in una trattazione generale comprende le condizioni dei casi 9), 10), 11) esaminiamo il caso  $f^*$ ) in generale.

---

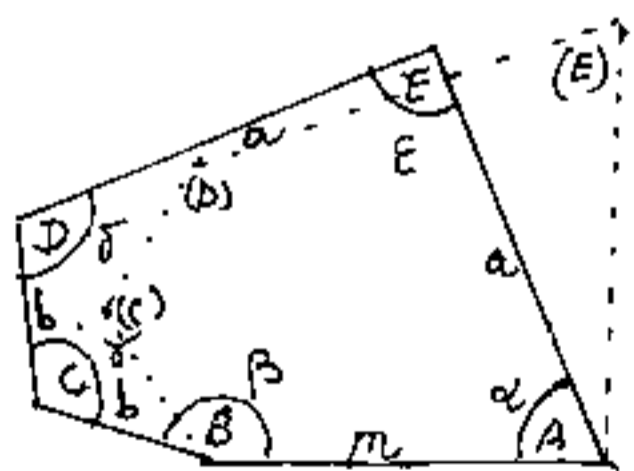
Caso  $\gamma^*$ )

Classe di solidi a facce pentagonali  
aventi per lati due coppie diverse di lati  
uguali consecutivi ed un lato diverso da  
quello delle coppie agli estremi delle coppie  
stesse.

Sia  $\overline{AB}$  il lato diverso:  $\overline{AB} = m$ ; e siano rispettivamente uguali ad " $\underline{a}$ " i lati della coppia dalla parte A di  $m$  e siano uguali a " $\underline{b}$ " i lati della coppia dalla parte B di  $m$ .

Appare ovvio che se noi applichiamo le lettere nei vertici in sequenza oraria od antioraria avremo due solidi detti destro e sinistro.

Esaminiamo ora i limiti di grandezza dei lati, limite che necessariamente dipende dalla grandezza degli altri, ma anche dagli angoli. La sola grandezza dei lati non definisce la configurazione della



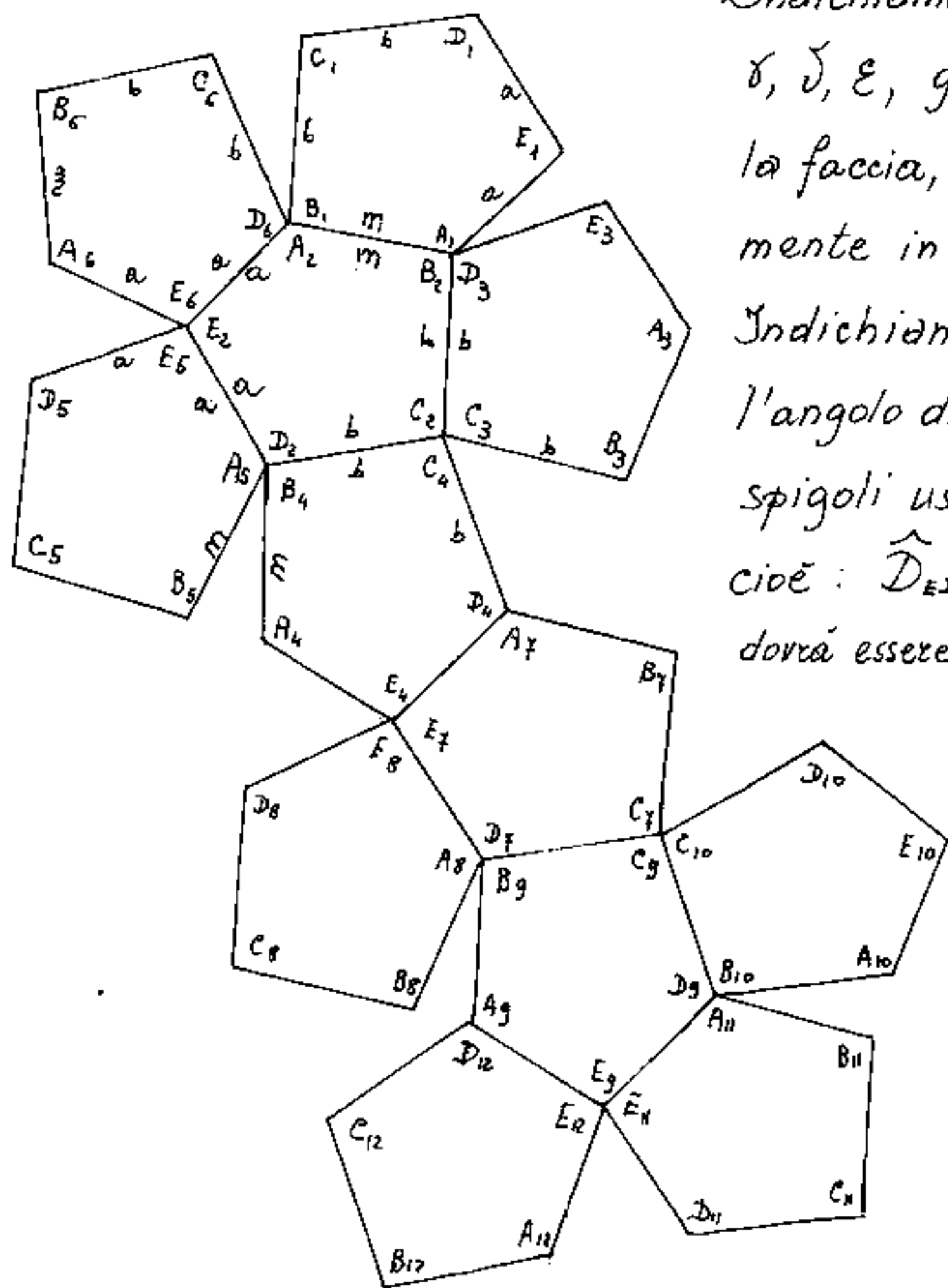
faccia, infatti con gli stessi lati si possono avere infinite configurazioni:  $ABCDE$ ,  $AB(C)(D)(E)$ , e da queste distinguere quelle per le quali è possibile il solido, se ve ne sono.

Per le misure lineari si ha:

$$\boxed{0 < m < 2(a+b)}; \quad \boxed{0 < 2a < (m+2b)}; \quad \boxed{0 < 2b < (m+2a)}$$

non solo, ma per ogni triangolo in cui puo' essere scomposto il pentagono, (avente gli stessi vertici della faccia pentagonale) per l'esistenza vale il principio che ogni lato del triangolo deve essere maggiore della differenza degli altri due e minore della loro somma.

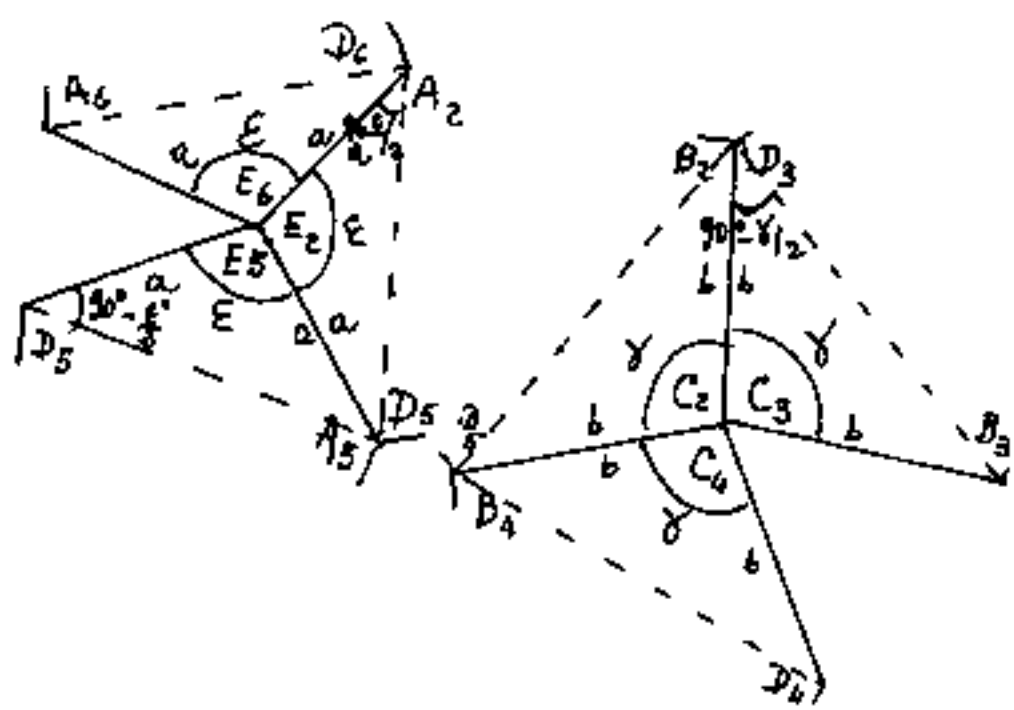
Indichiamo con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ , gli angoli della faccia, rispettivamente in  $A, B, C, D, E$ .  
 Indichiamo con  $\hat{D}_E$  l'angolo diedro sugli spigoli uscenti da  $E$ ,  
 cioè:  $\hat{D}_{ED} = \hat{D}_{EA}$   
 dovrà essere:  $\hat{D}_{ED} = \hat{D}_{DE}$ ,  
 $\hat{D}_{EA} = \hat{D}_{AE}$



Indichiamo con  $\hat{D}_C$  il diedro sugli spigoli uscenti da C, cioè:  $\hat{D}_{CB} = \hat{D}_{CD}$ ; indichiamo con  $\hat{D}_{AB}$  l'angolo diedro sullo spigolo  $\overline{AB}$  che congiunge i vertici ABD.

Nel solido vi sono 4 vertici C; 4 vertici E; e 12 vertici ABD.

Si noti che i vertici "E" ed i vertici "C", possono considerarsi vertici di piramidi a base triangolare equilatera rispettivamente di lato  $\overline{AD}$  e  $\overline{BD}$ . e di spigoli rispettivamente uguali  $\overline{ED} = \overline{EA} = a$  ed  $\overline{CD} = \overline{CB} = b$ ; come si può vedere in figura.



Ricordando che il calcolo dei diedri si è ricavato prima con la formula del coseno in trigonometria sferica, poi col calcolo

dell'altezza relativa allo spigolo per facce triangolari, per i nostri diedri avremo:

$$\hat{D}_{AB} = \arccos \left( \frac{\cos \delta - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right)$$

$$\hat{D}_E = 2 \arcsin \left( \frac{1}{2 \cos \epsilon/2} \right) ; \quad \hat{D}_C = 2 \arcsin \left( \frac{1}{2 \cos \delta/2} \right)$$

si può anche scrivere:

$$\cos(\hat{D}_E) = \frac{1}{1 + 1/\cos(\epsilon)}$$

$$\cos(\hat{D}_C) = \frac{1}{1 + 1/\cos(\delta)}$$

Si deve però notare che gli spigoli uscenti da E o gli spigoli uscenti da C hanno l'altro estremo nei vertici ABD ove le facce che vi convergono hanno angoli diversi, in base ai quali si possono calcolare i diedri:

$$\hat{D}_E = \arccos \left( \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} \right)$$

$$\left( \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos \epsilon}} \right) = \cos \hat{D}_E$$

$$\hat{D}_C = \arccos \left( \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \right)$$

$$\left( \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos \epsilon}} \right) = \cos \hat{D}_C$$

Poiché sullo stesso spigolo gli angoli diedri debbono essere costanti il confronto fra le due espressioni implica una correlazione angolare che condiziona: "essere piane" le superfici delimitate dagli spigoli interessati e quindi essere piana la superficie delle facce.

Per determinare una faccia pentagonale piana occorrono 7 elementi di cui almeno una misura lineare. Per figure simili avremo dei coefficienti: nel nostro caso potremmo porre  $b = Km$ ;  $a = Hm$ , se consideriamo " $m$ " come modulo unitario.

Poiché " $a$ " e " $b$ " sono le misure di coppie di lati, con i coefficienti: " $H$ " e " $K$ " copriamo ben 5 misure lineari quindi bastano due angoli (per es.  $\epsilon, \delta$ ) per definire la faccia. Se poniamo  $\hat{D}_E = \hat{D}_C$  (uguaglianza di diedri)  $\epsilon = \delta = \varphi$ ; per cui:  $K, H, \varphi$  definiscono la faccia.

Perché nei vertici E o C vi sono tre angoli di faccia uguali ( $3\varepsilon$  o  $3\delta$ ) questi angoli dovranno essere minori di  $360^\circ$  affinché il vertice non sia piano:  $3\varepsilon < 360^\circ$ ;  $3\delta < 360^\circ$  e quindi per  $\varepsilon = \delta = \varphi$  (diedri uguali)  $3\varphi < 360^\circ$ ; cioè:  $\boxed{\varphi < 120^\circ}$  anche  $\boxed{\varepsilon < 120^\circ}$ ; anche  $\boxed{\delta < 120^\circ}$

vediamo alcuni valori caratteristici di  $\varphi$  in vertici a 3 facce

per $\varphi = 60^\circ$	si ha:	$\hat{D}_\varphi = 70^\circ 31' 43,6''$	tetraedro
$\varphi = 90^\circ$	"	$\hat{D}_\varphi = 90^\circ$	cubo
$\varphi = 108^\circ$	"	$\hat{D}_\varphi = 116^\circ 33' 54,1''$	dodecaedro regolare
$\varphi = 109^\circ 28' 16''$	"	$\hat{D}_\varphi = 120^\circ$	romboedro
$\varphi = 115^\circ 15' 47,4''$	"	$\hat{D}_\varphi = 138^\circ 07' 04,65''$	trapezoedro
$\varphi = 120^\circ$	"	$\hat{D}_\varphi = 180^\circ$	le facce sono in piano

Ma anche per i vertici ABD dovrà essere:  $(\alpha + \beta + \delta) < 360^\circ$  affinché siano convessi, quindi  $540^\circ - (\alpha + \beta + \delta) > 180^\circ$ ;  $540^\circ - 2\varphi < 360^\circ$   
 $\varphi > \frac{540 - 360}{2}$ ;  $\varphi > 90^\circ$ , cioè le condizioni di possibilità di un solido a diedri uguali per cui:  $\varepsilon = \delta = \varphi$

impongono:  $\boxed{90^\circ < \varphi < 120^\circ}$

La condizione che le facce si mantengano piane nel solido:

$$\cos(\hat{D}_E) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos\varphi}} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\delta}{\text{sen}\alpha\text{sen}\delta} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\delta}{\text{sen}\beta\text{sen}\delta} = \cos(\hat{D}_C)$$

sviluppando si ha:

$$\text{sen}\beta\cos\beta - \text{sen}\beta\cos\alpha\cos\delta = \text{sen}\alpha\cos\alpha - \text{sen}\alpha\cos\beta\cos\delta$$

$$(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha) \cos \delta = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \beta \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \cos \delta = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen} 2\beta}{2}$$

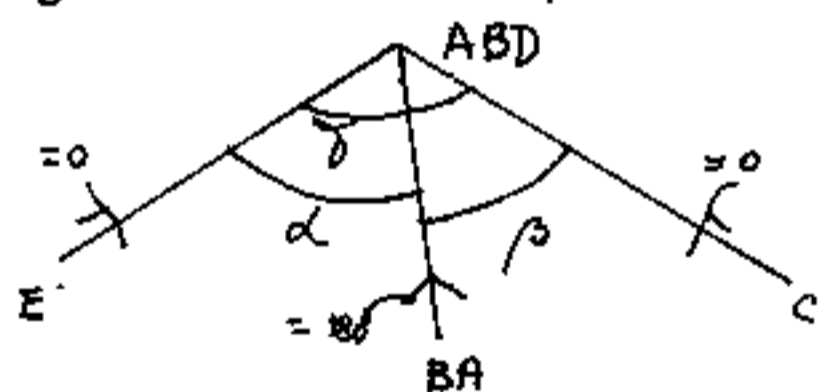
$$\boxed{\cos \delta = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen} 2\beta}{2 \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}}$$

ma, per le formule di prostaferesi:

$$\cos \delta = \frac{\cancel{2} \cos(\alpha + \beta) \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cancel{2} \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}$$

$$\boxed{\delta = \alpha + \beta}$$

Questa relazione, (indipendente da  $\varphi$ ) è tale che i diedri nel vertice ABC ove convergono gli angoli:  $\alpha, \beta, \delta$ ; risultino piani ( $180^\circ$  o  $0^\circ$ ) come



si vede in figura ove l'angolo  $\delta$  copre la somma degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ .

Qualora  $\delta > \alpha + \beta$  sarebbe impossibile il collegamento degli spigoli quindi  $\{\delta < \alpha + \beta ; |\delta| > |\alpha - \beta|\}$ .

Risulta quindi impossibile avere diedri uguali in un solido a facce piane avente due coppie diverse di lati uguali ed uno diverso.

Noi abbiamo posto  $\hat{D}_E = \hat{D}_C$  da cui:  $E = \delta = \varphi$ , e per la condizione di: "facce piane": ( $\delta = \alpha + \beta$ ).

Si osserva però che all'inizio abbiamo trattato

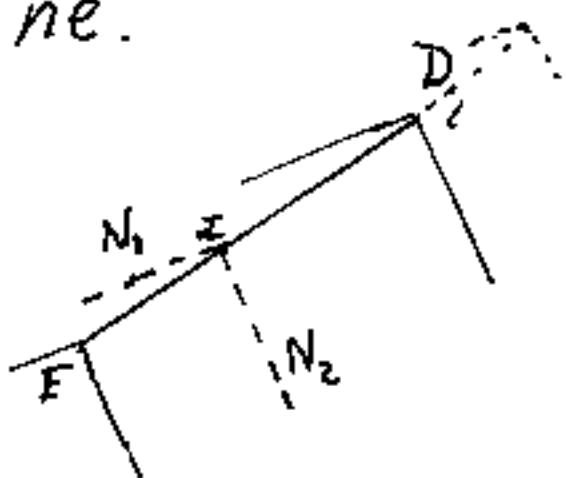
un solido simmetrico ove:  $a=b$  e quindi  $\alpha=\beta$ , ove  
 cio' era possibile in una molteplicita' di casi.

Per chiarire cio' basta notare che l'espressione:

$$\cos \delta = \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{2 \sin(\alpha - \beta)}$$

al limite di  $\alpha=\beta$  diventa una forma in-  
 determinata:  $\frac{0}{0}$ , che puo' assumere va-  
 lori reali, e che la semplificazione della  
 formula trasformata dalla prostaferesi e'  
 una divisione del valore di  $\frac{0}{0}$  percio'  
 la formula:  $\delta = (\alpha + \beta)$  non vale per  $\alpha = \beta$ .  
 ma vale per  $\alpha \neq \beta$ . ( $\varepsilon = \delta = \varphi$ )

Per meglio convincersi tratteremo  
 il modello di un solido a facce non pia-  
 ne.



Per meglio capire questo  
 concetto consideriamo due  
 piani aventi in comune lo  
 spigolo:  $\overline{ED}$ ; le rette per-

pendicolari ad  $\overline{ED}$  (giacenti su piani perpendi-  
 colari ad  $\overline{ED}$ ) formano sempre lo stesso angolo  
 $\widehat{N_1 I N_2}$  qualunque sia il punto I della retta  
 su cui giace  $\overline{ED}$  ed e' pari al diedro percio': se  
 le facce sono piane deve essere:  $\widehat{\delta}_{ED} = \widehat{\delta}_{DE} = \widehat{N_1 I N_2}$ .



L'aver posto:  $\varepsilon = \gamma = \varphi$  fa decadere il caso 7)

Consideriamo in generale se è possibile il caso 7), per la compatibilità degli angoli diedri.

Cioè consideriamo:  $\varepsilon \neq \gamma$ :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\cos \varepsilon}} = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta} > \left(1 + \frac{1}{\cos \varepsilon}\right) = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta}{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\cos \gamma}} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta}{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta} > \left(1 + \frac{1}{\cos \gamma}\right) = \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta}{\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^\circ$$

$$\frac{1}{\cos \varepsilon} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta + \cos \alpha \cos \delta - \cos \beta}{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta} = \frac{\cos(\alpha - \delta) - \cos \beta}{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta}$$

$$\frac{1}{\cos \gamma} = \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta + \cos \beta \cos \delta - \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta} = \frac{\cos(\beta - \delta) - \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta}$$

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta}{\cos(\alpha - \delta) - \cos \beta}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta}{\cos(\beta - \delta) - \cos \alpha}$$

formule fondamentali  
per la verifica della  
possibilità di un so-  
lido a facce piane

Quindi le due equazioni sono condizionate dalla:  $(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = 540^\circ$  e dalle limitazioni:

$$\varepsilon < 120^\circ$$

$$\gamma < 120^\circ$$

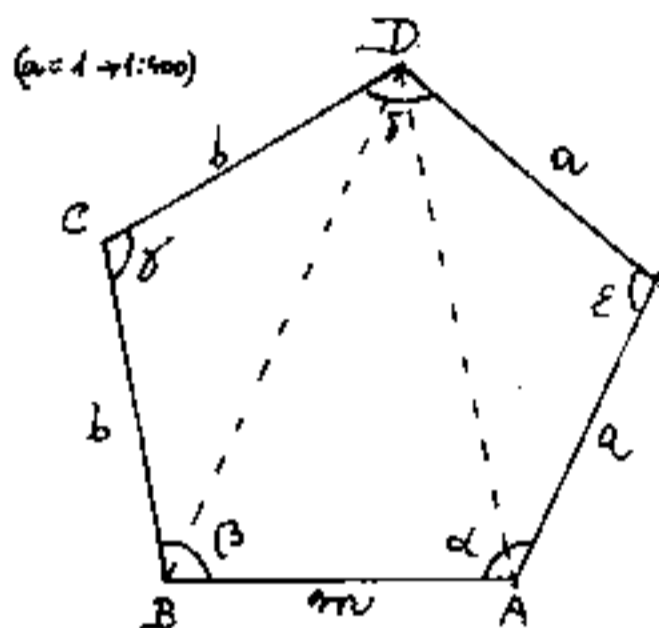
$$\alpha + \beta + \delta < 360^\circ$$

Il sistema può risolversi per tentativi. A tal fine facciamo un esempio numerico.

Fissiamo (arbitrariamente):  $\alpha = 115^\circ$  ;  $\beta = 100^\circ$  ,  
 affinché sia verificato il sistema ne consegue:

$$\delta = 109,4588207^\circ ; \gamma = 109,9373425^\circ ; \epsilon = 105,6037867^\circ$$

Da ciò deduciamo: (posto  $a = \overline{AE} = \overline{ED}$ )



$$(90^\circ - \gamma/2) = \widehat{CDB} = \widehat{DBC} = 35,03132875^\circ$$

$$(90^\circ - \epsilon/2) = \widehat{ADE} = \widehat{DAE} = 37,19810665^\circ$$

$$\widehat{DBA} = 64,96867125^\circ ; \widehat{DAB} = 77,80189335^\circ$$

$$\widehat{BDA} = 37,22943530^\circ$$

$$\overline{AD} = 2a \operatorname{sen} \frac{\epsilon}{2} = 1,593099794 \cdot a$$

$$\overline{BA} = \overline{AD} \frac{\operatorname{sen} \widehat{BDA}}{\operatorname{sen} \widehat{DBA}} = m = 1,06374952 \cdot a$$

$$\overline{BD} = \overline{AD} \frac{\operatorname{sen} \widehat{BAD}}{\operatorname{sen} \widehat{DBA}} = 2b \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} = 1,718543707 \cdot a$$

$$\overline{CB} = \overline{CD} = b = 1,04937917 \cdot a$$

Verifichiamo i diedri

$$\widehat{D_E} = \arccos \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos \epsilon}} \right) = 111,5897451^\circ = \widehat{D_{AE}} = \arccos \left( \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta} \right)$$

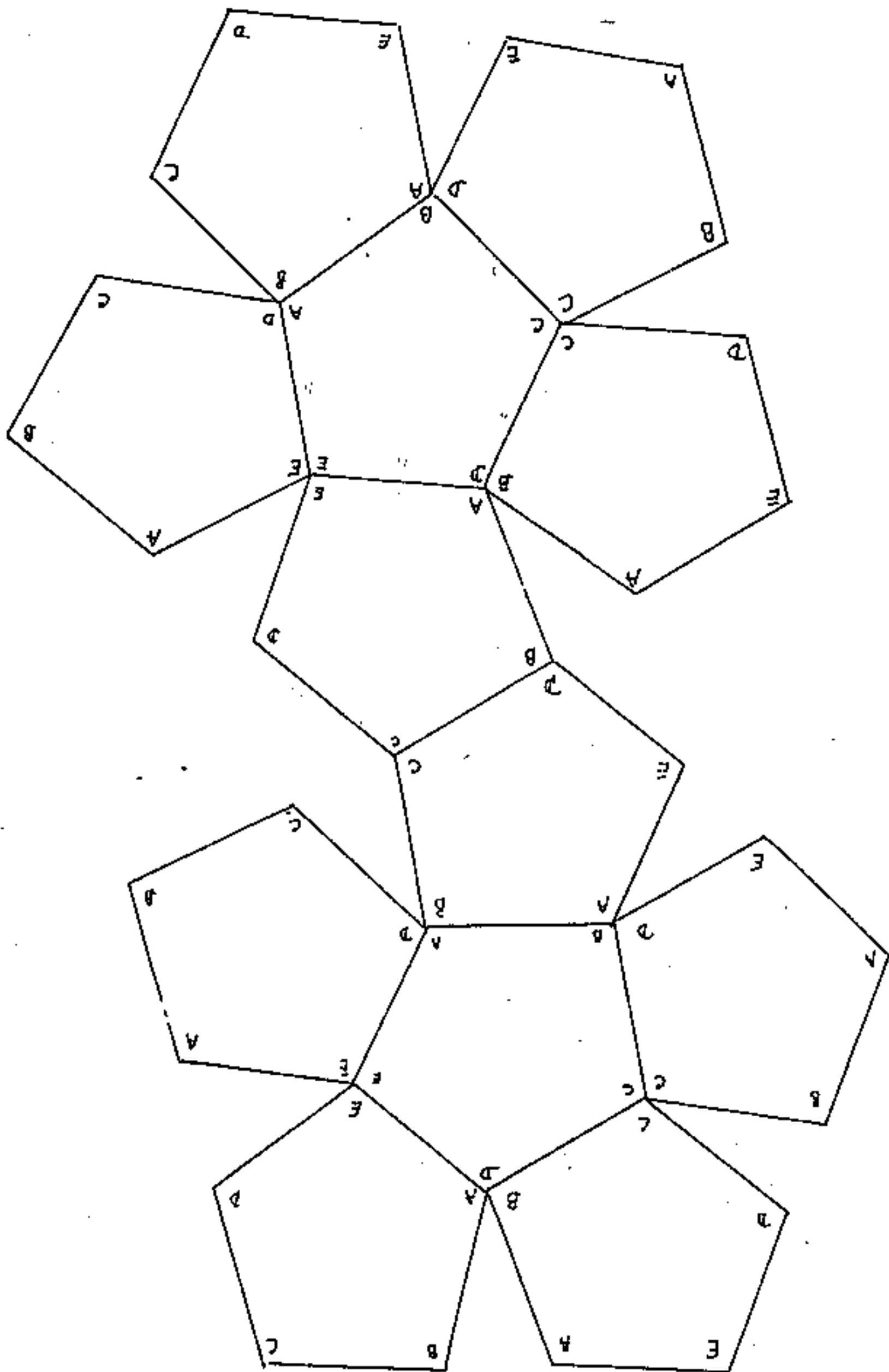
$$\widehat{D_C} = \arccos \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos \gamma}} \right) = 121,1602176^\circ = \widehat{D_{BC}} = \arccos \left( \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta}{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta} \right)$$

$$\widehat{D_{AB}} = \arccos \left( \frac{\cos \delta - \cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \right) = 117,0946229^\circ$$

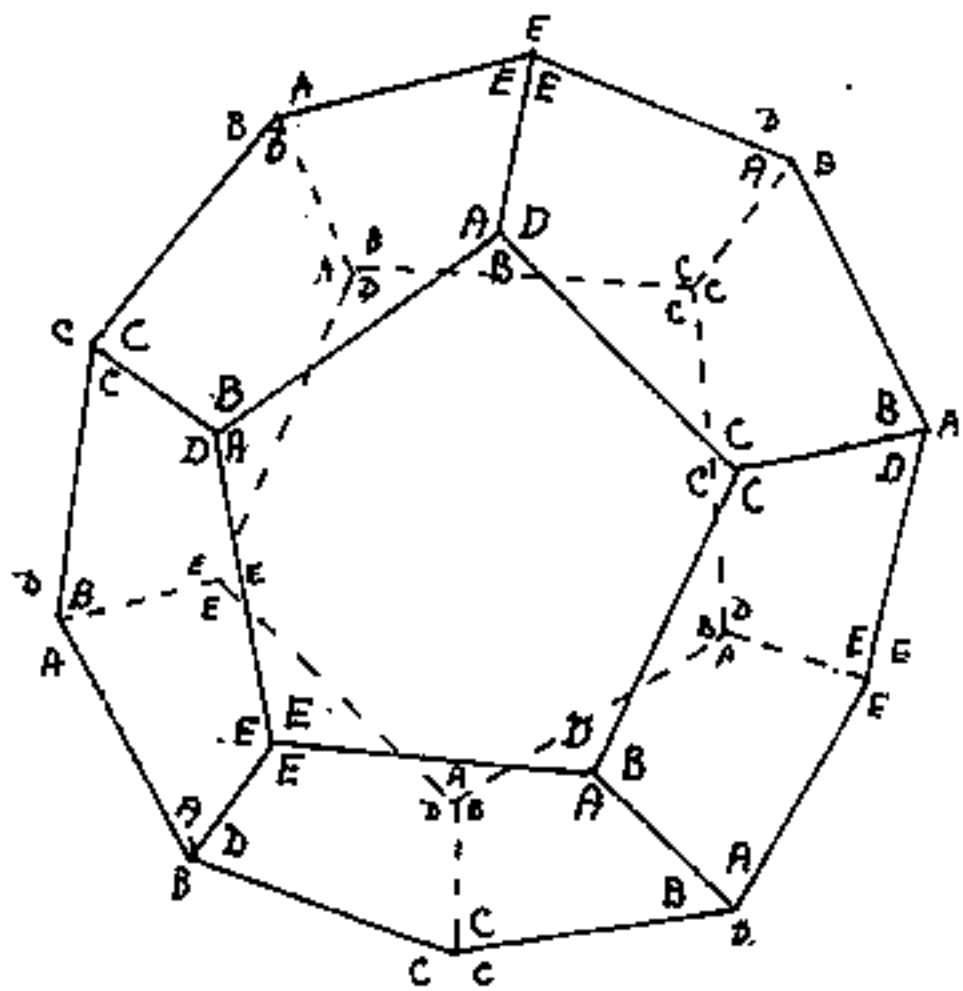
Diamo lo schema di questo solido.

# Sviluppo di PENTAGONODODECAEDRO

2 coppie contigue diverse di lati uguali, angoli  
delle facce tutti diversi, diedri tutti diversi.  
facce uguali (dati dell'esempio numerico), che  
si mantengono piane



Risulta quindi possibile la classe di solidi  
 arenti, facce pentago-  
 nali uguali, delimitate  
 da due coppie contigue  
 diverse di lati uguali,  
 ed un lato diverso.



Assegnati due angoli,  
 risultano calcolabili gli  
 altri angoli; ed i rapporti  
 fra i lati delle due

coppie e col lato diverso. Diamo la prima proiezio-  
 ne del solido calcolato nell'esempio numerico;  
 facilmente ricavabile dallo schema del modello.

Dalla proiezione è più facile evidenziare le  
 irregolarità del solido, che ha angoli delle facce ed  
 angoli diedri tutti diversi.

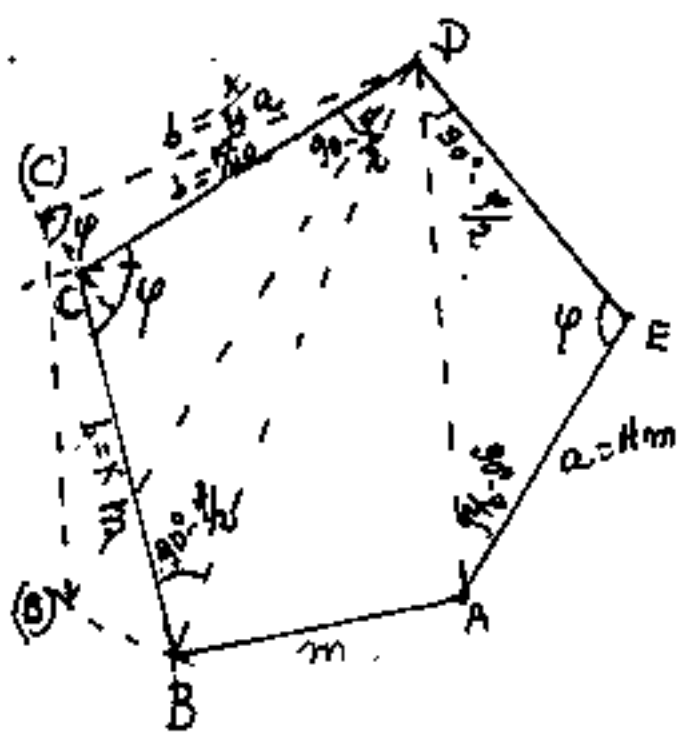
## solidi a facce curve

Noti  $\kappa, H, \varphi$ , vediamo la costruzione grafica.

sia  $\varphi = 109^\circ$ ,  $\frac{b}{a} = 1,20$ ,  $\frac{m}{a} = 0,90$  (scelti a caso).

Scelta una scala di uno scolimetro in cui  $a = 1$  partiamo da  $A$  e tracciamo il segmento  $\overline{AE} = a = 1$  in  $E$  tracciamo l'angolo  $\varphi$  che definisce la direzione  $\overline{ED}$  e su di essa riportiamo il segmento  $a = 1 = \overline{ED}$ ; resta così definito il punto  $D$ , la distanza  $\overline{DA} = 2a \sin \frac{\varphi}{2}$ ; nonché gli angoli  $\widehat{DAE} = \widehat{ADE} = (90^\circ - \frac{\varphi}{2})$ .

In  $D$  non conoscendo l'angolo, non possiamo tracciare la direzione  $\overline{DC}$ , tracciamo una direzione qualsiasi  $\overline{D(c)}$  (ove:  $(c)$  indica  $C$  spostato), su tale direzione riportiamo il segmento:  $b = 1,20 \cdot a = \overline{D(c)} = 1,20$  resta con ciò definita la posizione di  $(c)$ , ed in  $(c)$



tracciamo l'angolo  $\varphi = \widehat{D(c)(B)}$ , su  $\overline{(c)(B)}$  riportiamo il segmento  $\overline{(B)(c)} = \overline{BC} = b = 1,20 \cdot a = 1,20$ ; abbiamo così la vera distanza  $\overline{D(B)} = \widehat{DB}$  ed i veri angoli:  $\widehat{CDB} = \widehat{BCE} = \widehat{(c)D(B)} = \widehat{D(B)(c)} = (90^\circ - \frac{\varphi}{2})$ .

centro in  $A$  con apertura  $\frac{m}{a}$ , Centro in  $D$  con apertura  $\overline{D(B)}$  si determina  $B$ , e quindi  $C$  facendo centro in  $D$  e  $B$  con apertura  $b = 1,20$ .

La costruzione grafica effettuata ci permette di calcolare tutti gli elementi della faccia.

$$\varphi/2 = 54^\circ 30' 00'' ; \quad (90^\circ - \varphi/2) = 35^\circ 30' 00'' ; \quad H = 0,9 a$$

$$\overline{AD} = 2a \sin \varphi/2 = 2 \sin(109^\circ/2) = (1,628231037) a$$

$$\overline{BD} = 2b \sin \varphi/2 = 2 \cdot 1,20 a \cdot \sin(109^\circ/2) = (1,953877244) a$$

$$\hat{BDA} = \arccos \left( \frac{\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BA}^2}{2(\overline{BD})(\overline{AD})} \right) = \arccos(0,8893627637) = \underline{27^\circ 12' 24'',19}$$

$$\hat{D} = 2(90^\circ - \varphi/2) + \hat{BDA} = 71^\circ 24' 12' 24'',19 = \underline{98^\circ 12' 24'',19}$$

$$\hat{BAD} = \arccos \left( \frac{\overline{BA}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{2(\overline{BA})(\overline{AD})} \right) = \arccos(-0,121638475) = \underline{96^\circ 59' 12'',02}$$

$$\hat{A} = (\hat{BAD} + \hat{DAE}) = 96^\circ 59' 12'',02 + 35^\circ 30' 00'' = \underline{132^\circ 29' 12'',02}$$

$$\hat{DBA} = \arccos \left( \frac{\overline{BA}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2}{2(\overline{BA})(\overline{BD})} \right) = \arccos(0,561987988) = \underline{55^\circ 48' 23'',79}$$

$$\hat{B} = (\hat{DBA} + \hat{DBC}) = 55^\circ 48' 23'',79 + 35^\circ 30' 00'' = \underline{91^\circ 18' 23'',79}$$

$\hat{BDA} = 27^\circ 12' 24'',19 + ;$	$2\varphi = 218 = (C + E)$
$\hat{BAD} = 96^\circ 59' 12'',02 +$	$D = 98^\circ 12' 24'',19$
$\hat{DBA} = 55^\circ 48' 23'',79 =$	$A = 132^\circ 29' 12'',02$
$\underline{180^\circ 00' 00'',00}$	$B = 91^\circ 18' 23'',79$
	$\underline{540^\circ 00' 00'',00}$

quindi la sezione è definita nel piano, resta da vedere se si mantiene piana costruendo il solido; a tal fine calcoliamo gli angoli diedri.

$$\hat{D}_{EA} = \hat{D}_{ED} = \hat{D}_{ED} = \hat{D}_{CB} = \arccos \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos \varphi}} \right) = 118^\circ 51' 49'',7$$

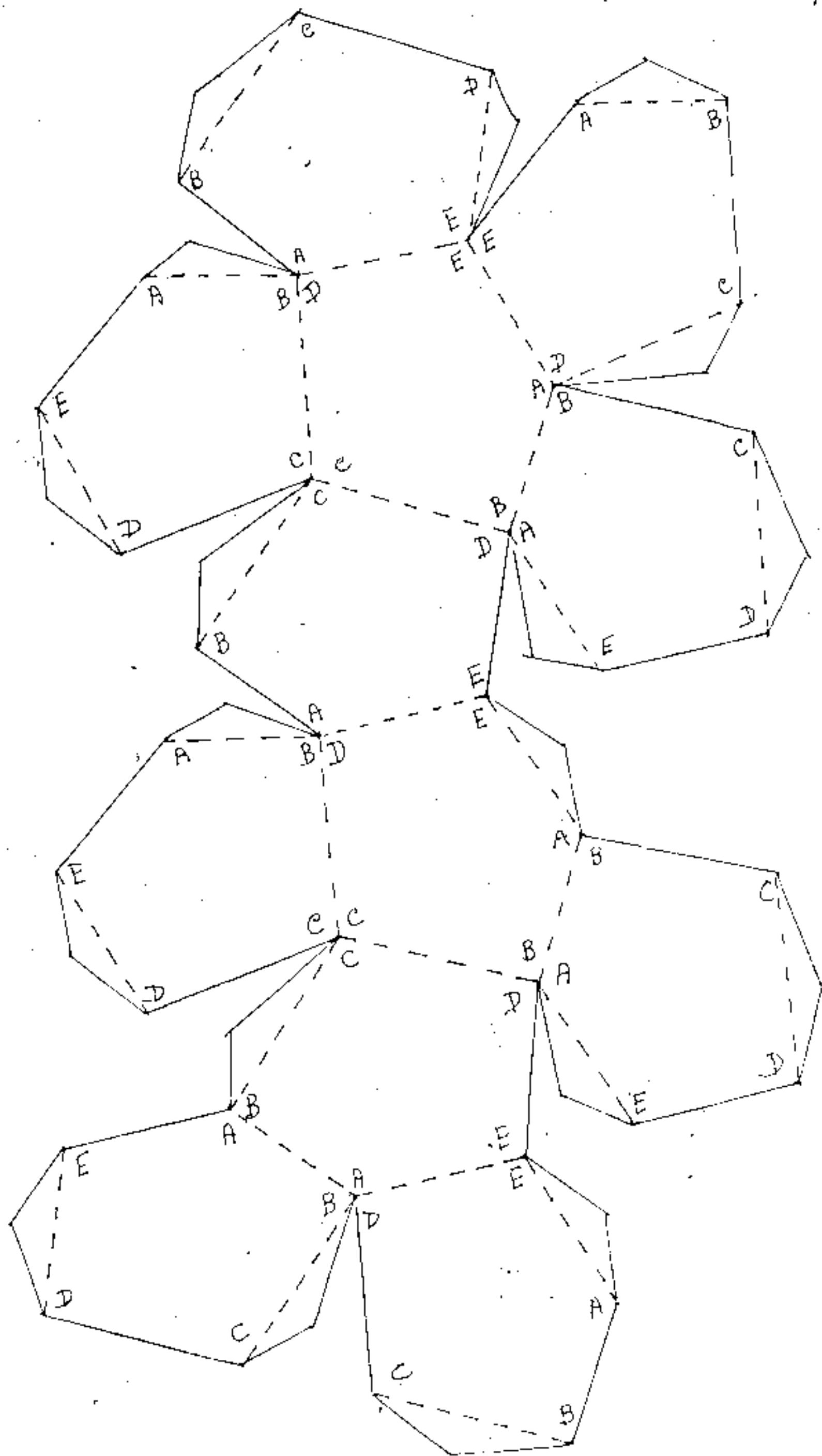
$$\hat{D}_{DB} = \arccos \left( \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta}{\sin \alpha \sin \delta} \right) = 99^\circ 24' 1'',86$$

$$\hat{D}_{DC} = \arccos \left( \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta}{\sin \beta \sin \delta} \right) = 133^\circ 18' 15'',7$$

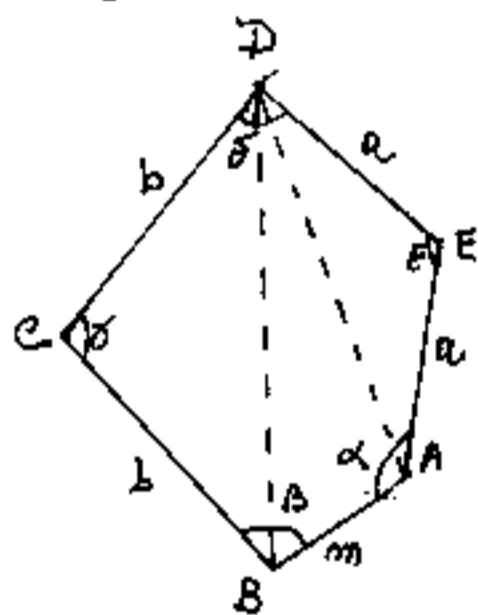
$$\hat{D}_{AB} = \arccos \left( \frac{\cos \delta - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right) = 102^\circ 23' 12'',5$$

Poiché:  $\hat{D}_{ED} \neq \hat{D}_{DE}$  e  $\hat{D}_{CD} \neq \hat{D}_{DC}$  le facce non saranno piane

Sviluppo di un pentagono-dodecaedro  
a facce non piane ( $K=1,20$ ;  $H=0,9$ ;  $\varphi=109^\circ$ )



Le formule fondamentali per la verifica che il solido sia a facce piane correlazionano solo funzioni angolari; è vero che tali funzioni possono essere espresse da relazioni di misure lineari sempre riducibili ai rapporti  $K, H$ , o simili, ma da sole valgono per tutti i solidi, mentre noi cerchiamo le condizioni del caso  $\gamma^*)$  cioè che siano piane le facce di un pentagono dodecaedro avente i lati delle facce costituiti da due coppie diverse di lati uguali e da un lato diverso.



La condizione  $\gamma^*)$  può esprimersi con le relazioni:

$$\cos \epsilon = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\overline{AD}}{a} \right)^2$$

$$\cos \delta = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\overline{BD}}{b} \right)^2$$

per definire la faccia occorre che sia noto il triangolo ABD. Quindi con elementi tutti lineari occorre conoscere:  $m, \overline{AD}, \overline{BD}, a, b$ .

Bastano 5 elementi essendo doppi  $a$  e  $b$ .

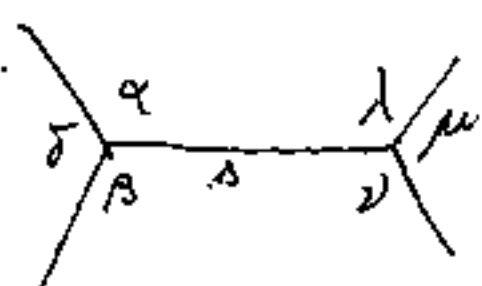
$$\cos \left( \alpha + \frac{\epsilon}{2} - 90^\circ \right) = \frac{\overline{AD}^2 + m^2 - \overline{BD}^2}{2m\overline{AD}} ; \quad \cos \left( \beta + \frac{\delta}{2} - 90^\circ \right) = \frac{\overline{BD}^2 + m^2 - \overline{AD}^2}{2m\overline{BD}}$$

Però, come si vede, facendo le sostituzioni, le espressioni tendono a complicarsi; conviene tornare alle espressioni angolari, ove fissati due angoli come  $\alpha$  e  $\beta$  si può esprimere  $\epsilon$  ed  $\delta$  in funzione di  $\gamma$ , e poiché:  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 540^\circ$ , dando



gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  troviamo tutti gli angoli che condizionano la faccia pentagonale ad essere piano quando i vertici in E ed in C del solido sono delimitati da tre facce con gli angoli piani  $\varepsilon$  e  $\delta$ .

La condizione più generale di facce piane, con vertici a tre facce ed angoli diversi



$$\tilde{e} : \frac{1}{\delta} = \frac{\cos \delta - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \mu - \cos \lambda \cos \nu}{\sin \lambda \sin \nu}$$

Noi abbiamo utilizzato la relazione:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\cos \varepsilon}} = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta}{\sin \alpha \sin \delta}$$

da cui:

$$\frac{1}{\cos \varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varepsilon} + 1} = \frac{\cos \alpha \cos \delta + \sin \alpha \sin \delta - \cos \beta}{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta}$$

ossia:

$$\varepsilon = \arctg \left( \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \delta - 2 \sin \alpha \sin \delta (\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta)}}{\cos \beta - \cos \alpha \cos \delta} \right)$$

analogamente

$$\delta = \arctg \left( \frac{\sqrt{\sin^2 \beta \sin^2 \delta - 2 \sin \beta \sin \delta (\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta)}}{\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta} \right)$$

ed il  $\delta$  per tentativi finché:  $\alpha + \beta + \delta + \delta + \varepsilon = 540^\circ = 3\pi \text{ rad}$

La condizione che le facce siano uguali fra loro implica che nei vertici E e C oltre che tre angoli uguali vi concorrano anche tre spigoli uguali, condizione del caso  $7^*$ ).

Dati  $\alpha$  e  $\beta$  (possibili), la risoluzione per i restanti angoli è unica ed indipendente dalle dimensioni lineari, che però debbono consentire la costruzione del solido.

Abbiamo visto che il caso  $\gamma^*$  è il più generale che consenta lo schema di sviluppo, sulla base di due coppie diverse di lati uguali ed un terzo lato diverso. Però le faccie in piano dello sviluppo, diventano curvilinee se non è rispettata la legge sugli angoli diedri:  $\hat{D}EA = \hat{D}AE$ .

Per costruire la figura è necessario avere le dimensioni dei lati di coppia per esempio:  $a$  e  $b$  allora  $\overline{AD} = 2a \operatorname{sen} \frac{\epsilon}{2}$ ;  $\overline{BD} = 2b \operatorname{sen} \frac{\epsilon}{2}$ ;  $\hat{ADE} = 90^\circ - \frac{\epsilon}{2}$   
 $\hat{BDC} = 90 - \frac{\gamma}{2}$ ;  $\hat{ADB} = \delta + \frac{\epsilon + \gamma}{2} - 180^\circ$ ; quindi se noti  $a$  e  $b$  resta definito  $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2(\overline{AD} \times \overline{BD}) \cos \hat{ADB}}$ .

Con gli angoli occorrono relazioni lineari per poter disegnare la faccia. (cioè gli angoli danno i K)

Se prendiamo un angolo fisso, per esempio:

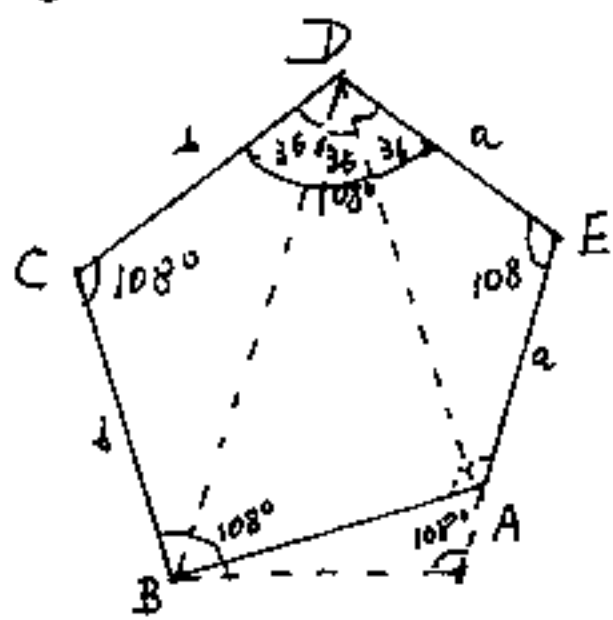
$\alpha = 108 = 540/5$  sappiamo che per le limitazioni già esposte:  $(\alpha + \beta + \delta) < 360^\circ$  quindi:  
 $(\beta + \delta) < 252^\circ$ ; ma interessa che gli angoli oscillino intorno a  $108^\circ = \frac{3}{5} \pi \text{ rad.}$ ; su tale base si è costruita la seguente tabella:

Tabella di pentagonododecaedri a facce piane e vertici di 3 facce

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\epsilon$	Note
$108^\circ$	$101^\circ$	$108^\circ 4' 53",86$	$115^\circ 41' 20",46$	$106^\circ 13' 45",68$	$\frac{b}{a} = 1,03126098035$
$108^\circ$	$102^\circ$	$108^\circ 6' 2",51$	$115^\circ 24' 31",8$	$106^\circ 29' 25",69$	$\frac{b}{a} = 1,02544946255$
$108^\circ$	$103^\circ$	$108^\circ 6' 33",36$	$114^\circ 8' 32",23$	$106^\circ 44' 54",42$	$\frac{b}{a} = 1,02011289977$
$108^\circ$	$104^\circ$	$108^\circ 6' 27",11$	$112^\circ 53' 20",07$	$107^\circ 0' 12",83$	$\frac{b}{a} = 1,015233809995$
$108^\circ$	$105^\circ$	$108^\circ 5' 44",32$	$111^\circ 38' 53",9$	$107^\circ 15' 21",78$	$\frac{b}{a} = 1,01079644855$
$108^\circ$	$106^\circ$	$108^\circ 4' 25",39$	$110^\circ 25' 12",47$	$107^\circ 30' 22",14$	$\frac{b}{a} = 1,00678564144$
$108^\circ$	$107^\circ$	$108^\circ 2' 30",58$	$109^\circ 12' 14",78$	$107^\circ 45' 14",64$	$\frac{b}{a} = 1,00313164092$
$108^\circ$	$108^\circ$	$108^\circ$	$108^\circ$	$108^\circ$	(1) <u>dodecaedro regolare</u>
$108^\circ$	$109^\circ$	$107^\circ 56' 53",65$	$106^\circ 48' 27",46$	$108^\circ 14' 38",89$	$\frac{b}{a} = 0,99720146289$
$108^\circ$	$110^\circ$	$107^\circ 53' 11",41$	$105^\circ 37' 36",7$	$108^\circ 29' 11",89$	$\frac{b}{a} = 0,99478686916$
$108^\circ$	$111^\circ$	$107^\circ 48' 53",03$	$104^\circ 27' 27",37$	$108^\circ 43' 39",6$	$\frac{b}{a} = 0,9927480695$
$108^\circ$	$112^\circ$	$107^\circ 43' 58",14$	$103^\circ 17' 59",32$	$108^\circ 58' 2",54$	$\frac{b}{a} = 0,9910778519$
$108^\circ$	$113^\circ$	$107^\circ 38' 26",27$	$102^\circ 9' 12",54$	$109^\circ 12' 21",19$	$\frac{b}{a} = 0,989769876$
$108^\circ$	$114^\circ$	$107^\circ 32' 16",85$	$101^\circ 1' 7",15$	$109^\circ 26' 36"$	$\frac{b}{a} = 0,98881861546$
$108^\circ$	$115^\circ$	$107^\circ 25' 29",18$	$99^\circ 53' 43",435$	$109^\circ 40' 47",38$	$\frac{b}{a} = 0,9882193065$

I valori degli angoli riportati in tabella, si riferiscono a solidi che hanno due coppie diverse di lati uguali. ed un lato diverso che è  $\overline{AB}$ , perciò gli spigoli ad angoli uguali convergeranno nei vertici: C ed E. Se gli spigoli "a" convergono in E e gli spigoli "b" =  $Ka$  convergono in "C" il valore di K non è arbitrario, ma dipende dagli angoli scelti.

Per evidenziare ciò consideriamo il caso particolare di  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \epsilon = 108^\circ$  (dodecaedro regolare.) e supponiamo di fissare arbitrariamente

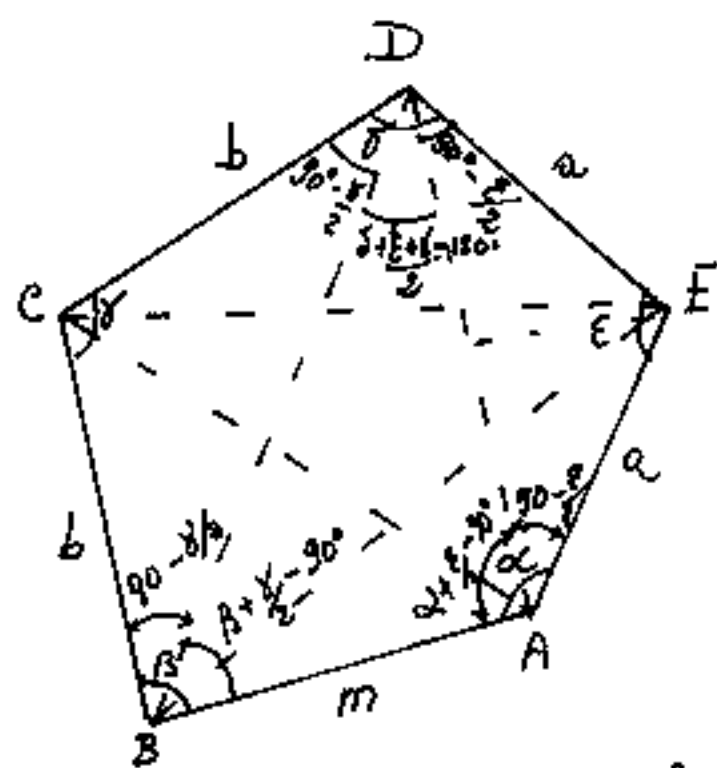


$K = 1,25$  per i lati uscenti da D  
avremo un caso  $\gamma$  però con  $\alpha$  e  $\beta$   
diversi da  $108^\circ$ :  $\beta = 89,12111575$ ;  
 $\alpha = 126,87888425$ . (facce curve)

Se invece manteniamo gli angoli di  $108^\circ$  ed il  $K = 1,25$  per i lati uscenti da D, avremo che  $\overline{EA}$  sarà maggiore di "a" e quindi solo due lati uguali (b) impossibile a costruire il solido, (non è il caso  $\gamma^*$ )

Dobbiamo quindi cercare di ricavare  $K = b/a$  in funzione degli angoli che accertano la planarità delle facce.

Consideriamo una faccia pentagonale in cui sono noti tutti e solo gli angoli  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ; sappiamo inoltre che i lati:  $\overline{AE} = \overline{ED} = a$ ;  $\overline{BC} = \overline{CD} = b$



$\overline{AB} = m$ ; sono incogniti.

Porremo:  $b/a = K$  ed  $(a=1)$

$$\hat{A}BD = \beta + \frac{\gamma}{2} - 90^\circ$$

$$\hat{B}AD = \alpha + \frac{\epsilon}{2} - 90^\circ$$

$$\overline{CE}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

$$\overline{CE}^2 = a^2 (1 + K^2 - 2K \cos(\gamma))$$

$$m^2 = \overline{AB}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 - 2(\overline{DA})(\overline{DB}) \cos(\delta + \epsilon + \gamma - 180^\circ)$$

$$\overline{DA} = 2a \operatorname{sen} \frac{\epsilon}{2}; \quad \overline{DB} = 2b \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}; \quad 2(\overline{DA})(\overline{DB}) = 8a^2 K \operatorname{sen} \frac{\epsilon}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}$$

$$m^2 = \overline{AB}^2 = 4a^2 \left( \operatorname{sen}^2 \frac{\epsilon}{2} + K^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} - 2K \operatorname{sen} \frac{\epsilon}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \operatorname{sen}(\delta + \epsilon + \gamma) \right)$$

$$\frac{m}{\operatorname{sen}(\delta + \epsilon + \gamma - 180^\circ)} = \frac{\overline{DB}}{\operatorname{sen}(\alpha + \frac{\epsilon}{2} - 90^\circ)} = \frac{\overline{DA}}{\operatorname{sen}(\beta + \frac{\gamma}{2} - 90^\circ)}$$

$$\frac{m}{\operatorname{sen}(\delta + \epsilon + \gamma)} = \frac{a(2K \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2})}{\cos(\alpha + \frac{\epsilon}{2})} = \frac{a(2 \operatorname{sen} \frac{\epsilon}{2})}{\cos(\beta + \frac{\gamma}{2})}$$

$$\frac{b}{a} = K = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\epsilon}{2}) \cos(\alpha + \frac{\epsilon}{2})}{\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \cos(\beta + \frac{\gamma}{2})}$$

Formula che consente di calcolare K dai valori di  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ . ( $\delta = 540 - \alpha - \beta - \gamma - \epsilon$ )

Quando  $\alpha = \beta = \epsilon = \gamma$  si ha  $K = 1$ ;  $m = 1$ , ed il solido è un dodecaedro regolare.

D'altra parte:

$$\frac{m}{a} = \frac{2 \sin(\frac{\epsilon}{2}) \sin(\frac{\delta + \epsilon + \gamma}{2})}{\cos(\beta + \frac{\delta}{2})}$$

Con ciò restano definiti i rapporti fra i lati delle facce pentagonali.

Per avere il caso 9) basterà calcolare la condizione:  $(\frac{m}{a} = 1)$

Per avere il caso 10) potremo:  $(\frac{b}{a} = 1)$

Per avere il caso 11):  $(\frac{m}{a} = \frac{b}{a} = 1)$

Occorre notare che dati gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ , per tentativi si risolve il sistema che fornisce gli angoli  $\delta, \epsilon, \gamma$ , tali da avere solidi con facce piane.

Pero' oltre le limitazioni sui valori degli angoli di cui abbiamo già trattato, occorre considerare altre limitazioni: Se fissiamo un valore di  $\alpha$  per es.  $\alpha = 108^\circ$  (Per tenersi nel campo del dodecaedro regolare), avremo che  $\beta$  deve essere  $\beta > 73,5233$  affinché esistano diedri convessi; e deve essere  $\beta < 145,3454714152567$ . affinché  $m > 0$  cioè la figura pentagonale non degeneri prima in un quadrilatero. cioè:

$$73^\circ 31' 23,8 < \beta < 145^\circ 20' 47,3.$$

si riporta una tabella con  $\alpha = 108^\circ$ , ove si può notare

**T A B E L L A**  
**di pentagonododecaedri a facce piane**

$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\epsilon$	$\phi$	$b/a$	$m/a$	
108	74	164.8303261	94.777737	98.391937	1.614512	2.65832	← <i>lim.</i>
108	76	158.4139993	95.598013	100.987988	1.489845	2.44845	
108	78	153.3827324	97.946234	102.671034	1.402810	2.28456	
108	80	149.0482114	99.055293	103.896495	1.335446	2.14581	
108	82	145.1472363	100.014857	104.837907	1.280736	2.02368	
108	84	141.5466712	100.870726	105.582602	1.235058	1.91362	
108	86	138.1686229	101.650046	106.181331	1.196254	1.81281	
108	88	134.9632021	102.370487	106.666311	1.162917	1.71937	
108	90	131.8964290	103.044331	107.059240	1.134067	1.63192	
108	92	128.9441231	103.680537	107.375340	1.108999	1.54946	
108	94	126.0885200	104.285892	107.625588	1.087180	1.47119	
108	96	123.3162666	104.865694	107.818039	1.068204	1.39650	
108	98	120.6171684	105.424182	107.958650	1.051750	1.32486	
108	100	117.9833749	105.964816	108.051809	1.037567	1.25587	
108	102	115.4088327	106.490469	108.100698	1.025449	1.18916	
108	104	112.8889094	107.003561	108.107530	1.015234	1.12445	
108	106	110.4201316	107.506149	108.073720	1.006787	1.06147	
108	108	108.0000000	108.000000	108.000000	1.000000	1.00000	(dodecaedro regolare)
108	110	105.6268599	108.486637	107.886503	0.994787	0.93986	
108	112	103.2998121	108.967372	107.732816	0.991078	0.88087	
108	114	101.0186526	109.443333	107.538014	0.988819	0.82290	
108	116	98.7838360	109.915476	107.300688	0.987968	0.76581	
108	118	96.5964547	110.384592	107.018953	0.988496	0.70951	
108	120	94.4582309	110.851313	106.690457	0.990383	0.65391	
108	122	92.3715171	111.316101	106.312382	0.993620	0.59893	
108	124	90.3392997	111.779245	105.881455	0.998204	0.54452	
108	126	88.3652030	112.240845	105.393952	1.004141	0.49065	
108	128	86.4534860	112.700793	104.845721	1.011446	0.43728	
108	130	84.6090271	113.158759	104.232213	1.020138	0.38441	
108	132	82.8372884	113.614170	103.548541	1.030245	0.33207	
108	134	81.1442531	114.066192	102.789555	1.041800	0.28027	
108	136	79.5363254	114.513722	101.949953	1.054842	0.22907	
108	138	78.0201903	114.955381	101.024429	1.069418	0.17854	
108	140	76.6026253	115.389530	100.007845	1.085580	0.12874	
108	142	75.2902700	115.814294	98.895436	1.103387	0.07978	
108	144	74.0893583	116.227607	97.683035	1.122909	0.03176	
108	146	73.0054316	116.627277	96.367292	1.144220	-0.01524	← <i>lim.</i> $m/a = 0$
108	148	72.0430556	117.011067	94.945878	1.167409	-0.06109	
108	150	71.2055693	117.376786	93.417645	1.192575	-0.10572	
108	152	70.4948933	117.722382	91.782725	1.219835	-0.14904	

*che oltre i limiti di  $\beta$  anche  $b/a$  ammette un minimo per  $\beta$  intorno a 115°, e che vi sono limiti su  $m/a$ .*

Il valore di  $b/a$  per  $\alpha = 108^\circ$  e  $\beta = 116^\circ, 2285$  è  $0,987958923$ ; come si vede spingendo i calcoli ad una maggiore precisione, non si ottiene una notevole differenza. Per il limite di  $m/a$ , i valori negativi in tabella, ci avvertono che per valori intermedi di  $\beta$  fra  $144^\circ$  e  $146^\circ$  v'è il valore esatto di  $m = \text{zero}$ . —

Abbiamo esposto una tabella ad  $\alpha = 108^\circ = \text{cost.}$  e  $\beta$  variabile, condizionato solo dall'uguaglianza dei diedri calcolati agli estremi opposti di uno stesso spigolo, Imponiamo ora anche la condizione:  $m > 0$  cioè che il pentagono non si riduca a quadrilatero ( $m=0$ ) o a poligono intrecciato ( $m < 0$ ). Dalle tabelle che esporremo figura fissata  $\alpha$  e per ogni  $\alpha$  tutti i possibili valori di  $\beta$  in quel campo esposti con salto di  $5^\circ$  in  $5^\circ$  gradi.

Se pensiamo di rovesciare il disegno della faccia  $\beta$  diretta  $\alpha$ ,  $\epsilon$  diventa  $\delta$ , fermo il valore di  $\delta$ , mentre  $b/a$  diventa:  $a/b$  ed  $m/a$  diventa  $m/b$ .

Figurano in tabella anche i casi limite ove  $\delta = 180^\circ$  e  $\epsilon = \delta = 90^\circ$ . Dalla tabella è rilevabile il caso 10) quando  $b/a = 1$ ; oppure il caso 9) (che si può vedere per  $\alpha = 100$ , per  $\beta$  fra  $115^\circ$  e  $120^\circ$ ; oppure con  $\alpha = 90^\circ$  e  $\beta$  fra  $125$  e  $130$ , ecc.)

Il valore max di  $\beta$  si ha per  $\alpha = 100^\circ$  e  $\beta = 150^\circ$ , il max  $\alpha = 125$  supponendo  $\alpha = \beta$  e ricordando che possono invertirsi.



## di pentagonododecaedri a facce piane

angoli delle facce					rapporto lati		angoli diedri	
$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\epsilon$	$\zeta$	b/a	m/a	DB	DC
75	105	180.000001	90.000000	89.999999	0.577350	1.63299	90.000000	90.000001
75	110	155.829005	102.192263	96.976733	0.658083	1.61901	105.529644	97.949782
80	100	180.000001	90.000000	89.999999	0.700208	1.72644	90.000000	90.000001
80	105	155.730732	101.474191	97.795077	0.746684	1.66843	104.378412	99.027736
80	110	145.216676	105.185941	99.597384	0.750000	1.56518	110.788916	101.541764
80	115	136.907835	107.782139	100.310026	0.754705	1.46135	116.083105	102.590933
85	95	180.000001	90.000000	90.000000	0.839100	1.84612	90.000000	90.000000
85	100	155.667610	100.761150	98.571241	0.841390	1.73358	103.272440	100.086923
85	105	145.063092	104.313911	100.622997	0.828132	1.60633	109.173788	103.062267
85	110	136.829929	106.824613	101.545458	0.821066	1.48485	114.038265	104.490953
85	115	129.335977	108.835957	101.828066	0.820428	1.36811	118.476540	104.940920
85	120	122.818441	110.547936	101.633623	0.826089	1.25494	122.738830	104.630695
85	125	116.924981	112.056523	101.018496	0.838043	1.14445	126.965577	103.667458
90	90	180.000001	90.000000	90.000000	1.000000	2.00000	90.000000	90.000000
90	95	155.636743	100.045168	99.318089	0.944451	1.81747	102.197153	101.139412
90	100	144.973370	103.430903	101.595727	0.910863	1.66140	107.610560	104.570560
90	105	136.450281	105.847191	102.702528	0.889759	1.51948	112.064698	106.371800
90	110	129.030491	107.799932	103.169577	0.878184	1.38686	116.122226	107.161023
90	115	122.344612	109.477470	103.177918	0.874721	1.26071	120.015311	107.175282
90	120	116.232122	110.971717	102.796161	0.878667	1.13917	123.876660	106.528588
90	125	110.627311	112.332802	102.039887	0.889751	1.02101	127.797040	105.282100
90	130	105.519050	113.588140	100.892810	0.908008	0.90554	131.844356	103.473959
95	85	180.000001	90.000000	90.000000	1.191754	2.20013	90.000000	90.000000
95	90	155.636743	99.318089	100.045168	1.058816	1.92437	101.139412	102.197153
95	95	144.943859	102.528071	102.528071	1.000000	1.73283	106.081553	106.081553
95	100	136.362104	104.841175	103.796721	0.962046	1.56668	110.141505	108.249739
95	105	128.851360	106.725752	104.422888	0.937675	1.41585	113.833627	109.371631
95	110	122.037017	108.357995	104.604988	0.923761	1.27528	117.371268	109.704731
95	115	115.751441	109.825346	104.423213	0.918706	1.14185	120.878023	109.372224
95	120	109.920120	111.176945	103.902935	0.921688	1.01353	124.440924	108.437533
95	125	104.522016	112.441242	103.036742	0.932367	0.88898	128.128808	106.934724
95	130	99.573070	113.633111	101.793819	0.950742	0.76745	131.998458	104.886076
95	135	95.117578	114.756840	100.125582	0.977087	0.64876	136.094440	102.316221
95	140	91.220676	115.807583	97.971741	1.011926	0.53322	140.444616	99.265814
100	80	180.000001	89.999999	90.000000	1.428148	2.46581	90.000001	90.000000
100	85	155.667610	98.571241	100.761150	1.188509	2.06037	100.086923	103.272440
100	90	144.973370	101.595727	103.430903	1.097860	1.82399	104.570560	107.610560
100	95	136.362104	103.796721	104.841175	1.039452	1.62849	108.249739	110.141505
100	100	128.792333	105.603834	105.603834	1.000000	1.45631	111.589836	111.589836
100	105	121.885664	107.180462	105.933874	0.974073	1.29934	114.784676	112.235384
100	110	115.468628	108.609062	105.922309	0.958895	1.15282	117.947629	112.212565
100	115	109.458871	109.937343	105.603787	0.952944	1.01369	121.160218	111.589745
100	120	103.825684	111.194480	104.979836	0.955412	0.87988	124.489551	110.400464
100	125	98.574203	112.397648	104.028149	0.965961	0.75002	127.995058	108.660220
100	130	93.738496	113.554544	102.706960	0.984597	0.62338	131.729682	106.379206
100	135	89.377278	114.664071	100.958651	1.011611	0.49983	135.736783	103.575185
100	140	85.568039	115.716460	98.715502	1.047546	0.37978	140.043147	100.287620
100	145	82.396181	116.694076	95.909743	1.093212	0.26419	144.649585	96.590912
100	150	79.937942	117.574089	92.467969	1.149743	0.15432	149.523144	92.600948

T A B E L L A

di pentagonododecaedri a facce piane

angoli della faccia					rapporto lati		angoli diedri	
$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\epsilon$	$\zeta$	b/a	n/a	DE	DC
105	75	180.000001	89.999999	90.000000	1.732051	2.82843	90.000001	90.000000
105	80	155.730732	97.795077	101.474191	1.339254	2.23445	99.027736	104.378412
105	85	145.063092	100.622997	104.313911	1.207537	1.93970	103.062267	109.173788
105	90	136.450281	102.702528	105.847191	1.123900	1.70774	106.371800	112.064698
105	95	128.851360	104.422888	106.725752	1.066468	1.50996	109.371631	113.833527
105	100	121.885664	105.933874	107.180462	1.026618	1.33392	112.235384	114.784876
105	105	115.375280	107.312360	107.312360	1.000000	1.17265	115.065328	115.065328
105	110	109.231282	108.604066	107.164651	0.984179	1.02175	117.936070	114.751180
105	115	103.414187	109.838384	106.747429	0.977759	0.87822	120.910762	113.878397
105	120	97.918293	111.034427	106.047280	0.979986	0.74003	124.048137	112.459931
105	125	92.765570	112.203361	105.031069	0.990556	0.60582	127.405056	110.496627
105	130	88.003479	113.348767	103.647754	1.009507	0.47491	131.035477	107.988042
105	135	83.703121	114.465917	101.830962	1.037158	0.34724	134.985437	104.945561
105	140	79.954091	115.540877	99.505032	1.074083	0.22339	139.283620	101.408183
105	145	76.852412	116.550780	96.596808	1.121120	0.10447	143.929017	97.457609
110	75	155.829005	96.978733	102.192263	1.519566	2.46019	97.949782	105.529644
110	80	145.216676	99.597384	105.185941	1.333333	2.08690	101.541764	110.788916
110	85	136.629929	101.545458	106.824613	1.217928	1.80844	104.490953	114.038265
110	90	129.030491	103.169577	107.799932	1.138713	1.57924	107.161023	116.122226
110	95	122.037017	104.604988	108.357995	1.082531	1.38053	109.704731	117.371268
110	100	115.468628	105.922309	108.609062	1.042867	1.20224	112.212565	117.947629
110	105	109.231282	107.164651	108.604066	1.016075	1.03817	114.751180	117.936070
110	110	103.278068	108.360966	108.360966	1.000000	0.88419	117.378034	117.378034
110	115	97.593337	109.531659	107.875004	0.993375	0.73742	120.148347	116.287752
110	120	92.186661	110.690880	107.122458	0.995519	0.59584	123.118614	114.661946
110	125	87.091536	111.846951	106.061513	1.006176	0.45816	126.347614	112.488212
110	130	82.366103	113.001442	104.632456	1.025425	0.32372	129.894343	109.755249
110	135	78.093130	114.147297	102.759573	1.053624	0.19259	133.811459	106.467237
110	140	74.375303	115.266834	100.357862	1.091384	0.06552	138.133051	102.662548
115	80	136.907835	100.310026	107.782139	1.325021	1.93632	102.590933	116.083105
115	85	129.335977	101.828066	108.835957	1.218876	1.66756	104.940920	118.476540
115	90	122.344612	103.177918	109.477470	1.143222	1.44128	107.175282	120.015311
115	95	115.751441	104.423213	109.825346	1.088488	1.24289	109.372224	120.878023
115	100	109.458871	105.603787	109.937343	1.049379	1.06375	111.589745	121.160218
115	105	103.414187	106.747429	109.838384	1.022747	0.89820	113.878397	120.910762
115	110	97.593337	107.875004	109.531659	1.006669	0.74234	116.287752	120.148347
115	115	91.994498	109.002751	109.002751	1.000000	0.59338	118.870353	118.870353
115	120	86.636686	110.142979	108.220335	1.002134	0.44934	121.684177	117.059115
115	125	81.561367	111.303504	107.135129	1.012871	0.30896	124.793377	114.688720
115	130	76.835525	112.485777	105.678698	1.032341	0.17165	128.265966	111.735245
115	135	72.553598	113.681781	103.764620	1.060949	0.03758	132.166015	108.193181
120	85	122.818441	101.633623	110.547936	1.210523	1.51914	104.630695	122.738830
120	90	116.232122	102.796161	110.971717	1.138088	1.29647	106.528588	123.876660
120	95	109.920120	103.902935	111.176945	1.084966	1.09964	108.437533	124.440924
120	100	103.825684	104.979836	111.194480	1.046668	0.92094	110.400464	124.489551
120	105	97.918293	106.047280	111.034427	1.020423	0.75514	112.459931	124.048137
120	110	92.186661	107.122458	110.690880	1.004501	0.59853	114.661946	123.118614
120	115	86.636686	108.220335	110.142979	0.997871	0.44839	117.059115	121.684177
120	120	81.292639	109.353681	109.353681	1.000000	0.30278	119.713229	119.713229
120	125	76.200921	110.531980	108.267099	1.010750	0.16042	122.696684	117.164854
120	130	71.435511	111.758781	106.805707	1.030304	0.02078	126.090805	113.999040

TABELLA

di pentagonododecaedri a facce piane

angoli delle facce					rapporto lati		angoli diedri	
$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\epsilon$	$\zeta$	$b/a$	$m/a$	DE	DC
125	85	116.924981	101.018496	112.056523	1.193257	1.36562	103.667458	126.965577
125	90	110.627311	102.039887	112.332802	1.123910	1.14752	105.282100	127.797040
125	95	104.522016	103.036742	112.441242	1.072539	0.95346	106.934724	128.128808
125	100	98.574203	104.028149	112.397548	1.035239	0.77645	108.650220	127.995058
125	105	92.765570	105.031069	112.203361	1.009534	0.61160	110.496627	127.405056
125	110	87.091536	106.061513	111.846951	0.993862	0.45535	112.488212	126.347614
125	115	81.561367	107.135129	111.303504	0.987292	0.30504	114.688720	124.793377
125	120	76.200921	108.267099	110.531980	0.989365	0.15871	117.164854	122.696684
125	125	71.058134	109.470933	109.470933	1.000000	0.01508	119.999295	119.999295

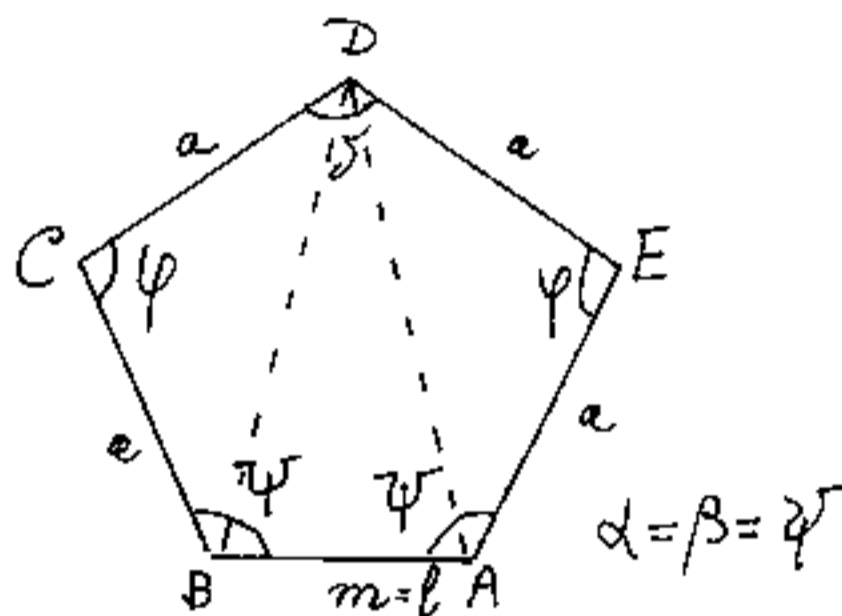
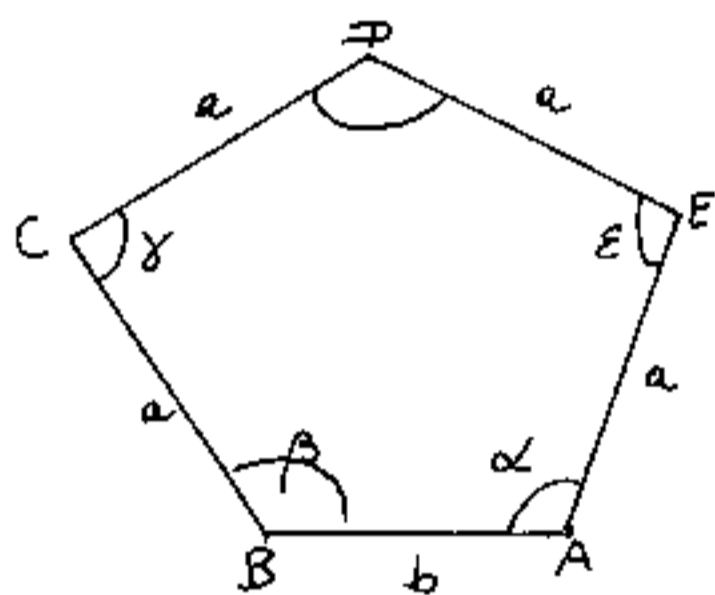
L'esame della tabella porta a considerare non rilevante il caso 9), mentre evidenzia le simmetrie del caso 10), cioè 4 lati uguali.

quindi:  $\frac{b}{a} = 1$ . Si nota che:  $b/a = 1$  si ha quando  $\alpha = \beta$ ; ed anche:  $\epsilon = \delta$ ; e  $\hat{D}_\epsilon = \hat{D}_\delta$ .

È il caso che abbiamo considerato all'inizio del capitolo sui pentagono dodecaedri. Dove abbiamo rilevato che la stessa configurazione pentagonale ci faceva passare dal cubo al dodecaedro al rombododecaedro con notevole attinenza alle cristallizzazioni della pirite all'Elba e a Gavovrano. Si pensi anche alla condizione matematica "facce uguali", pur non riferite ad un modulo; meglio sarebbe dire: "facce simili" ma un solido a "facce uguali" sfaldando una faccia sola, le altre facce diventano "apparentemente diverse". Si avverte il nocciolo centrale del costituirsi della materia.

### Il caso 10) Quattro lati uguali ed' uno diverso

Per angoli tutti diversi si opera con le formule di compatibilità dei diedri, come abbiamo visto al caso 7\*), ove per  $\varepsilon = \delta = \varphi$ , il triangolo  $ADB$  è isoscele, per cui  $\alpha = \beta$  ed anche  $a = b$ , cioè il caso 7) è connesso al caso 10).



Si noti che fissati  $\varphi$  e  $\delta$  resta univocamente determinata la classe di figure simili:  $\varphi = \alpha = \beta = \left(\frac{540 - \delta - 2\varphi}{2}\right)$   
 Le formule di compatibilità dei diedri diventano:

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos \alpha - \cos \alpha \cos \delta}{\cos(\alpha - \delta) - \cos \alpha} = \boxed{\cos \varphi = \frac{(1 - \cos \delta) \cos \alpha}{\cos(\alpha - \delta) - \cos \alpha}}$$

$$\cos \varphi (\cos(\alpha - \delta) - \cos \varphi \cos \alpha) = \cos \alpha - \cos \alpha \cos \delta$$

$$\cos \varphi (\cos \alpha \cos \delta + \sin \alpha \sin \delta) - \cos \varphi \cos \alpha = (1 - \cos \delta) \cos \alpha$$

$$\cos \varphi \cos \delta + \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi \sin \delta = 1 + \cos \varphi - \cos \delta$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 + \cos \varphi - \cos \delta - \cos \varphi \cos \delta}{\cos \varphi \sin \delta}} \quad ; \text{ ma,}$$

$$\sin \alpha = \sin(270 - (\varphi + \delta/2)) = -\cos(\varphi + \delta/2)$$

$$\cos \alpha = \cos(270 - (\varphi + \delta/2)) = -\sin(\varphi + \delta/2)$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi + \delta/2)}}$$

abbiamo così: (uguagliando le due espressioni di  $\operatorname{tg} \alpha$ )

$$\frac{\cos(\varphi + \frac{\delta}{2})}{\operatorname{sen}(\varphi + \frac{\delta}{2})} = \frac{1 + \cos \varphi - \cos \delta - \cos \varphi \cos \delta}{\cos \varphi \operatorname{sen} \delta}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi + \frac{\delta}{2})} = \frac{1}{\cos \varphi \cos \delta} - \frac{1}{\operatorname{sen} \delta} - \frac{1}{\cos \varphi + \operatorname{tg} \delta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \delta}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi + \frac{\delta}{2})} = \left( \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right) \frac{1}{\operatorname{sen} \delta} - \left( \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right) \frac{1}{\operatorname{tg} \delta}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi + \frac{\delta}{2})} = \left( \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right) \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \delta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \right)$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi + \frac{\delta}{2})} = \left( \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right) \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \delta} \right) (1 - \cos \delta)$$

ricordando che:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \delta} (1 - \cos \delta) = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} = \operatorname{tg} \left( \frac{\delta}{2} \right)$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi + \frac{\delta}{2})} = \left( \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right) \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2})} = \left( \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right)$$

$$\left( \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \left( \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right) = \left( 1 - \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \varphi \right)$$

$$\operatorname{tg}^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \left( \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right) + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \varphi \left( \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \right) - 1$$

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} + \left[ \operatorname{tg} \varphi \left( 1 + \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \right) \right] \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} - \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = 0}$$

Relazione che consente di calcolare  $\delta$  per ogni  $\varphi$   
vediamone le condizioni: (equazione di 2° grado)

$$2 \tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = -\operatorname{tg}(\varphi) \left(1 + \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi}\right) \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi \left(1 + \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi}\right)^2 + 4 \left(\frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi}\right)}$$

Sviluppiamo il radicando:

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi (1 + 2 \cos \varphi)^2}{\cos^2 \varphi (1 + \cos \varphi)^2} + 4 \frac{\cos \varphi (1 + \cos \varphi)}{(1 + \cos \varphi)^2}} = \frac{1}{(1 + \cos \varphi)} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi (1 + 2 \cos \varphi)^2}{\cos^2 \varphi} + 4 \cos \varphi (1 + \cos \varphi)}$$

$$= \frac{1}{(1 + \cos \varphi)} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} (1 + 4 \cos^2 \varphi + 4 \cos \varphi) + \frac{(4 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} =$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi (1 + \cos \varphi)} \sqrt{1 + 4 \cos^2 \varphi + 4 \cos \varphi - \cos^2 \varphi - 4 \cos^4 \varphi - 4 \cos^3 \varphi + 4 \cos^4 \varphi + 4 \cos^3 \varphi} =$$

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \left(\frac{1}{2 \cos(1 + \cos \varphi)}\right) \left[ \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \pm \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi + 4 \cos \varphi} \right]$$

$$\boxed{3 \cos^2 \varphi + 4 \cos \varphi + 1 = 0} \quad \text{condizione limite dell'equazione}$$

$$\cos \varphi = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 3 \cdot 4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \pm 180^\circ \\ \pm 109,4712206 = 109^\circ 28' 16,32 \end{cases}$$

angolo fondamentale fra le giaciture delle facce dell'ottaedro  
 e fra le direzioni dal centro ai vertici del tetraedro.

si hanno soluzioni immaginarie per

$$\boxed{109,4712206 < \varphi < 250,5287794}$$

soluzioni reali per

$$\boxed{-109,4712206 < \varphi < +109,4712206}$$

per  $\varphi = \pm 109,4712206$  si ha  $\boxed{\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{2} \tan(\varphi) \left(1 + \frac{\cos\varphi}{1 + \cos\varphi}\right)}$

Ricordiamo di aver già calcolato l'angolo:

$$\underline{109,4712206344906 = 109^\circ 28' 16,394284''}$$

È l'angolo fra le direzioni uscenti dal centro (semiassi) dirette verso i vertici del tetraedro, cioè normali, e passanti per i centri, alle facce dell'ottaedro e quindi pari al diedro dell'ottaedro. È quindi angolo basilare nella costituzione della materia intesa come provenimento da un flusso angoloide di sorgenti puntate puntiformi.

$$\sin(109,4712206\dots) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\cos(109,4712206\dots) = -1/3$$

$$\tan(109,4712206\dots) = -2\sqrt{2}$$

$$\& \tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2\sqrt{2} \left(1 + \frac{-1/3}{1 - 1/3}\right) = \tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sqrt{2} \left(1 + \frac{-1}{3-1}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\delta'_{1/2} = 35,26438968 = 35^\circ 15' 51,8''$$

$$\boxed{\delta = 70,52877936 = 70^\circ 31' 43,61''}$$

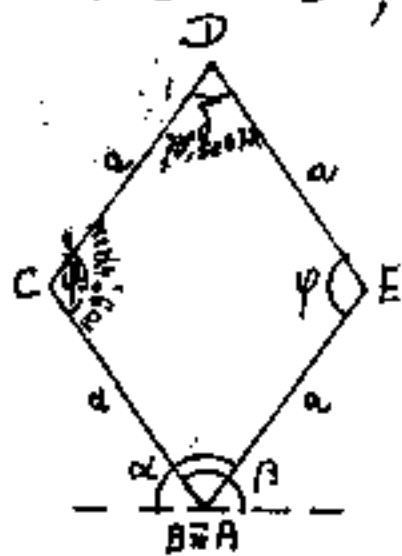
quest'angolo è supplementare di  $109,4712206344\dots$  ed è l'angolo diedro fra le facce del tetraedro.

Se proviamo a disegnare una faccia con questi dati, si ha che:

$$\alpha = \beta = \frac{540 - 2\varphi - \delta}{2} = 270 - 109,47122063 - 35,26438968 =$$

$$\alpha = \beta = 125^{\circ}, 264389^{\circ} = 125^{\circ} 15' 51'' , 8$$

ma  $\overline{AB} = 0$ , per cui il pentagono decade in un rombo. Infatti  $(\delta + \varphi) = 180^{\circ}$  ed il nostro pentagonododecaedro diventa un rombododecaedro per valori di  $\varphi > 109^{\circ}, 4712206$ ,



$\overline{AB}$  si incrocia negativa, da cui l'assurdo dei valori immaginari nell'equazione.

Per  $\varphi = -109^{\circ}, 4712206$  si ha:  $2 \operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi}\right)$

$$2 \operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right) = -\left(2\sqrt{3}\right) \left(1 + \frac{-1/3}{1 - 1/3}\right)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right) = -\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3-1}\right) = -\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{1/\sqrt{3}}$$

$$\frac{\delta}{2} = \begin{cases} -35^{\circ}, 26438968 \\ +144^{\circ}, 7356103 \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} -70^{\circ}, 5287794 \\ +289, 4712206 \end{cases}$$

Poiché:  $-70^{\circ}, 5287794 + 180^{\circ} = +109^{\circ}, 4712206$ , prendendo il valore assoluto di:  $|109^{\circ}, 4712206| = |\varphi| = |\varepsilon| = |\delta| = |\delta|$  dal che si deduce:  $\alpha = \frac{540 - 3\varphi}{2} = \beta = \left(270^{\circ} - \frac{3}{2}\varphi\right)$ .

Vogliamo verificare la compatibilità degli angoli diedri:  $\cos \hat{D}_E = \cos \hat{D}_C = \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos \varphi}} = \frac{\cos(120^{\circ})}{1 + \frac{1}{\cos \varphi}}$



Ma nei vertici:  $A \equiv B$  e  $D$  essendo nullo:  $\overline{AB} = 0$ , vi convergono 4 facce con l'angolo  $\delta = 70^\circ, 5287794$  ove:  $\cos \delta = \frac{1}{3}$  e l'angolo diedro sugli spigoli di 4 facce ad angoli uguali e spigoli uguali è dato da:

$$\cos \hat{D}_4 = \frac{\cos \varphi - 1}{\cos \varphi + 1} = \frac{+\frac{1}{3} - 1}{+\frac{1}{3} + 1} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$\hat{D}_4 = 120^\circ$$

Consideriamo ora l'altro caso limite:

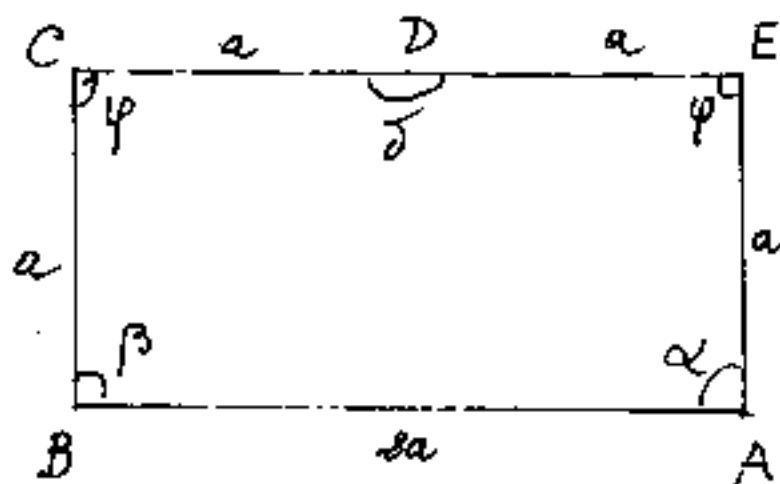
per  $\varphi = 90^\circ$

$$2 \tan \frac{\delta}{2} = -\frac{1}{0} \left( 1 + \frac{0}{1+0} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{0}\right)^2 \left(1 + \frac{0}{1+0}\right)^2 + 4 \frac{0}{1+0}}$$

$$2 \tan \frac{\delta}{2} = -\infty \pm \infty = < \infty$$

$$\frac{\delta}{2} = \begin{matrix} 90^\circ \\ < \\ 0 \end{matrix} \quad \bar{\delta} = \begin{matrix} 0 \\ < \\ 180 \end{matrix}$$

Facciamo la costruzione grafica di una faccia si nota che il pentagono è diventato un rettangolo.



Calcoliamo gli angoli

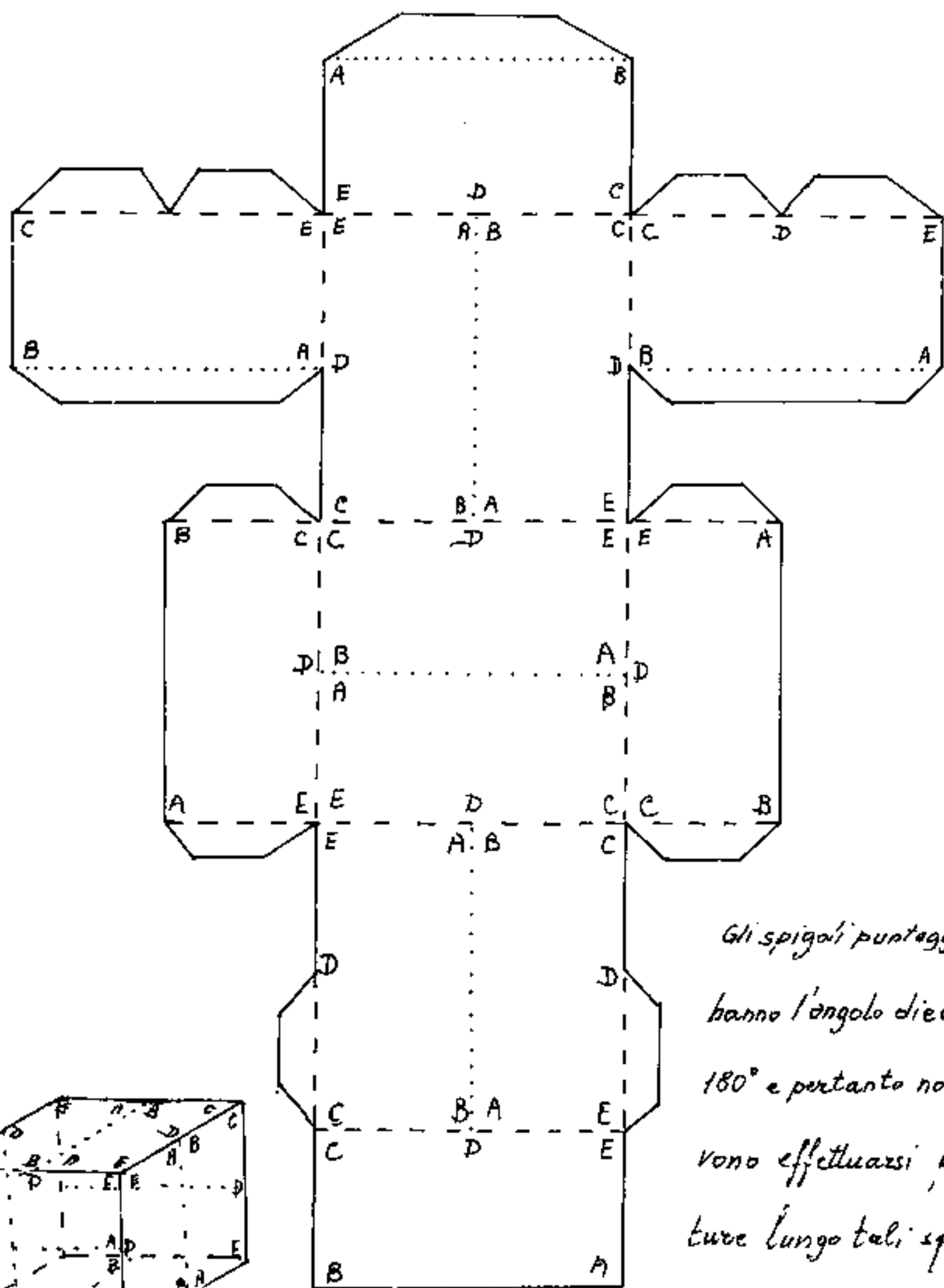
diedri  $\hat{D}_{EA} = \hat{D}_{CB} = \arccos\left(\frac{\cos 90^\circ}{1 + \cos 90^\circ}\right) = \arccos(0) = 90^\circ$

$$\hat{D}_{AE} = \hat{D}_{EA} = \arccos\left(\frac{\cos \varphi - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}\right) = \arccos(0) = 90^\circ$$

Interessante il diedro:  $\hat{D}_{AB} = \hat{D}_{BA} = \arccos\left(\frac{\cos \delta - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}\right)$

$$\hat{D}_{AB} = \hat{D}_{BA} = \arccos\left(\frac{-1 - 0}{12}\right) = \arccos(-1); \quad \hat{D}_{AB} = \hat{D}_{BA} = 180^\circ$$

Quindi sul lato  $\overline{AB}$  due facce rettangolari risultano complanari e formano un quadrato, gli altri diedri sono retti nasce così il cubo, ne diamo lo schema:



Gli spigoli punteggiati hanno l'angolo diedro di  $180^\circ$  e pertanto non devono effettuarsi piegature lungo tali spigoli.

Quindi il nostro solido, nel passare da  $\varphi = 90^\circ$  a  $\varphi = 109,4712206$ , da cubo, si trasforma prima in pentagonododecaedro, per  $\varphi = 108^\circ$  è un dodecaedro regolare, infine, al limite per  $\varphi = 109,4712206$  diventa un zombododecaedro

Calcoliamo, in questo campo, il valore del lato diverso:  $\overline{AB} = m$  in rapporto ai quattro lati uguali:  $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = a$ .

Abbiamo:  $\widehat{DA} = 2a \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ ;  $\widehat{BDA} = \delta - 2\left(90 - \frac{\varphi}{2}\right) = \left(\delta + \varphi - 180^\circ\right)$ ;  
 $\widehat{BDA}/2 = \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\varphi}{2} - 90^\circ\right)$ ;  $\sin\left(\frac{\widehat{BDA}}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right)$ ;  $m = 2 \sin\left(\frac{\widehat{BDA}}{2}\right) \overline{DA} =$   
 $m = -2\left(2a \sin\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) = \boxed{m = -4a \sin\frac{\varphi}{2} \cos\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right)}$

Resta da analizzare il campo per  $\varphi$  compreso fra zero e  $90^\circ$

Per  $\varphi = 0$  è impossibile si sovrappongono i lati  $ED$   $EA$  ed  $\overline{CD}$  con  $\overline{CB}$ ; Per  $\varphi > 0$ , possono venire facce concave che non ammettono solidi, quindi resta valido il campo:

$$\boxed{90^\circ \leq \varphi \leq 109,4712206}$$

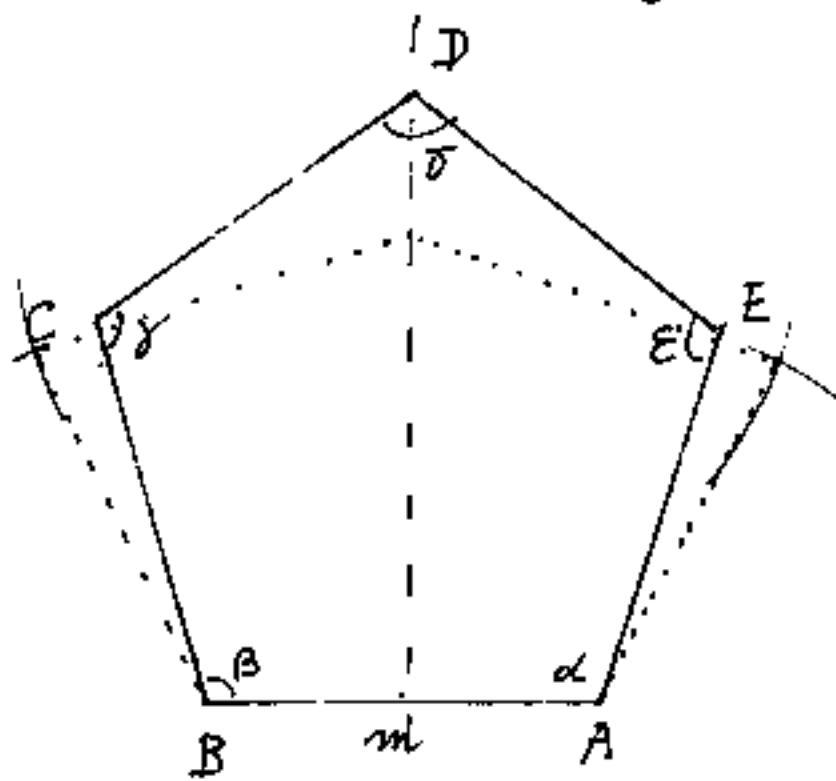
In questo campo cerchiamo di raggruppare in una tabella gli elementi più significativi, in cui:  $\varphi = \varepsilon = \delta$ ;  $\alpha = \beta$ ;  $\widehat{DEA} = \widehat{DAE}$ ;  $\widehat{DAB} = \widehat{DBA}$

# Tabella dei pentagonododecaedri c. 10)

Angoli delle facce			Angoli diedri			Lato	NOTE
$\varphi$	$\delta$	$\alpha-\beta$	$\hat{D}_{\varphi\alpha}$	$\hat{D}_{\varphi\beta}$	$\hat{D}_{\alpha\beta}$	$m/a$	
90.00	180.00	90.00	90.00	180.00	0.00	2.00	(cubo a facce rigate)
91.00	177.96	90.02	91.02	91.02	177.96	2.00	
92.00	175.85	90.08	92.07	92.07	175.85	2.00	
93.00	173.65	90.18	93.17	93.17	173.66	1.99	
94.00	171.35	90.32	94.30	94.30	171.37	1.98	
95.00	168.94	90.53	95.48	95.48	168.99	1.97	
96.00	166.41	90.80	96.70	96.70	166.50	1.96	
97.00	163.73	91.14	97.98	97.98	163.89	1.94	
98.00	160.88	91.56	99.30	99.30	161.13	1.92	
99.00	157.84	92.08	100.69	100.69	158.23	1.89	
100.00	154.57	92.71	102.13	102.13	155.15	1.86	
101.00	151.03	93.49	103.64	103.64	151.86	1.81	
102.00	147.15	94.42	105.22	105.22	148.33	1.76	
103.00	142.86	95.57	106.87	106.87	144.52	1.70	
104.00	138.05	96.97	108.61	108.61	140.34	1.62	
105.00	132.55	98.73	110.44	110.44	135.70	1.53	
106.00	126.10	100.95	112.37	112.37	130.44	1.40	
107.00	118.25	103.88	114.40	114.40	124.28	1.24	
108.00	108.00	108.00	116.57	116.57	116.57	1.00	(dodecaedro regolare)
109.00	92.06	114.97	118.86	118.86	105.10	0.60	
109.47	70.53	-	120.00	120.00	120.00	0.00	(rombododacaedro)

## Caso 11) Cinque lati uguali

variano solo gli angoli, abbiamo visto



alle tabelle del caso 10 che a lati uguali corrispondono angoli uguali. Ammesso quindi che D possa spostarsi solo sull'asse

di  $\overline{AB}$ . si avrebbe il caso 10, però dalla tabella notiamo che per ogni  $\varphi$  si ha un solo rapporto  $m/a$  cioè il caso 11) vale solo per il dodecaedro regolare.

## La simmetria nei cristalli

Abbiamo già accennato (vedi I° Vol.) al concetto: "Simmetria", vogliamo ora precisare il significato di certi simboli usati in cristallografia.

Premesso che un cristallo reale si presenta in genere in forma sproporzionata o distorta, pur mantenendo la costanza degli angoli diedri fra facce corrispondenti; noi ridurremo a "cristallo modello" un tale solido, supponendo di spostare, parallelamente a se stessi, i piani delle facce, finché, mantenendo la stessa giacitura le facce stesse assumino la stessa forma, e siano della stessa grandezza.

È anche opportuno precisare la differenza fra "assi cristallografici" ed "assi di simmetria".

Diconsi "Assi Cristallografici" gli assi passanti per un punto interno al solido e paralleli a tre spigoli del cristallo concorrenti nello stesso vertice.

È chiaro che se i tre spigoli formano una terna trirettangolo (come gli spigoli di un cubo) ed il punto interno al solido coincide col suo centro, gli assi cristallografici  $x, y, z$  formano un sistema cartesiano ortogonale al quale potremmo riferire le equazioni dei piani delle facce. In genere però i tre spigoli del cristallo non formano un sistema di assi trirettangolo, ma un sistema di

assi inclinati, useremo come formula per individuare i piani delle facce, l'equazione segmentaria del piano, cioè:  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$  (vedi vol. III) valide anche per assi inclinati, ove:  $p, q, r$ ; sono i segmenti intercettati dal piano della faccia considerata con gli assi stessi e misurati a partire dall'origine "O". Cioè  $P, Q, R$  sono i punti di intersezione del piano con gli assi, avremo:  $\overline{OP} = p$ ;  $\overline{OQ} = q$ ;  $\overline{OR} = r$ ; sono i parametri dell'equazione e per facce parallele, rimangono proporzionali.

La distanza del piano dall'origine degli assi, sarà:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}}}$$

ed i coseni direttori della retta di giacitura, (valida per tutte le facce (piani) parallele), saranno:

$$\cos \alpha = \frac{-\delta}{p}; \quad \cos \beta = \frac{-\delta}{q}; \quad \cos \gamma = \frac{-\delta}{r}$$

Se scegliamo una terna di assi cristallografici ed una faccia assunta come "faccia fondamentale" di parametri  $p, q, r$ ; Ogni altra faccia può essere individuata dai suoi parametri:  $p_i, q_i, r_i$ ; ma in "cristallografia" si considerano i rapporti

$$\frac{p_i}{p}; \quad \frac{q_i}{q}; \quad \frac{r_i}{r} \quad \text{che sono detti: } \underline{\text{numeri indici}}.$$

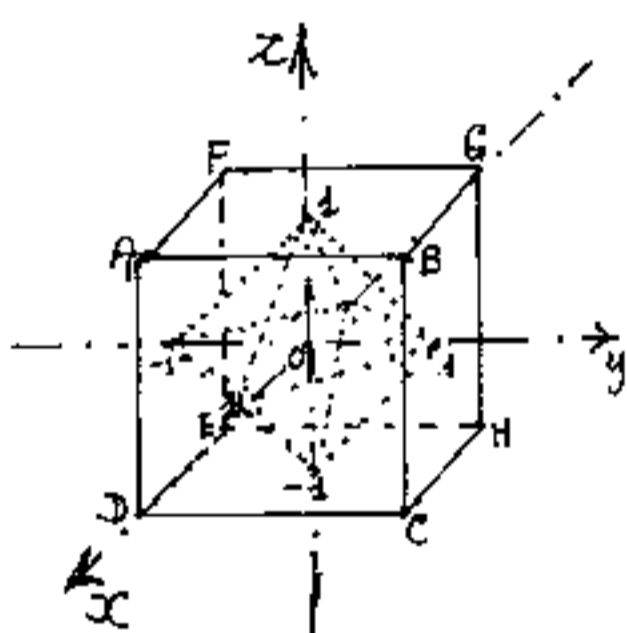
Per la legge di Haüy: "i numeri indici stanno fra loro come tre numeri interi generalmente piccoli e primi fra loro."

(La terna degli indici individua una faccia qualsiasi rispetto alla fondamentale. Gli indici sono rapporti di coseni direttori e pertanto validi per tutti i piani paralleli.)

Si può anche scrivere:

$$\boxed{\frac{p}{p'} : \frac{q}{q'} : \frac{r}{r'} = h : k : l}$$

ove:  $\{h k l\}$  sono gli indici di una faccia (e la rappresentano) rispetto ad un'altra faccia assunta come: faccia fondamentale.



Consideriamo il cubo in figura, gli assi  $x, y, z$ ; possono essere assunti come assi cristallografici in quanto sono paralleli agli spigoli convergenti in un vertice del solido (cubo)

Quando una faccia è parallela ad un asse, non sta a alcun segmento su quell'asse per cui sarà zero il numero indice corrispondente; per cui la rappresentazione delle facce del cubo sarà:

$$ABCD = \{100\} ; EFGH = \{\bar{1}00\} ; CBGH = \{010\} ; AFED = \{0\bar{1}0\}$$

$$AFGB = \{001\} ; CDEH = \{00\bar{1}\} .$$

La rappresentazione delle facce dell'ottaedro tratteggia

to all'interno del cubo (relativamente agli assi cristallografici del cubo) sarà: (riportiamo anche le giaciture)

$\{111\}$  ;  $\{11\bar{1}\}$  ;  $\{1\bar{1}1\}$  ;  $\{1\bar{1}\bar{1}\}$  ;  $\{\bar{1}11\}$  ;  $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$  ;  $\{\bar{1}\bar{1}1\}$  ;  $\{\bar{1}1\bar{1}\}$  ;  $\{11\bar{1}\}$  ;  $\{1\bar{1}\bar{1}\}$  ;  $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$   
(OB) (OC) (OA) (OD) (OG) (OH) (OF) (OE)

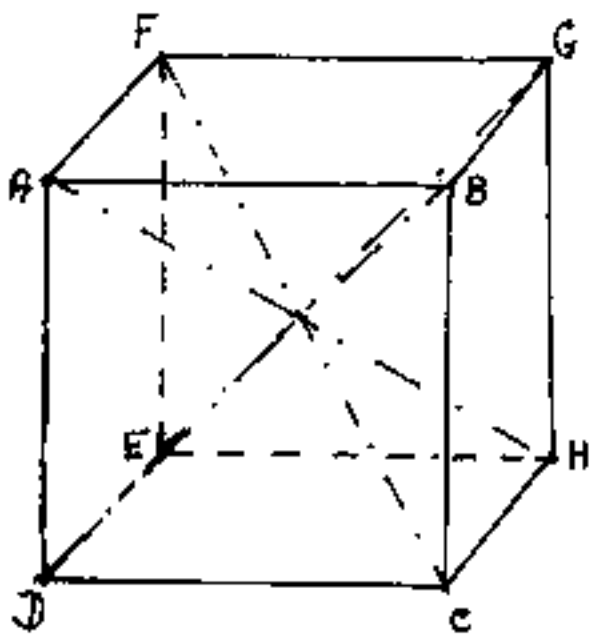
queste sono anche la rappresentazione delle facce dei due tetraedri: ALGE ed FBHD aventi per spigoli le diagonali del cubo e dalla cui intersezione nasce l'ottaedro tratteggiato. Però' gli assi  $x, y, z$ , non possono essere assi cristallografici per l'ottaedro o per il tetraedro perché non sono paralleli a tre spigoli concorrenti. —

Gli assi di simmetria si dicono di ordine  $n$  quando un solido che ruoti di un giro completo intorno a quell'asse, sovrapponga  $n$  volte se stesso (e sue facce).

Per esempio gli assi  $oxyz$ , ortogonali che abbiamo considerato per il cubo come assi cristallografici sono, per il cubo stesso, assi di simmetria quaternaria. Infatti la faccia  $\{010\}$  ruotando il solido intorno ad  $x$  assume rispettivamente le posizioni delle facce:  $\{001\}$ ,  $\{0\bar{1}0\}$ ,  $\{00\bar{1}\}$  e torna a  $\{010\}$  analogamente le rotazioni intorno ad  $y$  o  $z$ , perciò il cubo ha 3 assi di simmetria quaternaria e si indica "3A<sub>4</sub>" questa proprietà simmetrica.

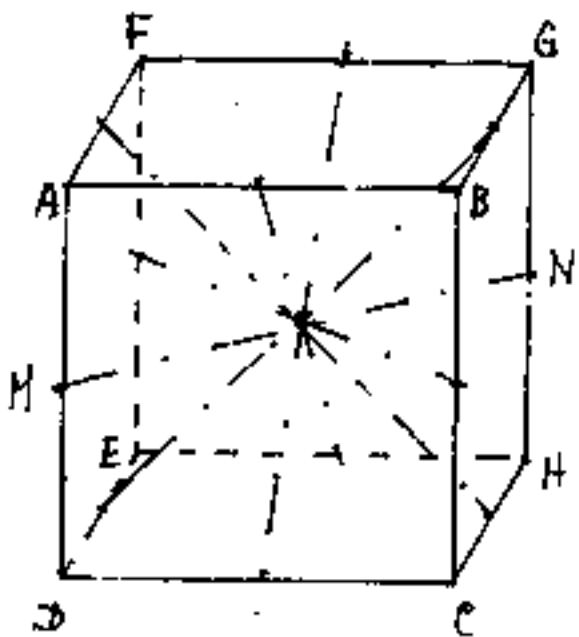


Se nello stesso cubo consideriamo gli assi che si



ottengono tracciando le quattro diagonali interne, notiamo che tali assi sono di simmetria ternaria; infatti supponiamo che sia  $\overline{AH}$  l'asse intorno al quale ruota il cubo,

A ed H stanno fermi essendo sull'asse di rotazione. B, D, F, sono su un piano perpendicolare all'asse di rotazione e vi rimangono scambiandosi di posto ogni terzo di giro anche C, G, E rimangono in un piano perpendicolare ad  $\overline{AH}$  e si scambiano di posto ogni terzo di giro; poiché le diagonali interne sono quattro il cubo ha anche: " $4A_3$ ".



Nello stesso cubo, se uniamo i punti medi di due spigoli opposti otteniamo sei assi di simmetria binaria ( $6A_2$ )

Infatti se consideriamo i punti medi M ed N di  $\overline{AD}$  e  $\overline{B'H}$  lo

spigolo  $\overline{BC}$  nella rotazione si sovrappone ad  $\overline{E'F}$  e viceversa poi torna al suo posto (ogni mezzo giro).

Complessivamente per il cubo avremo:

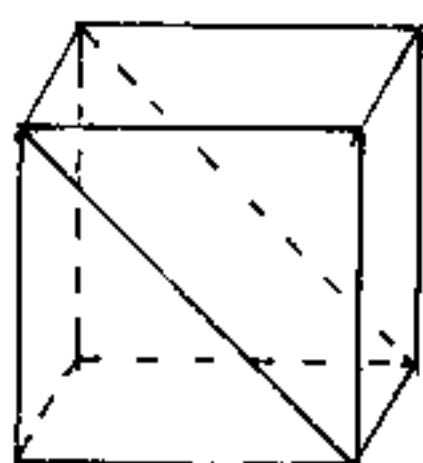
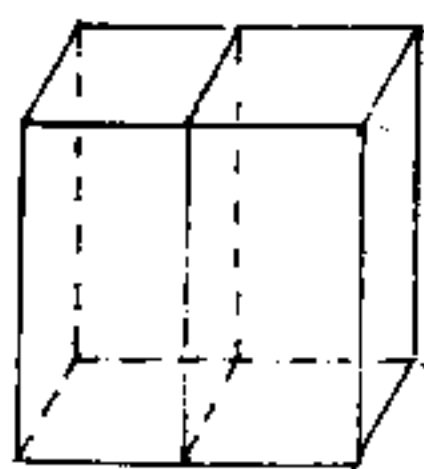
$$3A_4, 4A_3, 6A_2$$

come assi di simmetria.

Nei cristalli si hanno solo assi di ordine 2, 3, 4, 6; mancano gli assi di simmetria quaternaria e gli assi di ordine maggiore di 6.

Come si vede nel cubo, gli assi  $4A_3$  e  $6A_2$ , non sono paralleli agli spigoli e quindi non possono confondersi con assi cristallografici.

Un piano che divida il cristallo (un solido) in due parti tali che una è l'immagine speculare dell'altra si dice: Piano di simmetria (P) Nel cubo



abbiamo nove piani di simmetria; ed esiste anche un centro (C) di simmetria, cioè

un punto rispetto al quale sono equidistanti gli elementi corrispondenti.

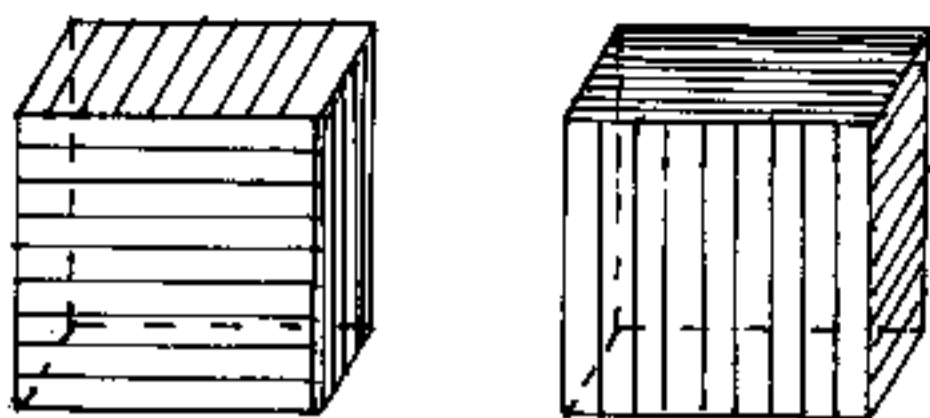
Il grado complessivo di simmetria del cubo

sarà quindi:

$$3A_4 \quad 4A_3 \quad 6A_2 \quad C \quad 9P$$

Nel trattare la simmetria, noi abbiamo considerato le facce di un cristallo identiche oltre che sovrapponibili, però certe facce possono presentare striature tali che, sovrapposte per rotazione

hanno versi di striatura diversi. Come si vede in



figura, cioè vuol dire che sostanzialmente un asse che abbiamo considerato  $A_4$  di-

venta  $A_2$ . Cioè noi abbiamo considerato una: simmetria formale, geometrica, detta anche Singonia o simmetria apparente che si distingue dalla simmetria sostanziale che più interessa i cristallogologi.

I diversi elementi di simmetria sono legati fra loro da particolari condizioni. Per esempio, se consideriamo P = piano di simmetria; C = centro di simmetria;  $A_{2n}$  = asse di simmetria di ordine pari; su questi elementi c'è la condizione che se ne esistono due deve esistere anche il terzo; cioè è impossibile che una simmetria complessiva si esprima scrivendo CP, oppure  $A_2C$  oppure  $A_2P$ , deve essere  $A_2CP$ .

Tenendo conto di tali condizioni, oltre che gli assi essere solo di ordine 2, 3, 4, 6, F. G. e H. Hessel (1796-1872) stabilì che sono possibili solo 32 classi di simmetria nei cristalli; poiché alcune classi presentano caratteristiche

comuni, C.S. Weiss (1780-1856) ed F.E. Neumann (1798-1895), distinsero 6 sistemi cristallini; successivamente la classificazione distinse i sistemi in gruppi, da cui il seguente quadro.

<u>GRUPPO</u>	<u>SISTEMA</u>	<u>CLASSE</u>						
monometrico	Cubico	<p>5 classi con 4 assi di simmetria ternaria (<math>4A_3</math>)</p> <table border="1"> <tr> <td>cubica esocis= ottaedrica</td> <td>cubica esocis= tetraedrica</td> <td>orbica diacis dodecaedrica o diplotide</td> <td>erubica tetartodrica</td> <td>cubica giroedrica</td> </tr> </table>	cubica esocis= ottaedrica	cubica esocis= tetraedrica	orbica diacis dodecaedrica o diplotide	erubica tetartodrica	cubica giroedrica	
	cubica esocis= ottaedrica	cubica esocis= tetraedrica	orbica diacis dodecaedrica o diplotide	erubica tetartodrica	cubica giroedrica			
tetragonale	<p>7 classi con asse di simmetria ternaria (<math>A_3</math>)</p> <table border="1"> <tr> <td>ditetragonale bipiramidale</td> <td>piramidale</td> <td>scaleno= edrica</td> <td>trapezo= edrica</td> <td>piramidale</td> <td>bisfenoidale</td> </tr> </table>	ditetragonale bipiramidale	piramidale	scaleno= edrica	trapezo= edrica	piramidale	bisfenoidale	
ditetragonale bipiramidale	piramidale	scaleno= edrica	trapezo= edrica	piramidale	bisfenoidale			
dimetrico	esagonale	<p>5 classi con asse di simmetria senaria (<math>A_6</math>)</p> <table border="1"> <tr> <td>diesagonale bipiramidale</td> <td>piramidale</td> <td>bipiramidale</td> <td>piramidale</td> <td>trapezoedrica</td> </tr> </table>	diesagonale bipiramidale	piramidale	bipiramidale	piramidale	trapezoedrica	
	diesagonale bipiramidale	piramidale	bipiramidale	piramidale	trapezoedrica			
trigonale	<p>7 classi con assi di simmetria quaternaria (<math>A_4</math>)</p> <table border="1"> <tr> <td>ditrigonale scaleno= edrica</td> <td>piramidale</td> <td>trapezo= edrica</td> <td>trigonale rombo= edrica</td> <td>piramidale</td> <td>bipiramidale</td> <td>bipiramidale</td> </tr> </table>	ditrigonale scaleno= edrica	piramidale	trapezo= edrica	trigonale rombo= edrica	piramidale	bipiramidale	bipiramidale
ditrigonale scaleno= edrica	piramidale	trapezo= edrica	trigonale rombo= edrica	piramidale	bipiramidale	bipiramidale		
trimetrico	rombico	<p>3 classi con tre assi di simmetria binaria (<math>3A_2</math>) perpendicolari fra loro o con due piani di simmetria perpendicolari fra loro ed un asse binario</p> <table border="1"> <tr> <td>rombica bipiramidale</td> <td>rombica piramidale</td> <td>rombica bisfenoidale</td> </tr> </table>	rombica bipiramidale	rombica piramidale	rombica bisfenoidale			
	rombica bipiramidale	rombica piramidale	rombica bisfenoidale					
	monoclinico	<p>3 classi con asse di simmetria binaria un piano normale all'asse e centro di simmetria o solo piano o solo asse.</p> <table border="1"> <tr> <td>prismatica</td> <td>domatica</td> <td>sfenoidale</td> </tr> </table>	prismatica	domatica	sfenoidale			
prismatica	domatica	sfenoidale						
triclinico	<p>2 classi con centro di simmetria o senza elementi di simmetria</p> <table border="1"> <tr> <td>triclina pinacoidale</td> <td>triclina pediale</td> </tr> </table>	triclina pinacoidale	triclina pediale					
triclina pinacoidale	triclina pediale							

# La Proiezione stereografica.

Abbiamo già accennato come un cristallo reale venga idealmente ridotto ad avere facce della stessa forma e della stessa grandezza, mantenendo invariati gli angoli diedri fra le facce corrispondenti. (Cristallo modello).

Consideriamo ora il nostro cristallo modello avente il centro in comune col centro di una sfera nella quale è contenuto.

Consideriamo il piano equatoriale che divide la sfera in due emisferi, ed il cristallo in due parti.

È evidente che a seconda della posizione del solido "cristallo modello", le due parti saranno diverse. Cercheremo quindi posizioni particolari che rendano più significativa la proiezione stereografica.

I due punti opposti sulla superficie sferica individuati dalla normale per il centro del piano equatoriale, si dicono Poli ed, in analogia coi poli terrestri, tal volta sono detti: polo sud e polo nord per distinguerli. Ciò faremo anche noi per facilitare il linguaggio, anche se non vi sono elementi di distinzione, essendo arbitraria la loro posizione.

La proiezione stereografica può effettuarsi dal polo sud, sul piano equatoriale. dei punti

della superficie dell'emisfero nord ottenuti trasladando le facce della parte di solido esistente nell'emisfero nord fino ad essere tangenti alla superficie sferica. Si proiettano cioè tali punti di tangenza.

Analogo discorso, se come centro di proiezione assumiamo il polo nord, per i punti di tangenza sull'emisfero sud.

I punti di tangenza sono detti poli delle facce; si può dire che la proiezione stereografica consiste nell'insieme dei punti di intersezione, col piano equatoriale, dei raggi uscenti dal polo di proiezione e diretti verso i poli delle facce, e questi ultimi sono determinati dall'intersezione delle rette di giacitura delle facce uscenti dal centro con la superficie sferica.

Quest'ultima osservazione ci permette di considerare un cristallo qualsiasi, anche distorto, cioè non ancora "modello" senza che vari la proiezione stereografica.

Come si vede il concetto "giacitura" di piani paralleli, sul quale abbiamo insistito in geometria dello spazio, torna utile in cristallografia.

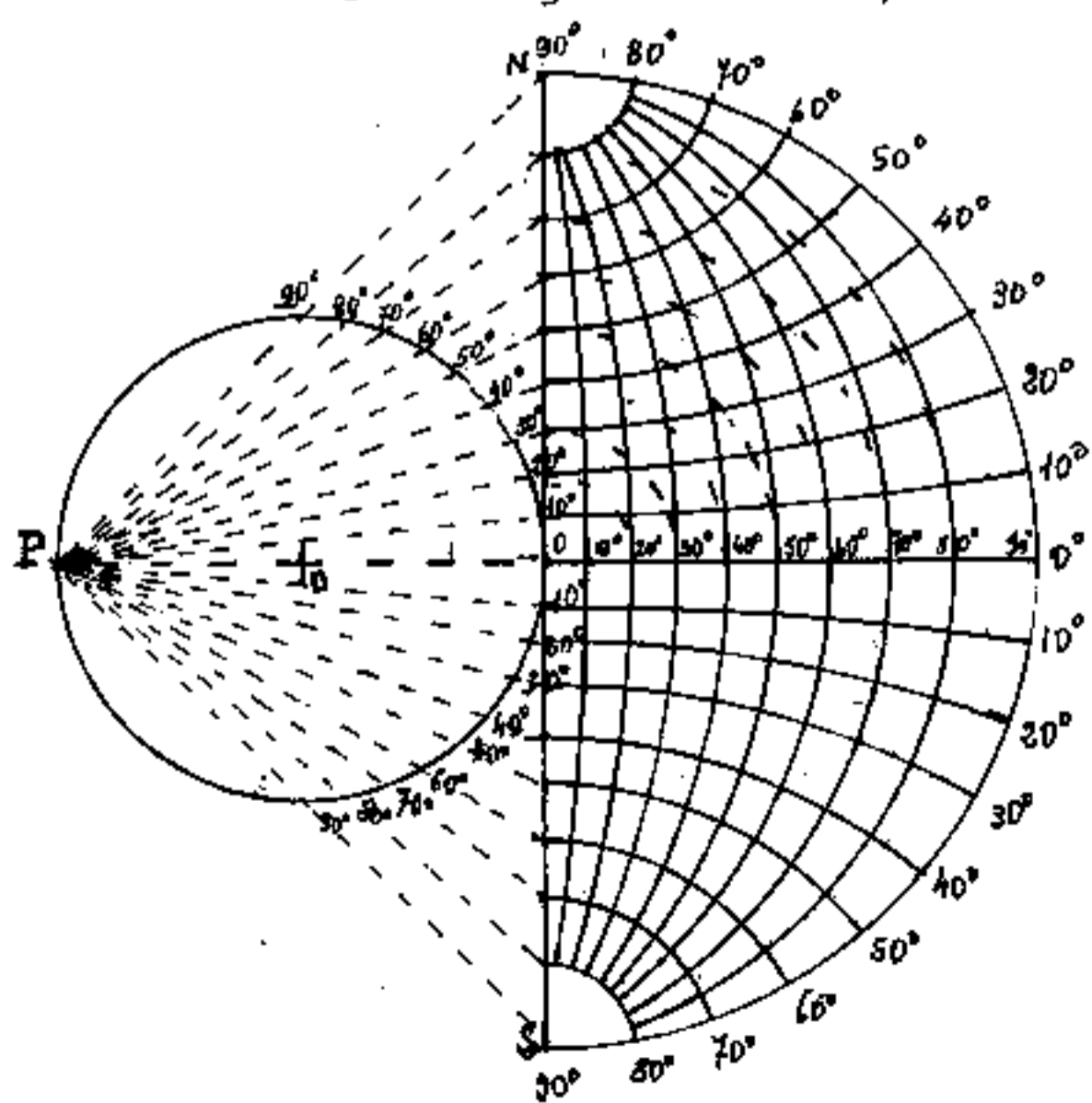
Le facce del cristallo parallele al diametro nord-sud hanno il punto di tangenza sulla circonferenza equatoriale, che coincide con la loro proiezione stereografica.

La proiezione stereografica trova applicazione ben maggiore, nelle carte geografiche. È un caso particolare delle proiezioni prospettiche, che si verifica quando il centro di proiezione (polo) è sulla superficie sferica.

Se il centro di proiezione viene collocato al centro della sfera, la proiezione si dice centografica.

Se il polo si trova sull'equatore la proiezione stereografica si dice equatoriale.

Le proiezioni stereografiche dei paralleli, e dei meridiani sono archi di cerchio a raggio variabile, cosicchè, l'equatore ed il meridiano, avendo raggio infinito, si proiettano rettilinei.

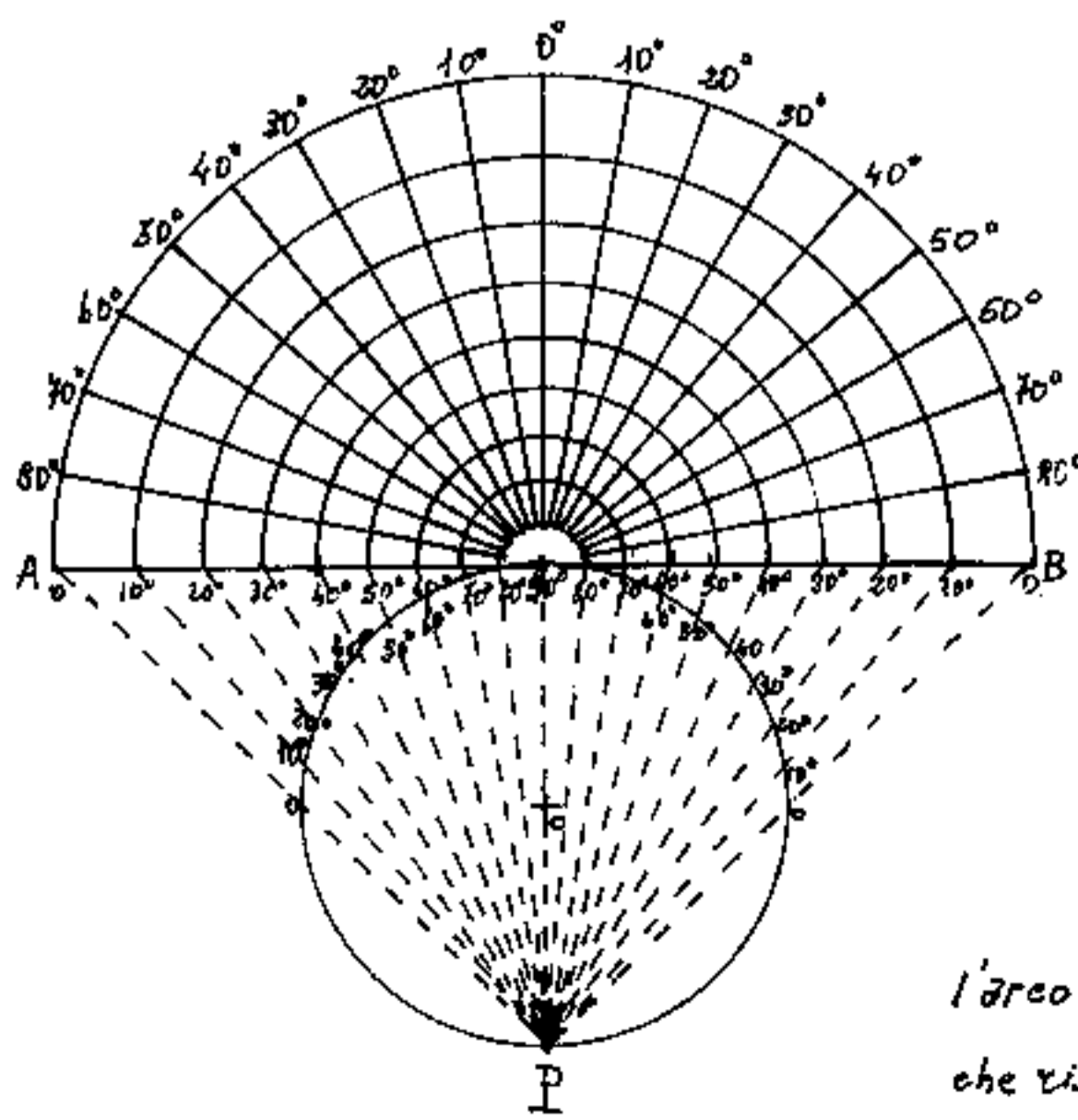


Proiezione stereografica equatoriale.

Tracciata la circonferenza di centro  $O$  e scelto un polo  $P$ , da  $P$  si proiettano sulla retta tangente  $NS$ , le graduazioni della circonferenza. Assunto  $\overline{NS}$

come diametro, si traccia la semicirconferenza  $\widehat{NS}$  e si gradua. I centri degli archi di cerchio delle proiezioni dei paralleli, sono sui prolungamenti della retta  $\overline{NS}$  e debbono raccordare le graduazioni della semicirconferenza con le proiezioni omonime su  $\overline{NS}$ . I centri degli archi di cerchio delle proiezioni dei meridiani sono sulla retta  $\overline{OP}$  prolungata. Il primo centro corrisponde al punto di tangenza di  $\overline{NS}$  con la circonferenza (arco che abbiamo già tracciato e graduato). Lo sfracionamento del raggio  $\overline{NS}/2$  per effetto delle proiezioni delle graduazioni, riportiamolo sul raggio giacente su  $\overline{PO}$  prolungato, e scriviamo le corrispondenti graduazioni. Dovendo gli archi di cerchio dei meridiani passare per tali punti e per  $N$  ed  $S$ , resta determinato il centro. Notare che le maglie verso l'esterno sono più grandi ed impiccoliscono via via che si avvicinano al centro.

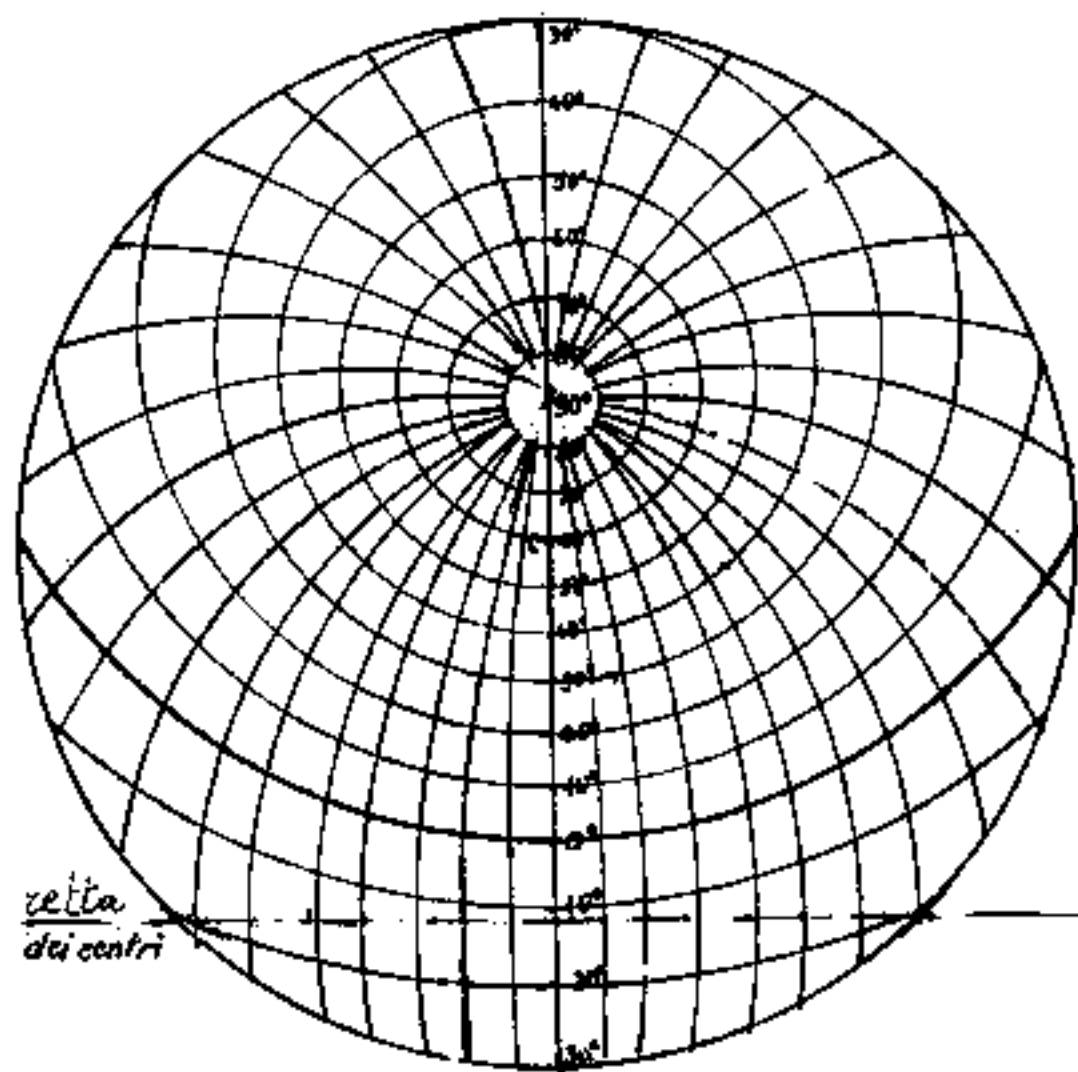
### Proiezione stereografica polare



Dal polo  $P$  si proietta la semicirconferenza graduata su  $\overline{AB}$ , quindi con centro su  $\overline{AB}/2$  si tracciano con archi di cerchio i paralleli, ricordando le proiezioni omonime. Infine si gradua l'arco  $\overline{AB}$  e si tracciano i meridiani che risulteranno zetticinei.



# Proiezione stereografica orizzontale.



Centro di proiezione "C"  
un punto qualsiasi della  
superficie sferica. Per es.  
latitudine  $60^\circ$  e longitudi-  
ne  $0^\circ$ . Il meridiano ove è  
il centro di proiezione, si  
proietta rettilineo. Il  
piano di proiezione è  
perpendicolare alla retta

che unisce il polo di proiezione col centro sfera e col cen-  
tro di proiezione, cioè sulla terra è perpendicolare al filo a  
piombo, da cui la dizione "orizzontale". Il cerchio massimo che  
delimita la proiezione, è inclinato della latitudine rispetto ai  
piani dei paralleli; ed ha il centro sulla proiezione del centro  
di proiezione. I poli della terra si proiettano sulla proiezione  
rettilinea del meridiano ove è il centro di proiezione. (se  
ne vede uno solo). Se sfrazioniamo il segmento rettilineo, pro-  
iezione del meridiano del centro di proiezione come è frazionata  
la retta  $\overline{AB}$  della proiezione stereografica polare e graduiamo  
mo gli sfrazionamenti, ricordando che il centro di proiezione ha  
latitudine assegnata (nel nostro caso  $60^\circ$ ) otteniamo un punto dei paral-  
leli. All'intorno del polo terrestre vi saranno sul meridiano,  
(che si proietta rettilineo) due punti aventi la stessa latitudine,

per essi si fa passare una circonferenza che ha il centro sul meridiano rettilineo ed equidistante dalle latitudini omonime. L'ultima circonferenza avrà per latitudine l'angolo complementare della latitudine del centro di proiezione, e sarà tangente alla circonferenza che delimita il campo.

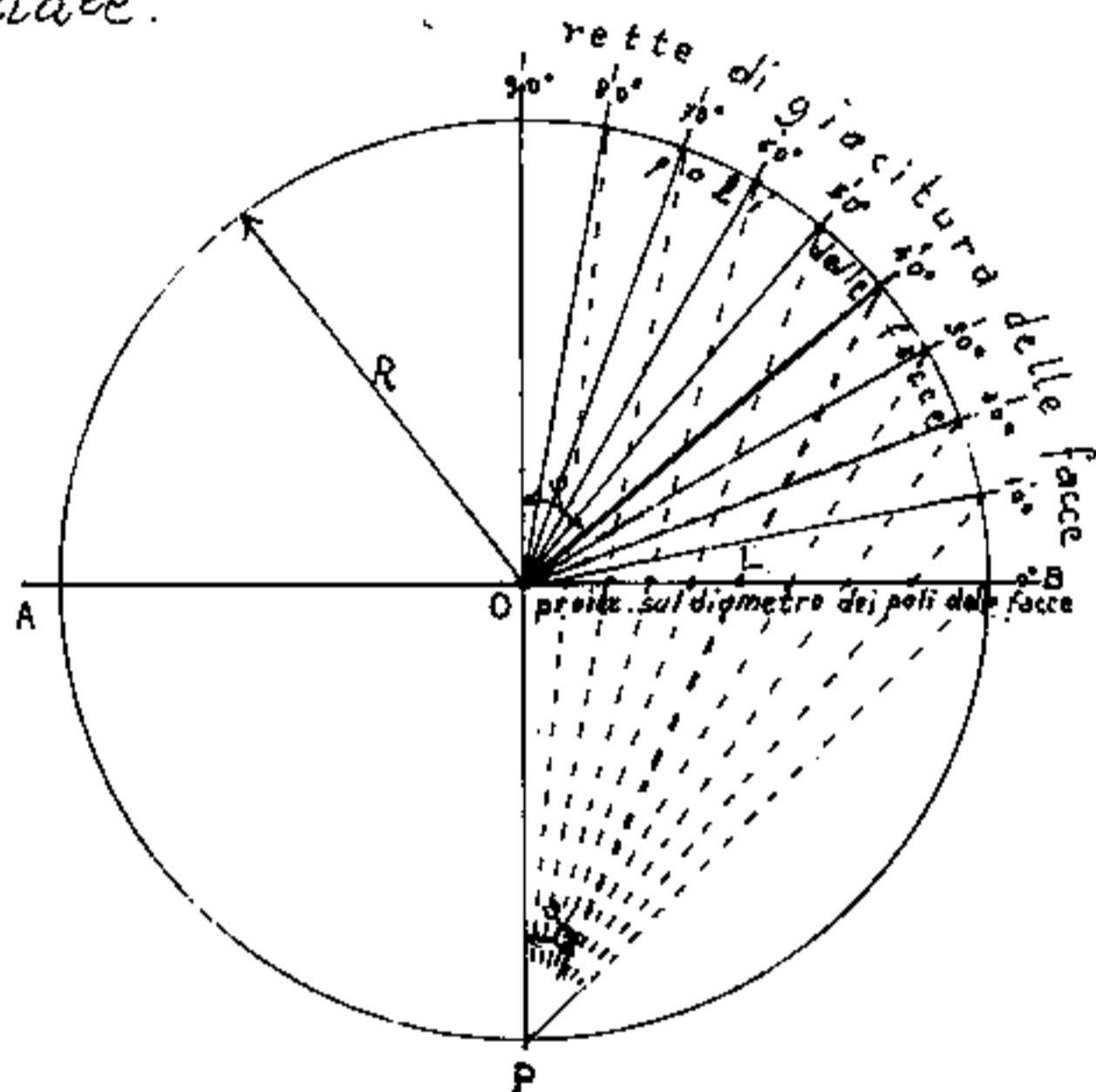
Nella proiezione stereografica polare, notiamo, che lo sfrazionamento della retta  $\overline{AB}$  corrisponde ai valori della tangente trigonometrica, per angoli metà latitudine, ritenuto unitario il diametro della circonferenza di centro  $O$ .

Questa osservazione ci consente di prolungare la proiezione rettilinea del meridiano del polo e di continuare la graduazione e quindi i centri per gli archi dei restanti paralleli. (Si può calcolare il raggio come semisomma dei due valori corrispondenti allo sfrazionamento da ricordare).

Per gli archi di meridiano, sappiamo che debbono passare per il polo terrestre. Se alla distanza dalla proiezione del polo terrestre, pari ad un raggio terrestre, tracciamo una retta perpendicolare alla proiezione rettilinea del meridiano passante per il centro di proiezione. Assunta come unità il raggio terrestre, si riportano su tale retta i valori della tangente trigonometrica

delle longitudini, tali punti sono i centri dei corrispondenti archi di meridiano.

Supponiamo di voler fare la proiezione stereografica della parte di solido, esistente nell'emisfero nord, con proiezione dal polo sud sul piano equatoriale.



Abbiamo graduato l'inclinazione delle rette di giacitura delle facce ponendo lo zero per rette orizzontali (facce verticali). Abbiamo indicato con  $\psi$  l'angolo complementare alla nostra graduazione, perciò se  $R$  è il raggio della sfera ed  $\overline{OL}$  il raggio del parallelo, (Luogo delle proiezioni dei poli delle facce aventi la stessa latitudine), (cioè la rappresentazione delle facce aventi la stessa inclinazione)  $\overline{OL} = R \tan(\psi/2)$

In proiezione stereografica, la nostra proiezione, starà sul cerchio (di raggio  $OL$ ) che rappresenta la latitudine di quelle facce.

In questa proiezione stereografica polare i meridiani si proiettano come diametri.

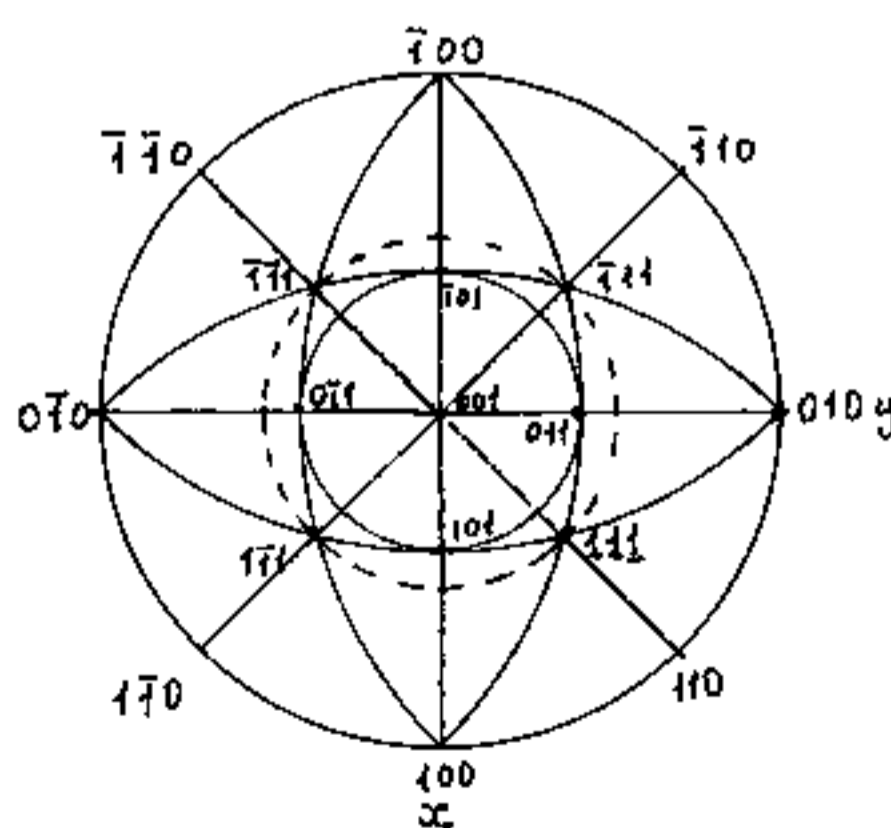
Fra tutte le possibili inclinazioni delle facce, consideriamo i seguenti casi particolari:

1) facce orizzontali si rappresentano al centro del cerchio

2) facce verticali si rappresentano sulla circonferenza

3) facce inclinate a  $45^\circ$  si rappresentano come intersezione di due meridiani in proiezione stereografica equatoriale

Infatti  $OL = \operatorname{tg}(45^\circ/2) \cdot R = R(\sqrt{2} - 1)$ , perciò se con raggio  $R\sqrt{2}$ , e centro in 4 punti sulla circonferenza possiamo facilmente costruire il cerchio del parallelo a  $45^\circ$ ,



che abbiamo disegnato sottile in figura. Il punto che rappresenta una certa faccia inclinata a  $45^\circ$  sarà l'intersezione della circonferenza tracciata sottile, con la proiezione della retta di giacitura.

Nella figura, assunto l'asse  $z$  normale al disegno, ed  $x; y$  come indicato, si sono anche segnate le siglature delle facce

rappresentate, in modo da poter verificare la loro posizione.

Le proiezioni stereografiche che abbiamo trattato, consentono di costruire (in proiezione stereografica) il reticolo di maglie costituito dalle coordinate geografiche (longitudine e latitudine, rappresentate dai meridiani e dai paralleli). È evidente che, da ciò, si possono proiettare tutti i punti di figure esistenti su una superficie sferica, quando si conoscono le relative coordinate.

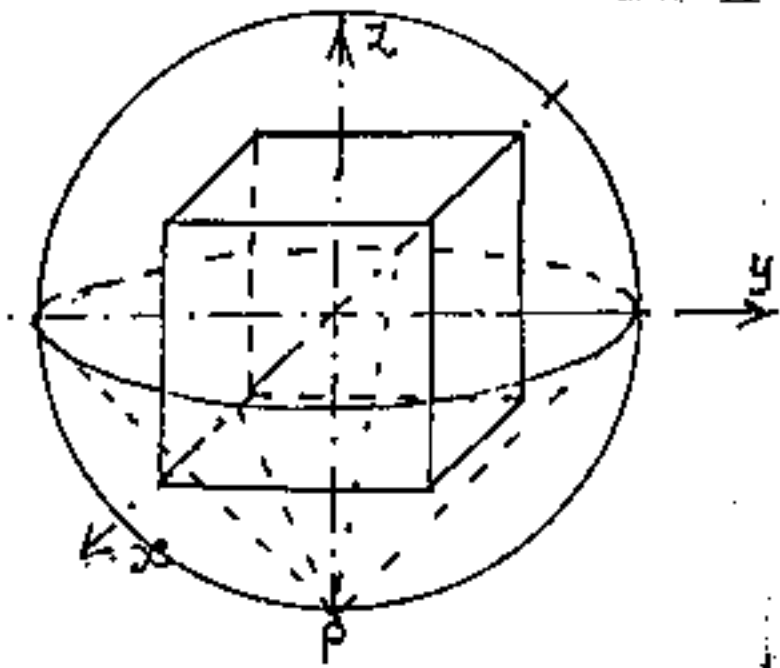
Vi sono due importanti proprietà nella proiezione stereografica, e cioè:

- 1) La proiezione stereografica di un cerchio sulla superficie sferica è ancora un cerchio di raggio finito o infinito (retta)
- 2) Gli angoli che formano due archi di cerchio sulla sfera, si conservano inalterati nella proiezione.

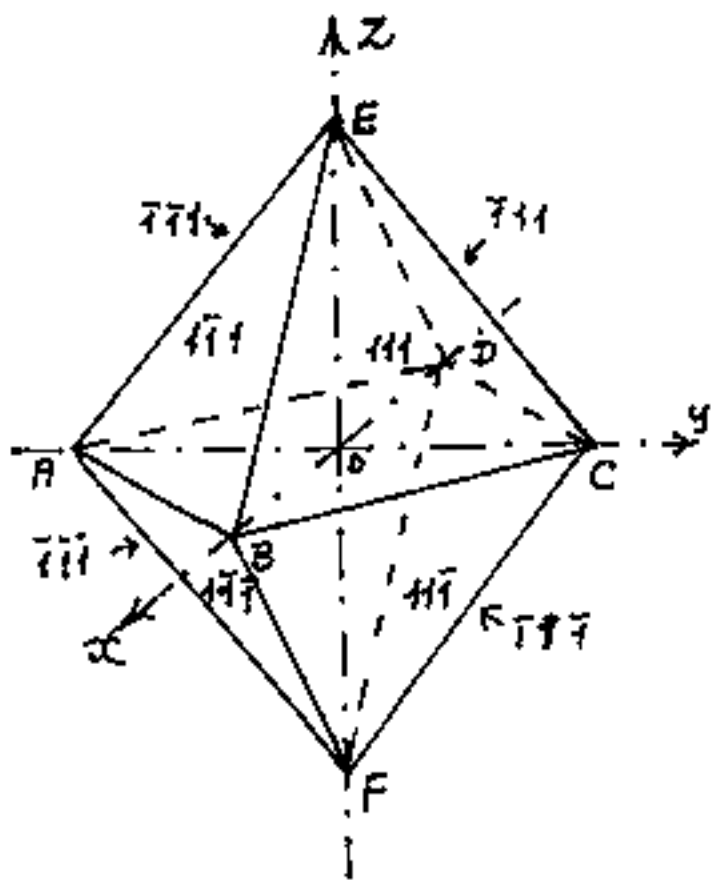
Vediamo come tali proprietà interessano la proiezione stereografica dei cristalli.

Iniziamo con esempi molto semplici. Consideriamo un cubo riferito ad un sistema di assi cartesiani passanti per il centro faccia del cubo, e paralleli ai suoi spigoli, e

Consideriamo una sfera concentrica, cioè avente il centro nel centro del solido, e nel centro degli assi di riferimento. (Nella figura precedente, di proiezione stereografica polare, abbiamo già indicate e rappresentate le sei facce del cubo:  $\{100\}$ ;  $\{010\}$ ;  $\{\bar{1}00\}$ ;  $\{0\bar{1}0\}$ ; ed infine  $\{001\}$  che corrisponde a  $\{00\bar{1}\}$ )

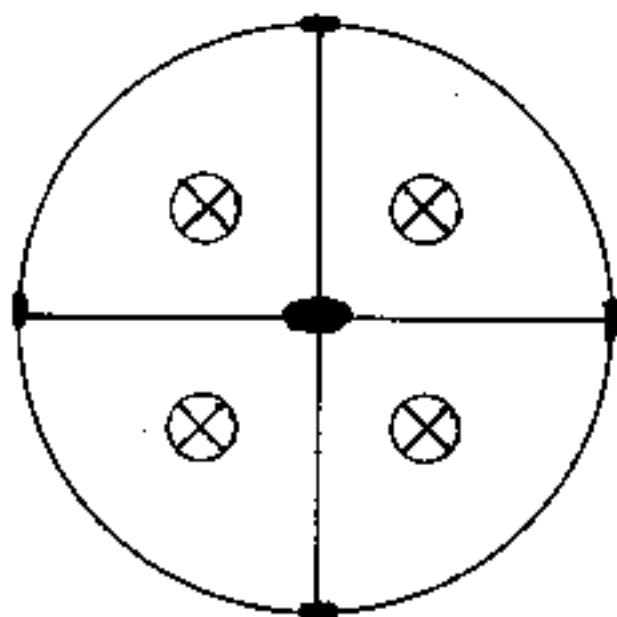


Consideriamo una bipiramide rombica, si nota che  $x, y, z$  sono tre assi di simmetria binaria ( $3A_2$ ); Vi sono tre piani di simmetria,  $3P$  ( $ABCD, AEFC, FBED$ ) e, dicono: un centro di simmetria coincidente con "O"; intendendo per centro di simmetria un punto all'interno del cristallo equidistante da elementi cristallograficamente identici.



Come si vede, nella proiezione stereografica, figurano dei simboli grafici di cui non abbiamo parlato.

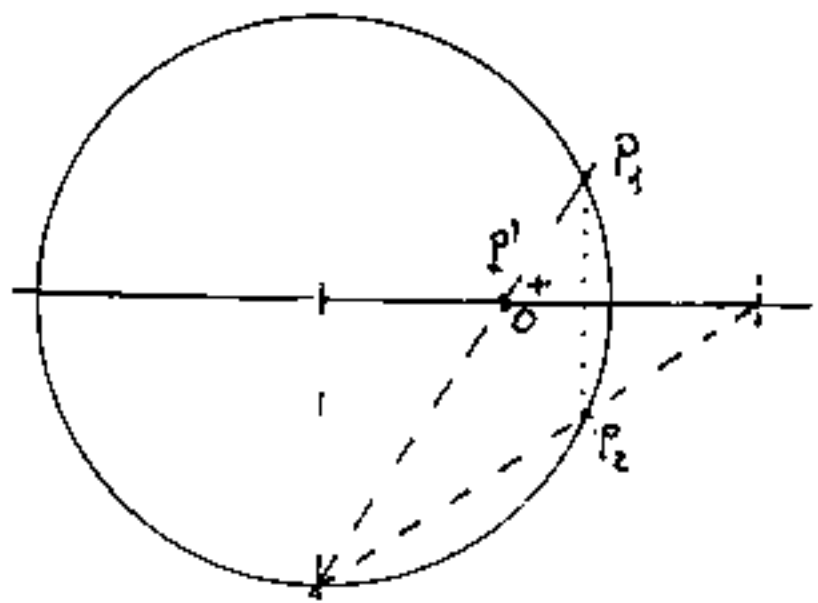
1) I piccoli ellissi anneriti che figurano agli estremi degli assi  $x$  ed  $y$  ed al centro per l'asse  $z$ , significano: Asse di simmetria binaria. Il simbolo:  $\blacktriangle$  (che non figura nella proiezione



ed al centro per l'asse  $z$ , significano: Asse di simmetria binaria. Il simbolo:  $\blacktriangle$  (che non figura nella proiezione

ora eseguita) significa: Asse di simmetria ternaria.  
 Il simbolo: ■ significa: Asse di simmetria quaternaria.  
 Il simbolo: ⬠ significa: Asse di simmetria senaria.

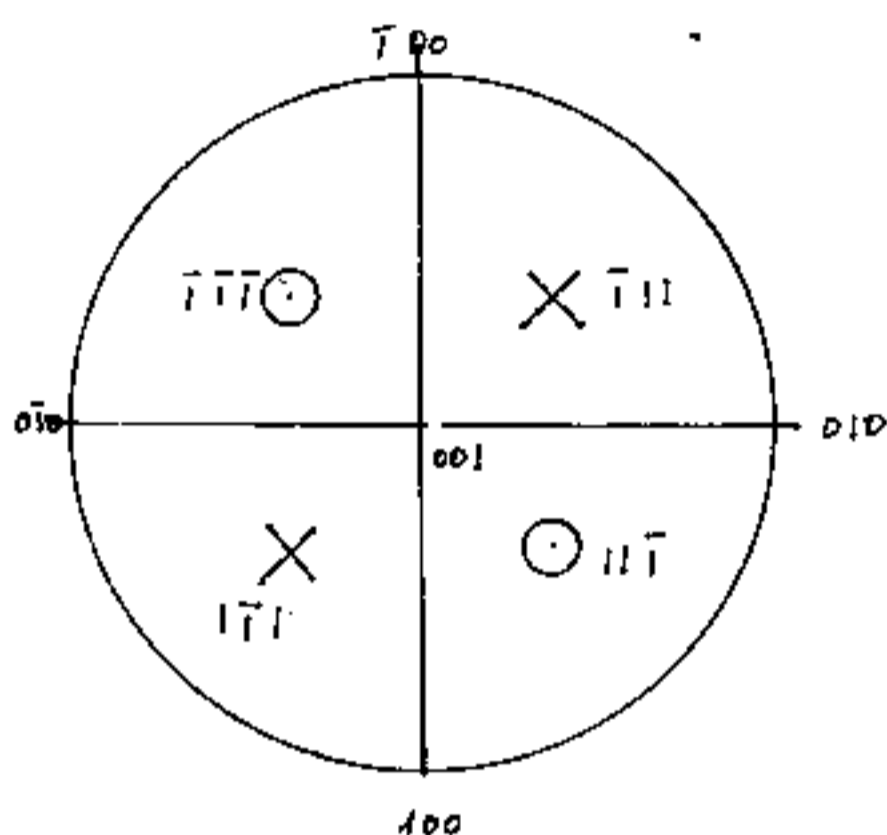
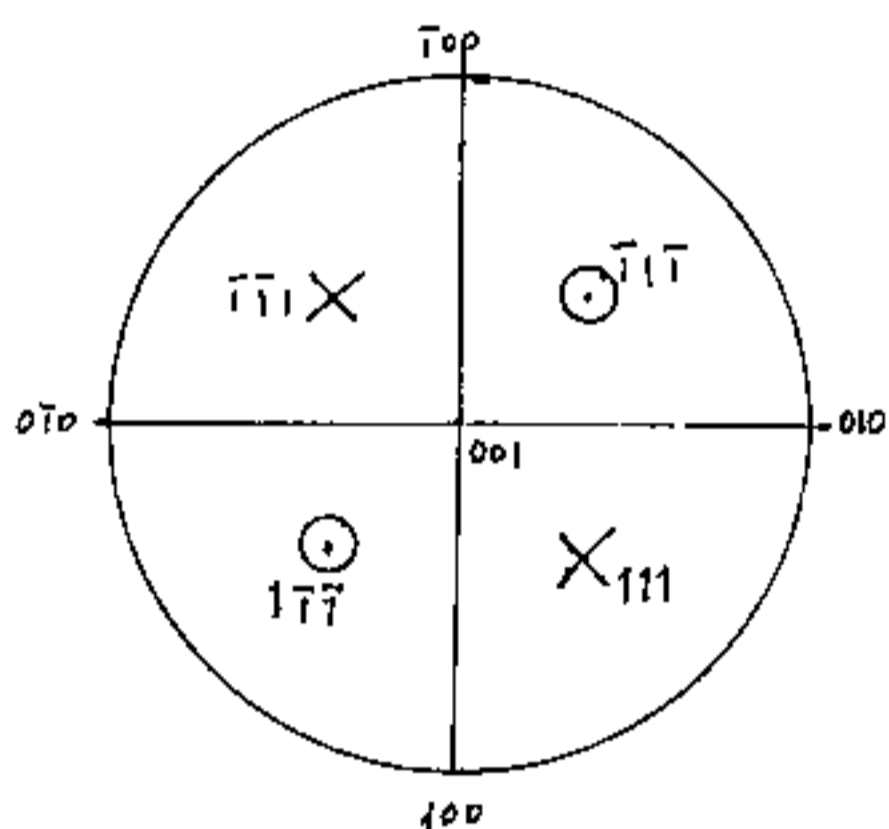
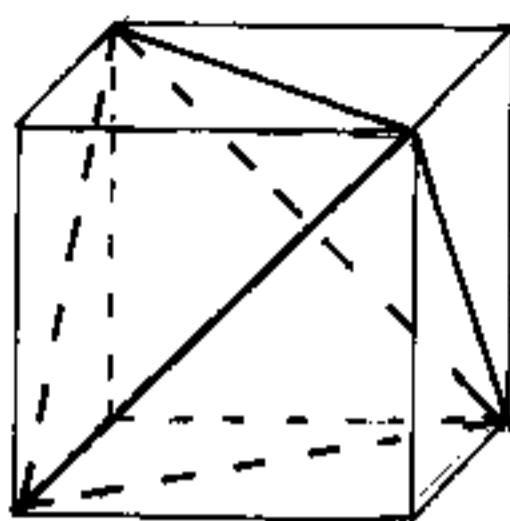
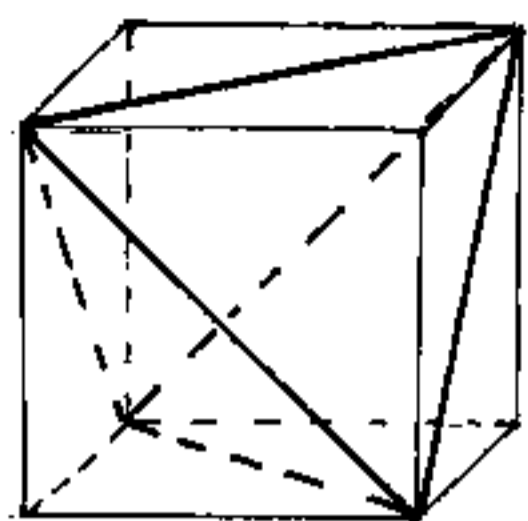
Per poter distinguere le facce del solido che guardano verso l'emisfero superiore, da quelle che guardano verso l'emisfero inferiore, poiché la proiezione del punto di intersezione delle



rette di giacitura di queste ultime uscirebbe dall'interno della sfera. Detto  $P_1$  il punto intersezione con l'emisfero superiore, detta  $P'$  la sua proiezione stereografica, detto  $P_2$  il punto intersezione della retta di giacitura della corrispondente faccia che guarda verso il basso ( $P_1$  e  $P_2$  sono simmetrici al piano di proiezione) si conviene di assumere per  $P_2$  la stessa proiezione  $P'$  distinguendo la superiore con una crocetta: "X", e la inferiore con un cerchietto: "O"; se vi sono entrambe le facce avremo: "⊗"

Per avere una specifica applicazione, consideriamo i due tetraedri ricavati dalle diagonali di faccia dei due cubi ugualmente orientati, ed esaminiamo le sottostanti

proiezioni stereografiche.



abbiamo anche siglato la rappresentazione delle facce, sia dei cubi, sia dei tetraedri per avere un preciso controllo con la convenzione esposta.

Non riteniamo in questa sede di dettagliare i metodi della cristallografia e cristallologia, che possono essere diversi da autore ad autore, il nostro scopo è fornire le basi matematiche sullo studio dei solidi ... per chi voglia ripartire da zero.



# Considerazioni sulle figure delle facce dei solidi

## Solidi a facce triangolari

equilatero : tetraedri, ottaedri, icosaedri.

isosceli : triacistetraedri (12); tetracisesaedri (24);  
triacisottaedri (24); pentaciso =  
decaedri (60); triacisicosaedri (60);  
esacistetraedri (convessi) (24).

scaleni :  
(particolari) esacistetraedri (convessi) (24)

## Solidi a facce quadrilatero

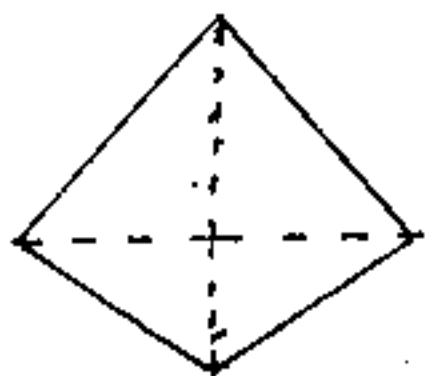
a lati uguali < quadrato : cubo (esaedro) (6)  
< rombi : romboedri (vedi in seguito)

I rombi possono pensarsi costituiti dall'affian-  
camento sulla base di due triangoli isosceli.

- Se i due triangoli sono equilateri si ha  
il romboesaedro costituito da un ottaedro  
con affiancati due tetraedri

Se i due triangoli isosceli sono rettangoli,  
si ha il caso limite di quadrati e si torna  
al cubo. I solidi a facce rombiche meritano  
un capitolo a se, che svilupperemo nel seguito.

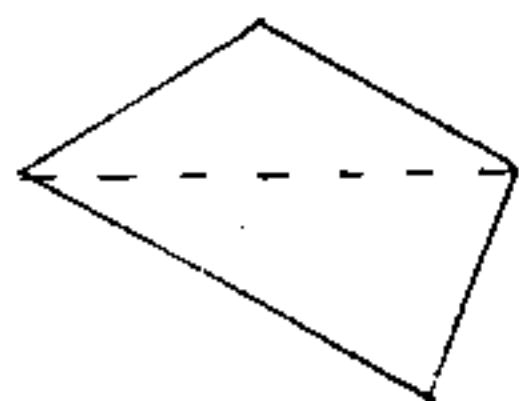
Se i due triangoli isosceli affacciati per la base sono diversi, cioè pur avendo la stessa base, hanno lati diversi, si ottiene la classe



di solidi detti trapezoedri di cui abbiamo già tratta-  
to la condizione di possi-

bilità (faceppiane), ed in un caso particolare il deltoide dodecaedro.

Se i quadrilateri hanno un solo triangolo isoscele affacciato ad uno scaleno per la base, cioè se il quadrilatero ha due soli lati consecutivi uguali si ha la classe dei so-



lidi detti diacisdodecae-  
dri (o diploide), che  
abbiamo già trattato.

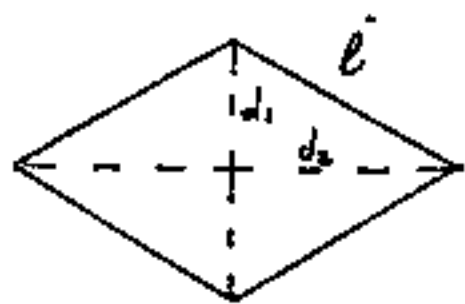
## Solidi a facce pentagonali

In questa classe di solidi abbiamo tratta-  
to l'icositetraedro pentagonale (24 facce)  
e le varie trasformazioni dei pentagonodo-  
decaedri (tetartoeedri) (vedi cap. prec.)

# 3 Romboedri (romboesaedri)

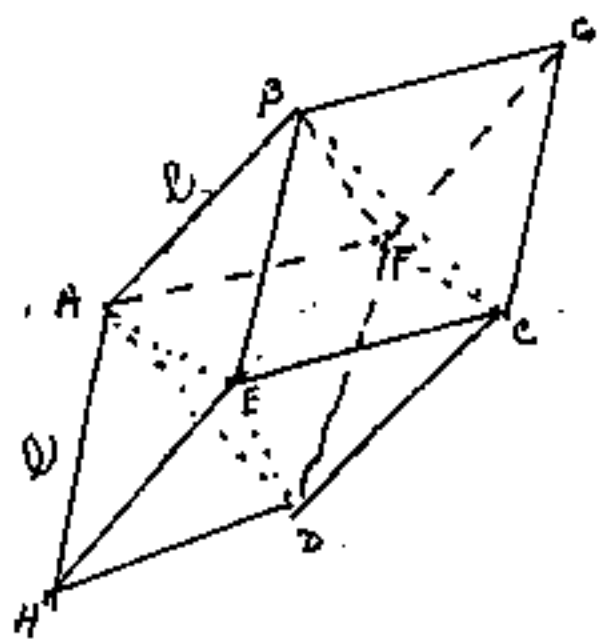
3 romboedri sono solidi aventi facce rombiche uguali. Essi possono differire sia per numero di facce, sia per le caratteristiche del rombo che può essere determinato (noto il lato = spigolo del solido) dal rapporto delle diagonali o di una diagonale ed il lato.

Il romboesaedro spesso detto semplicemente romboedro ha sei facce rombiche; se il rombo è costituito da due triangoli equilateri affacciati su un lato (base),



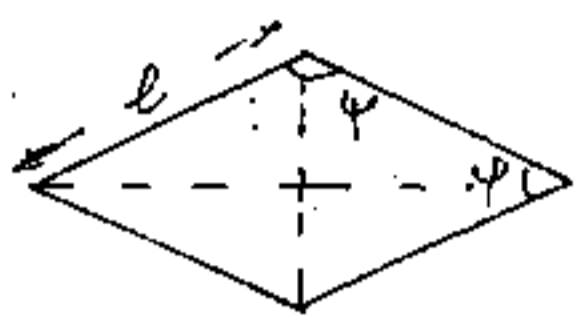
avremo che il rapporto fra le diagonali è  $\sqrt{3} = d_2/d_1$ , mentre è uno il rapporto fra il lato e la

diagonale minore. Il rombo-esaedro detto comunemente romboedro aventi per facce tale rombo è scomponibile in un ottaedro affiancato da due tetraedri. Guardando la figura



non è difficile individuare l'ottaedro ABCDEF ed i tetraedri BCFG ed AEDH. questi "aghi" cristallografici non è raro ritrovarli in certe geminazioni.

Il rombo può essere pensato come la deforma-  
zione di un quadrato, a lati rigidi, cernie-  
rati ai vertici. Gli angoli interni:  $\varphi + \psi = 180^\circ$ ,



di cui uno acuto ed uno  
ottuso, possono essere indi-  
ce del rombo:  $\psi = (180^\circ - \varphi)$ , e

quindi per  $\varphi$  variabile da zero a  $\frac{\pi}{2}$  si pas-  
sa dal segmento lungo  $2 \cdot l$  ( $l = \text{lato}$ ) al qua-  
drato di lato  $l$ . Cioè con:  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ; se  
continuassimo ad aumentare  $\varphi$ , quest'ultimo diven-  
terebbe ottuso, e per:  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$  si avrebbe  
il processo inverso cioè da quadrato a  
segmento lungo due  $l$ , con configurazioni  
identiche alle precedenti, se scambiamo  $\varphi$  con  $\psi$ .

In un solido a facce rombiche; ( $\varphi \neq \psi$ ),  
avremo vertici diversi, perché, se pensiamo  
che in un vertice concorrono almeno 3 facce,  
gli angoli che presentano nel vertice possono  
essere (con  $\varphi$  acuto e  $\psi$  ottuso)

$(3\varphi)$ ;  $(\varphi + 2\psi)$ ; caso reale nel rombo esaedro

$(3\psi)$ ;  $(2\varphi + \psi)$ ; caso reale nel rombo esaedro

quando  $\varphi < 120^\circ$ , cioè  $\varphi > 60^\circ$ . Questo fa intea-

vedere che per  $\varphi > 60^\circ$  si hanno due diversi solidi

comboedri aventi le stesse facce uguali.

Poiché nelle facce abbiamo lo stesso numero pari di angoli (due  $\varphi$  e due  $\psi$ ) è impossibile che tutti i vertici siano  $3\varphi$ , o  $3\psi$  o  $(2\varphi+\psi)$ , o  $(2\psi+\varphi)$ . Per esempio con 6 facce abbiamo:

$$2 \text{ vertici con } 3\varphi = 6\varphi$$

$$6 \text{ vertici con } 2\psi+\varphi = 12\psi+6\varphi$$

$$\hline 8 \text{ vertici} \quad \text{compensivi} \quad 12\varphi \text{ e } 12\psi \text{ (6 facce).}$$

(analogamente invertendo  $\varphi$  con  $\psi$  con  $\varphi > 60^\circ$ )

La possibilità di un solido, in relazione agli angoli delle facce che convergono in uno stesso vertice porta alle seguenti conclusioni:

- 1) Un vertice ha almeno tre facce, se ne ha infinite diventa il vertice di un cono.
- 2) Se  $\alpha, \beta, \gamma$  sono gli angoli interni delle tre facce che convergono nello stesso vertice, per la realtà del solido deve essere:  $(\alpha+\beta+\gamma) < 2\pi$ , per  $(\alpha+\beta+\gamma) = 2\pi = 360^\circ$ , le tre facce appartengono allo stesso piano e non possono formare vertice.
- 3) Per la realtà del solido vale la regola: (nel caso di vertici con tre facce) "ogni angolo deve

essere minore della somma degli altri due, e maggiore della loro differenza,, (regola già nota per i lati del triangolo)

Se un angolo uguaglia la somma o la differenza degli altri due, la faccia con l'angolo maggiore si sovrappone alle altre due affiancate, (si ha un piano, non il vertice di un solido).

4) Sempre in un vertice, se due angoli delle facce sono uguali, allora il terzo angolo può essere maggiore di uno e minore di due; oppure è minore di uno e maggiore di zero:  $\varphi < \psi < 2\varphi$ ;  $0 < \varphi < \psi$ ; poiché:  $2\varphi + \psi < 360^\circ$ .

$$\boxed{0 < \varphi < \psi < 2\varphi} \quad ; \quad \frac{\varphi}{2} < \frac{\psi}{2} < \varphi$$

ed anche:  $\frac{\psi}{2} < \varphi < \psi$ ;

$$\boxed{\left(\frac{\psi}{2} + 2\varphi\right) < 3\varphi < (2\varphi + \psi) < 360^\circ}$$

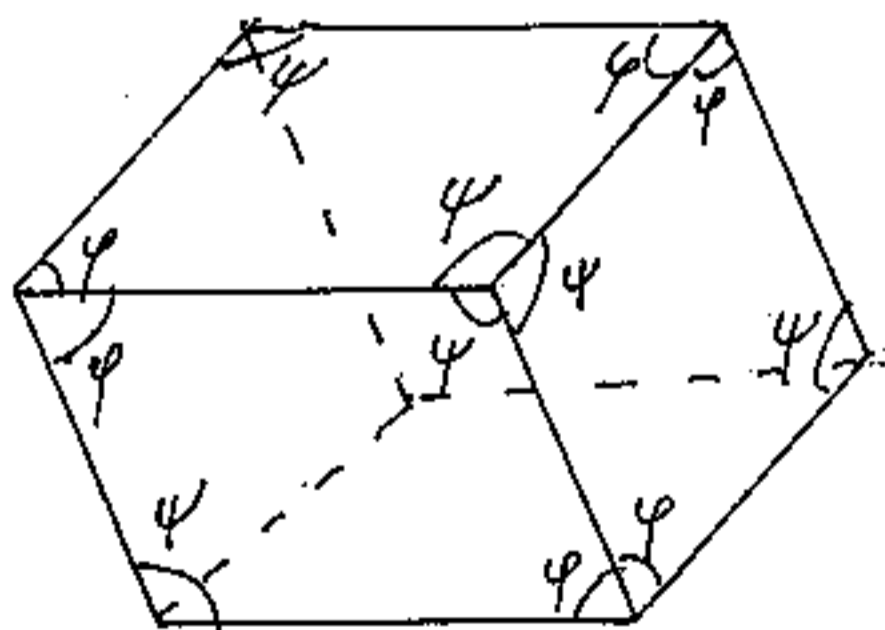
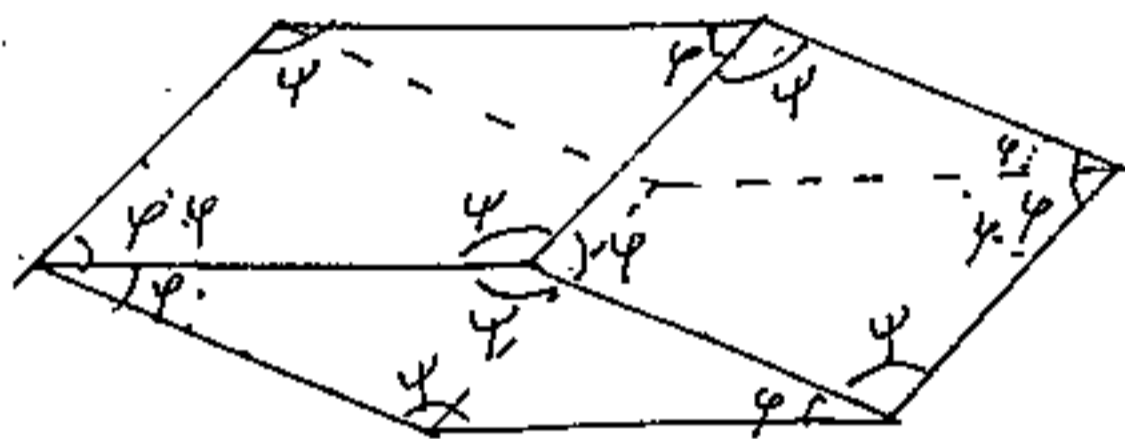
$$\boxed{\frac{5}{2}\varphi < (2\varphi + \psi) < 3\varphi < 360^\circ}$$

Nel caso del rombo: ( $\psi = 180^\circ - \varphi$ ) si ottiene:  $\varphi > 60^\circ$

Quindi nel caso del romboesaedro si ha (con  $\varphi < \psi$ )

1) 2 vertici con  $(3\varphi)$  e 6 vertici con  $(\varphi + 2\psi)$ ; caso sempre valido con:  $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ .

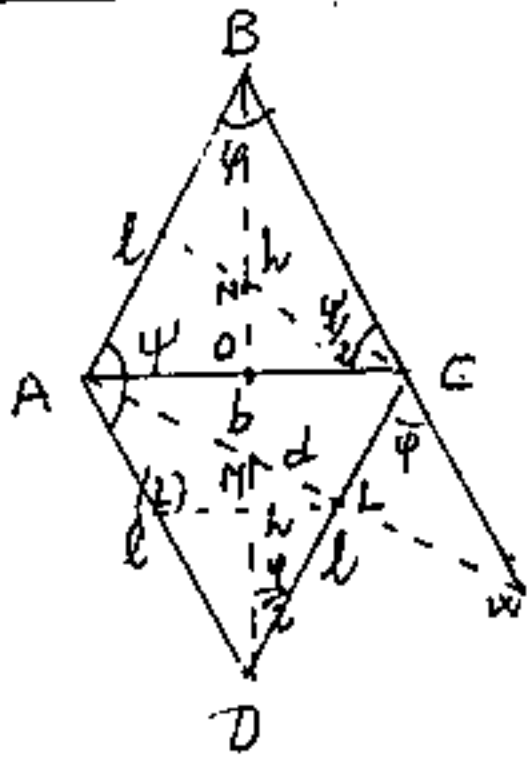
2) 3 vertici con  $(3\varphi)$  e 6 vertici con  $(\varphi + 2\psi)$  - caso valido solo per  $\varphi > 60^\circ$  (si hanno due tipi di romboesaedro a facce identiche)



3) 4 vertici con  $(\varphi + 2\psi)$  e 4 vertici con  $(2\varphi + \psi)$   
le facce non possono essere piane

4) 2 vertici con  $3\varphi, 3\psi; (1\varphi + 2\psi); (1\psi + 2\varphi)$   
(impossibile)

# Correlazioni fra gli elementi costitutivi dei romboesedri



Siano: (per la faccia piana)

$l$  = lato del triangolo isoscele  
(metà rombo) = spigolo del solido romboedro.

$b$  = base del triangolo isoscele =  
= diagonale del rombo.

$h$  = altezza del triangolo isoscele = metà dia-  
gonale del rombo.

$\varphi$  = angolo fra i lati opposto a " $b$ "

$\psi$  = angolo fra i lati opposto a " $2h$ "

$d$  = distanza fra due lati paralleli =  $\overline{AL}$

$M$  = ortocentro del triangolo isoscele  $ACD$

$\overline{DM}$  = distanza di  $M$  dal vertice  $\varphi$ . =  $\overline{BN}$  =  $\overline{DM}$  = slittamento

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 = l^2 ; \quad \varphi = 2 \arctg\left(\frac{b}{2h}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{b}{2l}\right) = 2 \arccos\left(\frac{h}{l}\right)$$

$$\psi = 180^\circ - \varphi ; \quad d = \frac{bh}{2l} = \overline{AL} = l \sin \varphi$$

$$\overline{DL} = l \cos \varphi \quad \overline{DM} = \overline{DL} / \cos \frac{\varphi}{2} = l \cos \varphi / \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$\overline{ML} = \overline{DL} \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = l \cos \varphi \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \overline{LW} = l (1 + \varphi - \sin \varphi)$$

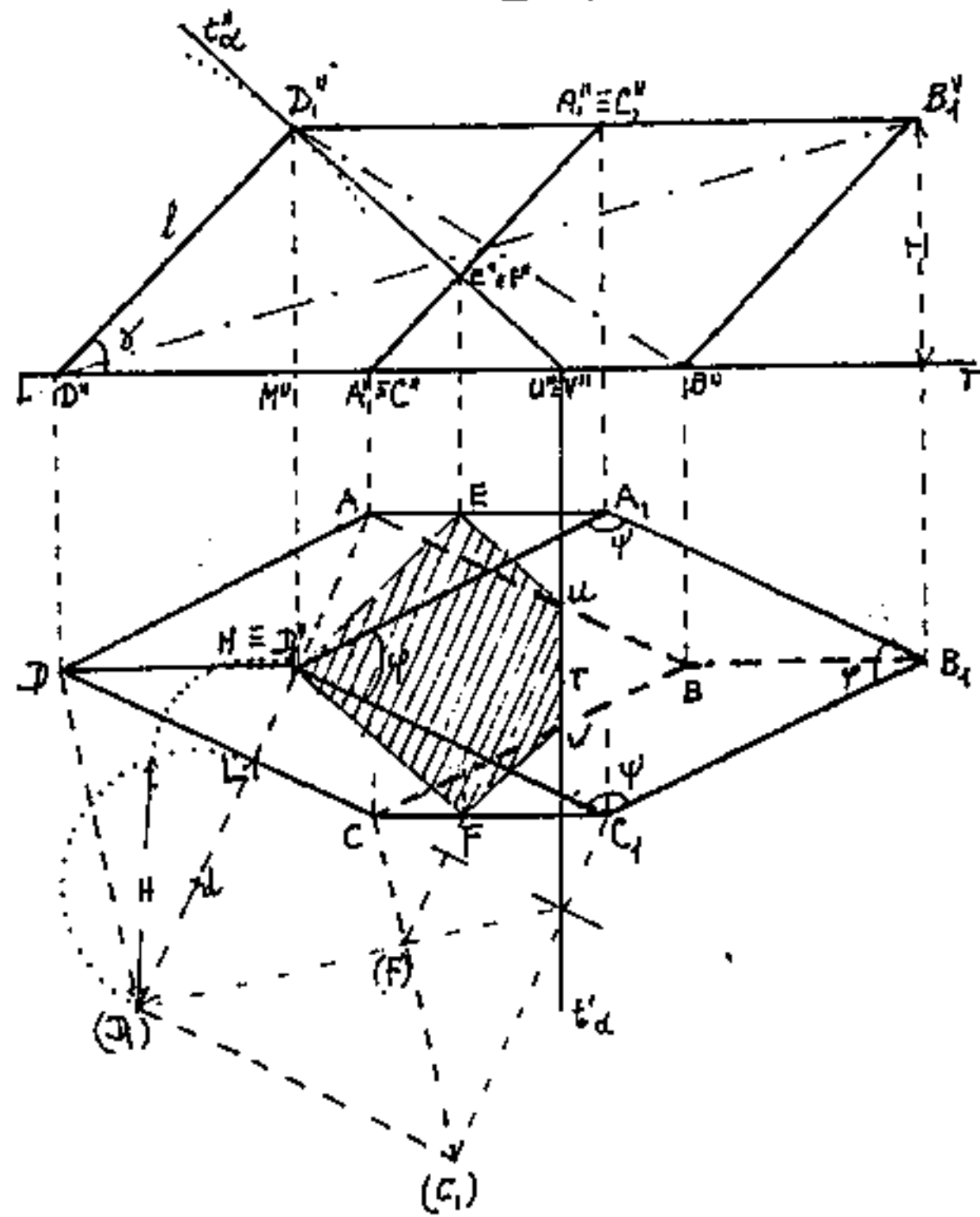
$$\overline{CW} = l \left( \frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right)$$



Allo scopo di determinare le correlazioni fra gli elementi del solido, eseguiamone le proiezioni di Monge, evidenziando lo slittamento di due facce parallele in direzione della diagonale della faccia congiungente i vertici con l'angolo  $\varphi$ .

Allo scopo di non ripetere lo slittamento secondo l'altra diagonale congiungente i vertici con l'angolo  $\varphi$ , faremo variare  $\varphi$  da 0 a  $180^\circ$ ; (sarà reale solo  $0 < \varphi < 120^\circ$ .)

Sia  $ABCD$  la faccia sul I° piano di proiezione, e sia  $A_1B_1C_1D_1$  la sua parallela. Se consideriamo che la faccia  $D_1D_2C_1C_2$  disegnata sul I° piano dovrà ruotare intorno a  $\overline{DC}$ .



torno a  $\overline{DC}$ .  
 $\overline{L(D_1)} = d$ ; la distanza fra le due facce parallele, sarà:  
 $H = \sqrt{d^2 - \overline{ML}^2}$ .

Lo slittamento delle facce:  $\overline{MD} = l \left( \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi/2} \right)$   
 $\overline{MD} = l(\cos \delta)$  ed.  
 $H = l \sin \delta$ .

Poiché il lato:  $\overline{D_1''D_2''} = l$  si proietta

in veza grandezza avremo anche:  $H = \sqrt{l^2 - \overline{D''M''}^2}$

Sostituendo nelle due espressioni:

$$H = \sqrt{d^2 - \overline{ML}^2} = \sqrt{(l^2 - \overline{DL}^2) - \overline{ML}^2} = \sqrt{l^2 - (\overline{DL}^2 + \overline{ML}^2)} = \sqrt{l^2 - \overline{DM}^2}$$

$$H = \sqrt{l^2 - l^2 \cos^2 \varphi / \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{l}{\cos \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \varphi} \quad \boxed{H = l \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}}}$$

Graficamente per costruire la seconda proiezione basta prolungare  $\overline{MM''}$  fino ad incontrare in  $D_1''$  l'arco di cerchio di raggio  $l$  e centro  $D''$ .

Esprimiamo in  $\varphi/2$  avremo:

$$H = \frac{l}{\cos(\frac{\varphi}{2})} \cdot \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - (2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1)^2} =$$

$$H = \frac{l}{\cos \frac{\varphi}{2}} \sqrt{-4 \cos^4 \frac{\varphi}{2} - 1 + 5 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$\Delta = 0 \text{ per } \cos^2(\frac{\varphi}{2}) = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\cos(\frac{\varphi}{2}) = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{3} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} 0 \\ 120^\circ \end{cases}$$

Ciò vuol dire che  $0 \leq \varphi \leq 120$  per  $\varphi > 120^\circ$  il radicando è negativo cioè le soluzioni di  $H$  sono immaginarie (non esistono solidi reali). Ma  $\varphi = 180 - \varphi$  per cui per:  $0 < \varphi < 60^\circ$ ;  $180^\circ > \varphi > 120^\circ$ ; si ha un solo tipo di solidi, (le facce parallele sono slittate nella dire

zione della diagonale congiungente i vertici  $3\varphi$ .

$$\text{Per: } 60^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \quad ; \quad 90^\circ \geq \psi \geq 120^\circ$$

si hanno due tipi di solidi, lo slittamento delle facce parallele puo' avvenire, sia in direzione della diagonale di vertici  $\varphi$ , sia in direzione della diagonale di vertici  $\psi$ ; cio' implica due solidi aventi entrambi 6 facce rombiche identiche, ma strutturalmente, i solidi sono molto diversi.

Come si vede nel campo:

$$\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2}{3}\pi \quad ; \quad \frac{2}{3}\pi \geq \psi \geq \frac{\pi}{3}$$

scambiando  $\varphi$  con  $\psi$  si ha lo stesso rombo come faccia pero' ruotato di  $\frac{\pi}{2}$  (da cui lo scambio di direzione nello slittamento delle facce parallele)

Notiamo che per  $\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$  e  $\psi = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$ , il primo solido e' costituito da un ottaedro con affiancati due tetraedri, il secondo solido (non e' ancora un solido) e' un esagono di lato "l" cio' perche' nel primo solido la diagonale interna minore e'  $l\sqrt{2}$  nel secondo solido la diagonale interna minore e' zero. Del resto il vertice contenente  $3\psi = 3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ , non e' un vertice, ma le facce costituiscono un piano.

Calcoliamo le diagonali interne.

## Diagonali interne

Poiché da ogni vertice si diparte una sola diagonale interna (oltre le tre sulle facce esterne) essendo il romboesaedro delimitato da 6 facce 8 vertici e 12 spigoli  $F+V=S+2$  (Eulero); ogni vertice si unisce con gli altri 7, con 7 segmenti di cui 3 lati e 4 diagonali e quest'ultime tre di faccia una sola interna.

Le quattro diagonali interne si distinguono in una diagonale principale collegante i vertici con angoli di faccia  $3\varphi$  (3 volte  $\varphi$ ) e le altre tre diagonali interne colleganti i vertici con angoli di faccia  $\varphi+2\varphi$ . Queste tre diagonali sono uguali fra loro e rappresentano la diagonale di un rettangolo di lati  $l$  e  $b$ .

$$\text{Diagonale principale} = P = \sqrt{(2h + 2H)^2 + H^2} =$$

$$P = l \sqrt{4(\cos^2 \frac{3\varphi}{2} + \cos \varphi) + 1}$$

$$\text{Altre 3 diagonali interne} = q = \sqrt{l^2 + b^2}$$

$$q = l \sqrt{1 + 4 \tan^2 \frac{\varphi}{2}}$$

# angoli diedri

Indichiamo con:  $\hat{D}_{3\varphi}$  = gli angoli diedri di facce comuni ai vertici  $3\varphi$ :  $\hat{D}_a$  = gli altri angoli diedri.

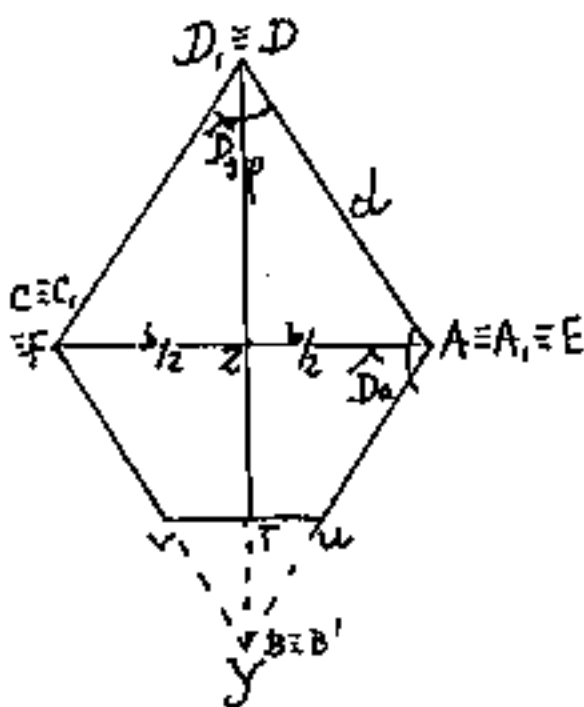
$$\hat{D}_{3\varphi} = 2 \arcsen \left( \frac{b}{2d} \right) = 2 \arcsen \left( \frac{2l \sen \frac{\varphi}{2}}{2l \sen \varphi} \right) =$$

$$\hat{D}_{3\varphi} = 2 \arcsen \left( \frac{\sen \frac{\varphi}{2}}{2 \sen \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \right) = \boxed{\hat{D}_{3\varphi} = 2 \arcsen \frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}}$$

Sappiamo che:  $\boxed{\cos \hat{D}_{3\varphi} = \frac{1}{1 + \sqrt{\cos \varphi}}}$

$$\boxed{\sen \frac{\hat{D}_{3\varphi}}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}}$$

Sezioniamo il solido con un piano  $\alpha$ , proiettante in seconda proiezione, e normale alle direzioni dei 4 spigoli  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  e passante per  $D_1$



Notiamo che il diedro  $\hat{D}_a = 2 \hat{ZED}$  (essendo  $\hat{ZED} = \hat{ZEY}$ ) per cui:

$$\hat{D}_a = 2 \arccos \left( \frac{b}{2d} \right) = 2 \arccos \left( \frac{l \sen \frac{\varphi}{2}}{l \sen \varphi} \right) =$$

$$\boxed{\hat{D}_a = 2 \arccos \left( \frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \right)}$$

$$\boxed{\sen \left( \frac{\hat{D}_{3\varphi}}{2} \right) = \cos \left( \frac{\hat{D}_a}{2} \right) = \left( \frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \right)}$$

Abbiamo considerato il rombo definito dall'angolo interno acuto ( $\varphi$ ) e l'altro ottuso  $\varphi = 180^\circ - \varphi$ . Al variare di  $\varphi$  da zero a  $\frac{\pi}{2}$  si hanno tutte le possibili configurazioni di facce rombiche diverse. Abbiamo visto che per calcolare l'altezza del solido romboesaedro avente due vertici con tre facce con lo stesso angolo ( $3\varphi$ )  $\varphi < 120^\circ$ . Notiamo che le facce per  $90^\circ \leq \varphi \leq 120^\circ$  sono identiche a quelle con  $60^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ , ove:  $90^\circ \leq \varphi \leq 120^\circ$  perciò nel campo  $60^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$  si hanno due tipi di solido uno con vertici  $3\varphi$  ed uno con vertici  $3\varphi$  con facce identiche.

Per  $0 \leq \varphi \leq 60$  si ha un solo tipo di solido con vertici  $3\varphi$ . Per  $120 \leq \varphi \leq 360^\circ$  si ha un solo tipo di solido con vertici  $3\varphi$  identici a quelli del campo  $0 \leq \varphi \leq 60$ . Perciò solidi diversi si hanno facendo variare  $0 \leq \varphi \leq 120^\circ$ , su tale base eseguiamo la tabella dei valori e la tabella delle relazioni.

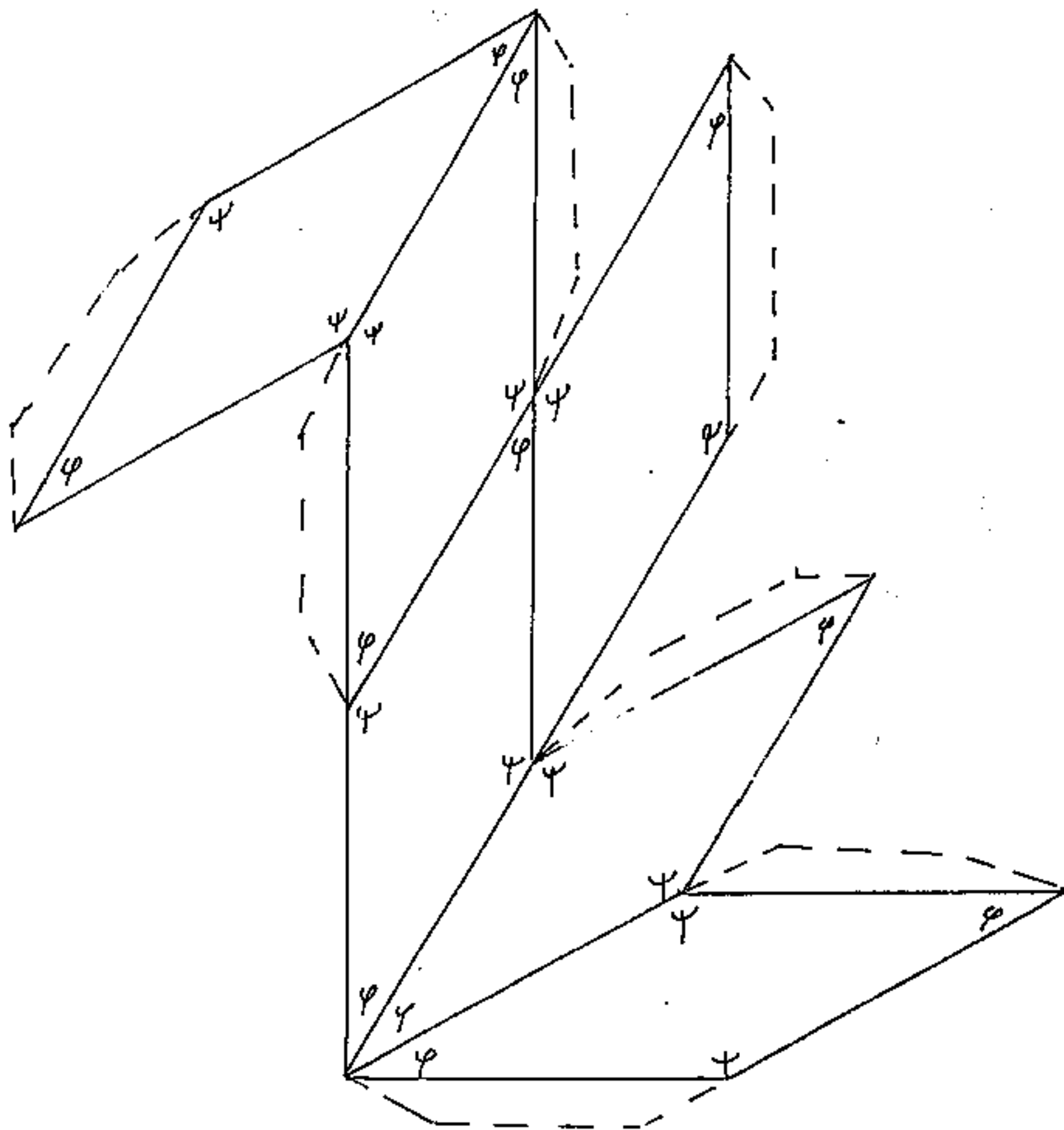
## TABELLA dei Romboesaedri

ELEMENTI di una faccia					ELEMENTI del solido				
$\varphi$	$\frac{b}{e} = 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$	$\frac{h}{e} = \cos \frac{\varphi}{2}$	$\frac{d}{e} = \operatorname{sen} \varphi$	$\frac{DM}{e} = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}$	$\frac{H}{e} = \sqrt{1 - \left(\frac{DM}{e}\right)^2}$	$\frac{p}{e} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}$	$\frac{q}{e} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$	$\hat{D}_1(\varphi)$	$\hat{D}_2$
$\varphi^\circ$	b/l	h/l	d/l	DM/l	H/l	p/l	q/l	Dp	De
0	0	1	0	1	0	3	0	0	180°
5	0.08724	0.99905	0.08716	0.99714	0.07553	2.99619	1.00380	60.06304	119.93700
10	0.17431	0.99619	0.17365	0.99357	0.15077	2.98477	1.01508	60.25268	119.74710
15	0.26105	0.99144	0.25882	0.97426	0.22542	2.96573	1.03351	60.57171	119.42830
20	0.34730	0.98481	0.34202	0.95419	0.29921	2.93907	1.05859	61.02326	118.97680
25	0.43268	0.97630	0.42262	0.92831	0.37160	2.90480	1.08967	61.61293	118.38710
30	0.51764	0.96593	0.50000	0.89656	0.44289	2.86269	1.12603	62.34791	117.65210
35	0.60141	0.95372	0.57358	0.85890	0.51214	2.81335	1.16692	63.23749	116.78250
40	0.68404	0.93967	0.64279	0.81521	0.57917	2.75813	1.21157	64.29340	115.70660
45	0.76537	0.92388	0.70711	0.76537	0.64359	2.69722	1.25928	65.53021	114.46950
50	0.84524	0.90631	0.76604	0.70924	0.70497	2.63154	1.30936	66.96591	113.03410
55	0.92350	0.88701	0.81915	0.64664	0.76260	2.55800	1.36119	68.62268	111.37710
60	1.00000	0.86603	0.86603	0.57735	0.81650	2.47949	1.41421	70.52878	109.47120
65	1.07460	0.84339	0.90631	0.50109	0.86539	2.39261	1.46791	72.71827	107.28170
70	1.14715	0.81915	0.93969	0.41753	0.90866	2.29769	1.52183	75.23503	104.78500
75	1.21752	0.79335	0.96593	0.32623	0.94529	2.19376	1.57555	78.13513	101.88490
80	1.28552	0.76604	0.98481	0.22868	0.97397	2.08144	1.62871	81.49151	98.50850
85	1.35115	0.73728	0.99619	0.11821	0.99299	1.96195	1.68095	85.40175	94.59824
90	1.41421	0.70711	1.00000	-0.00000	1.00000	1.73205	1.73205	89.99999	90.00001
95	1.47455	0.67559	0.97619	-0.12901	0.99164	1.57387	1.78166	95.47882	84.52119
100	1.53209	0.64279	0.94481	-0.27015	0.96282	1.39932	1.82956	102.13050	77.86951
105	1.58671	0.60876	0.90593	-0.42516	0.90512	1.20295	1.87554	110.43830	69.56168
110	1.63830	0.57358	0.83969	-0.59630	0.80277	0.97359	1.91939	121.31920	58.68096
115	1.68678	0.53730	0.80631	-0.78656	0.61751	0.62139	1.96093	137.05080	42.94919
120	1.73205	0.50000	0.86603	1.00000	0.00000	1.00000	2.00000	180.00000	0.00000

### OSSERVAZIONE

Per comodità di calcolo, nella tabella abbiamo esteso:  $90^\circ \leq \varphi \leq 120^\circ$ . In tale campo, (in cui le facce sono identiche a quelle di:  $60^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ), occorre scambiare  $\varphi$  con  $\psi$  e lo slittamento avviene secondo  $\psi$  risulterà  $b = 2h$  e  $h = b/2$ .

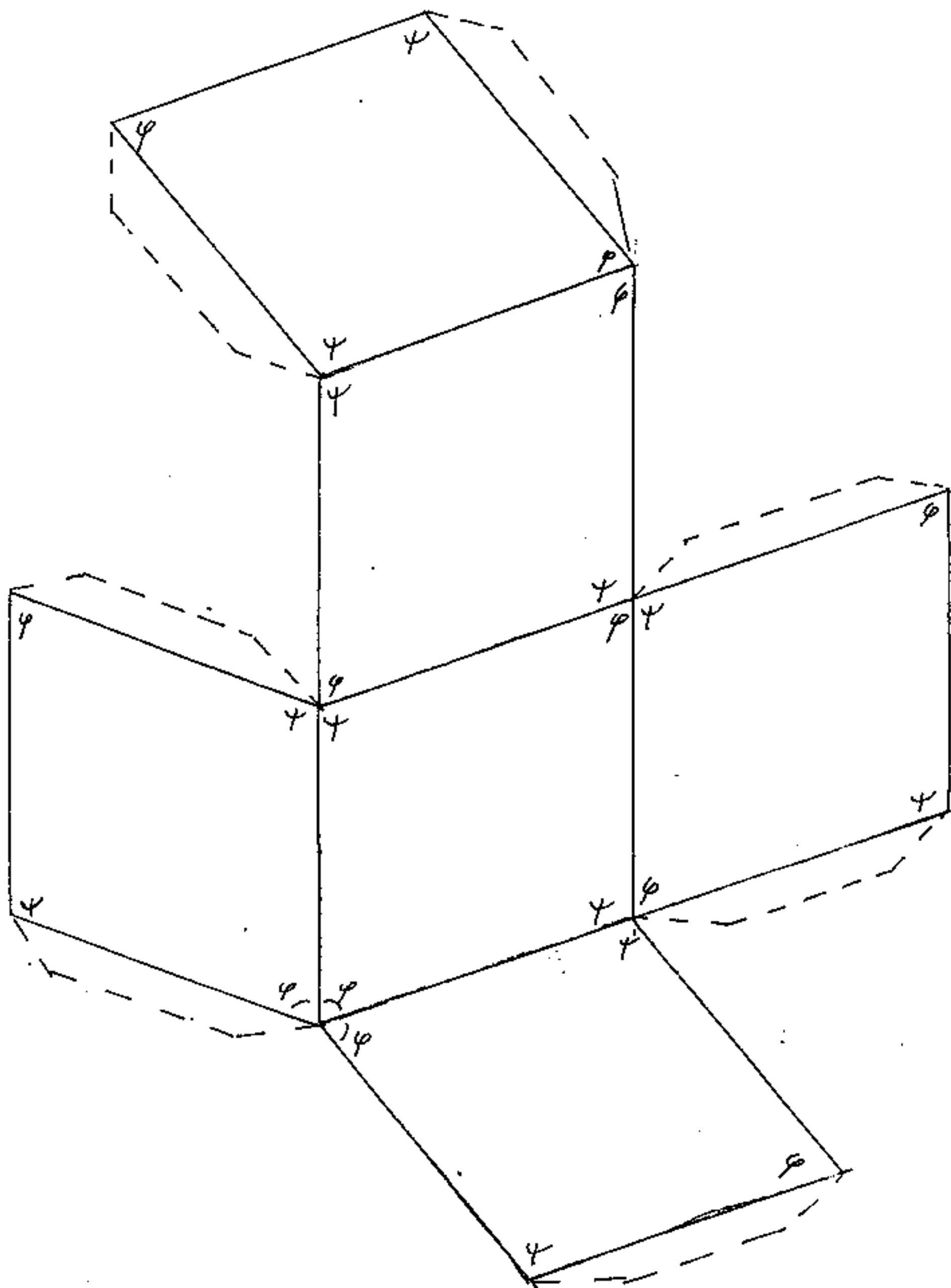
Schema di romboesaedro con  $\varphi = 30^\circ$  ;  $l = 5$  cm.



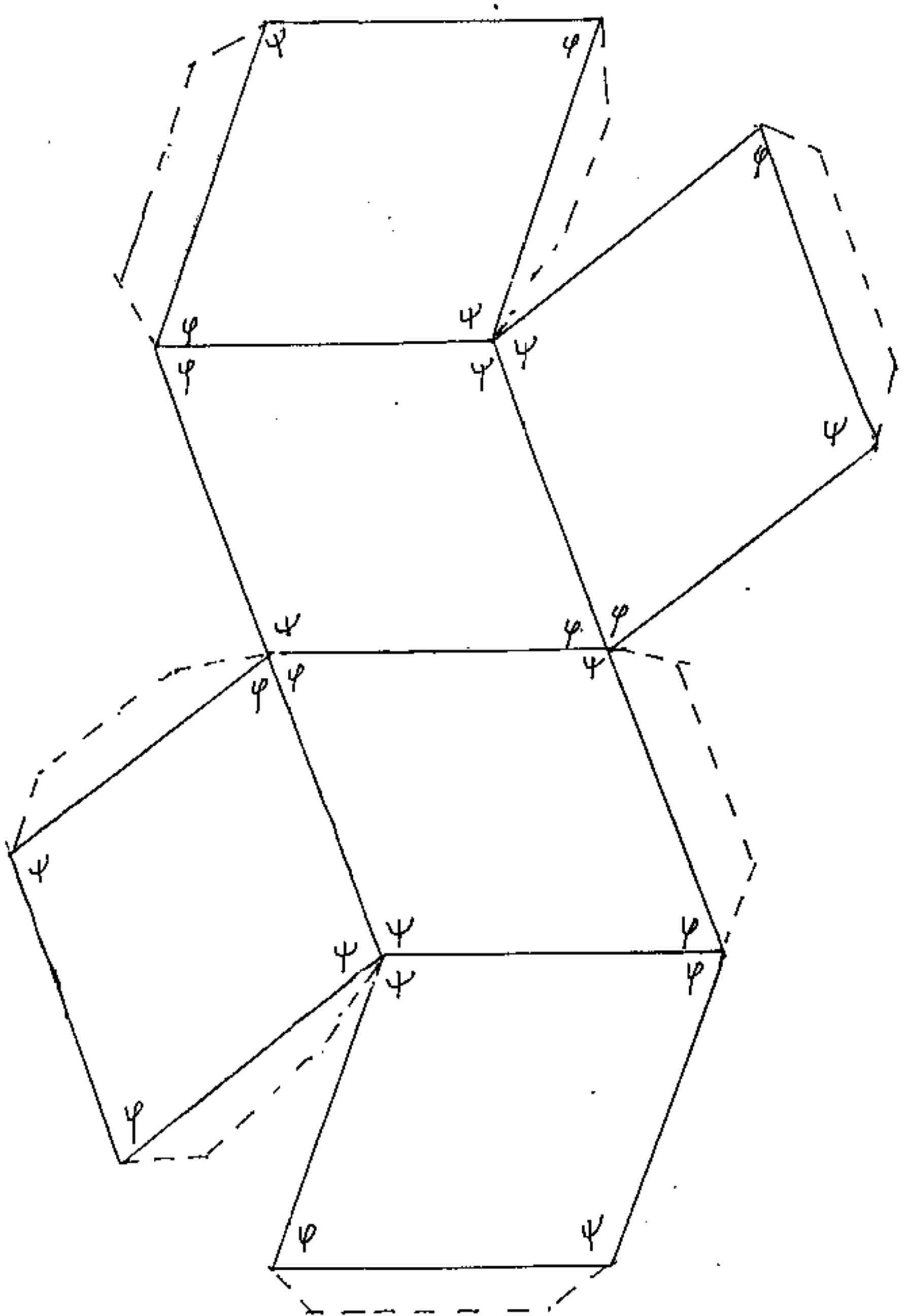
Le linguette da incollare sono a tratteggio



Schema di romboesaedro con facce rombiche uguali  
a quelle del rombododecaedro :  $t=5$  ;  $\varphi = 70^{\circ} 31' 44'' > 60^{\circ}$   
(primo tipo)

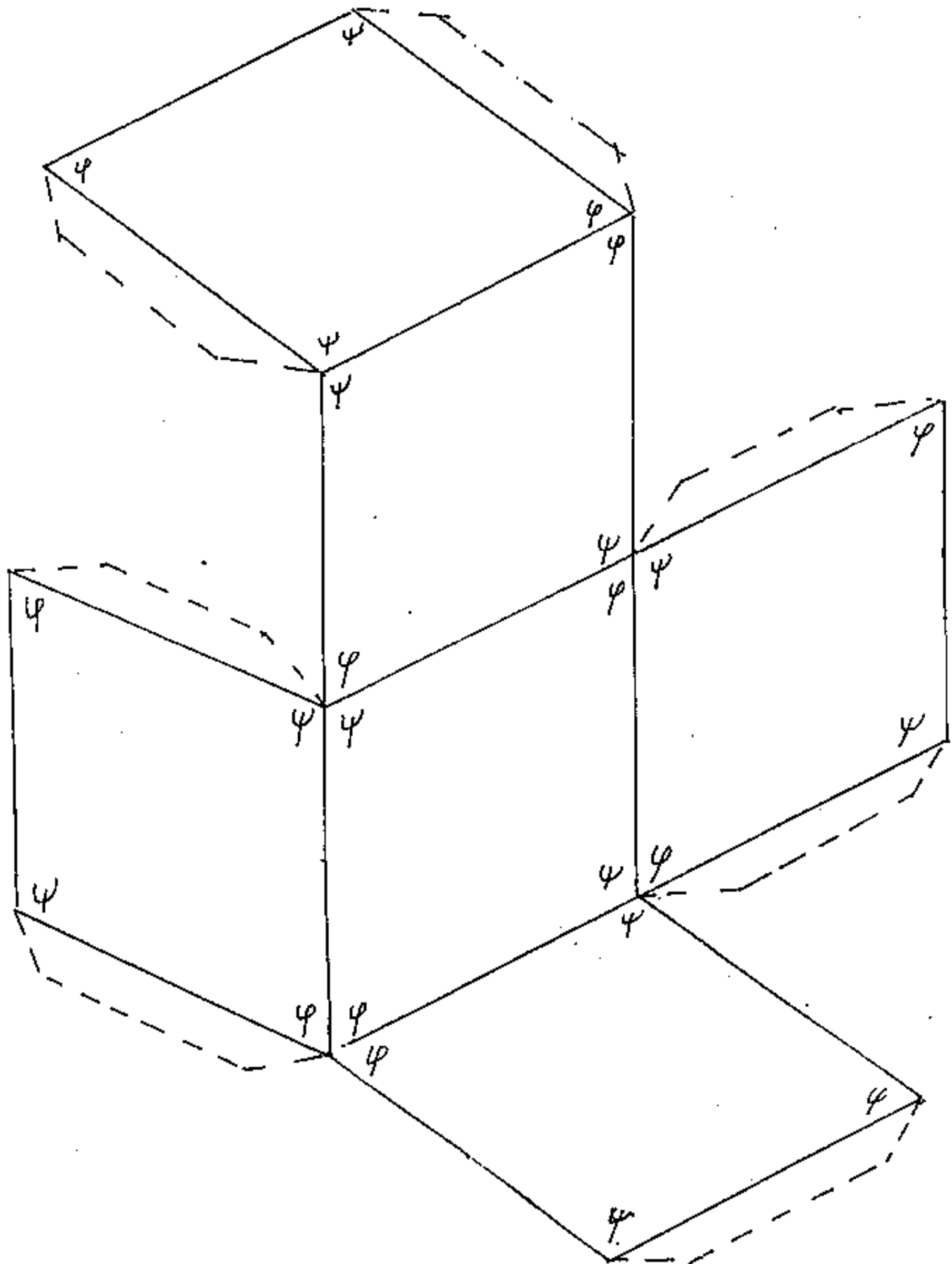


Schema di romboedro con facce rombiche uguali  
 a quelle del rombododecaedro:  $l=5$ ;  $\varphi = 70^\circ 31' 44'' > 60^\circ$   
 (secondo tipo)

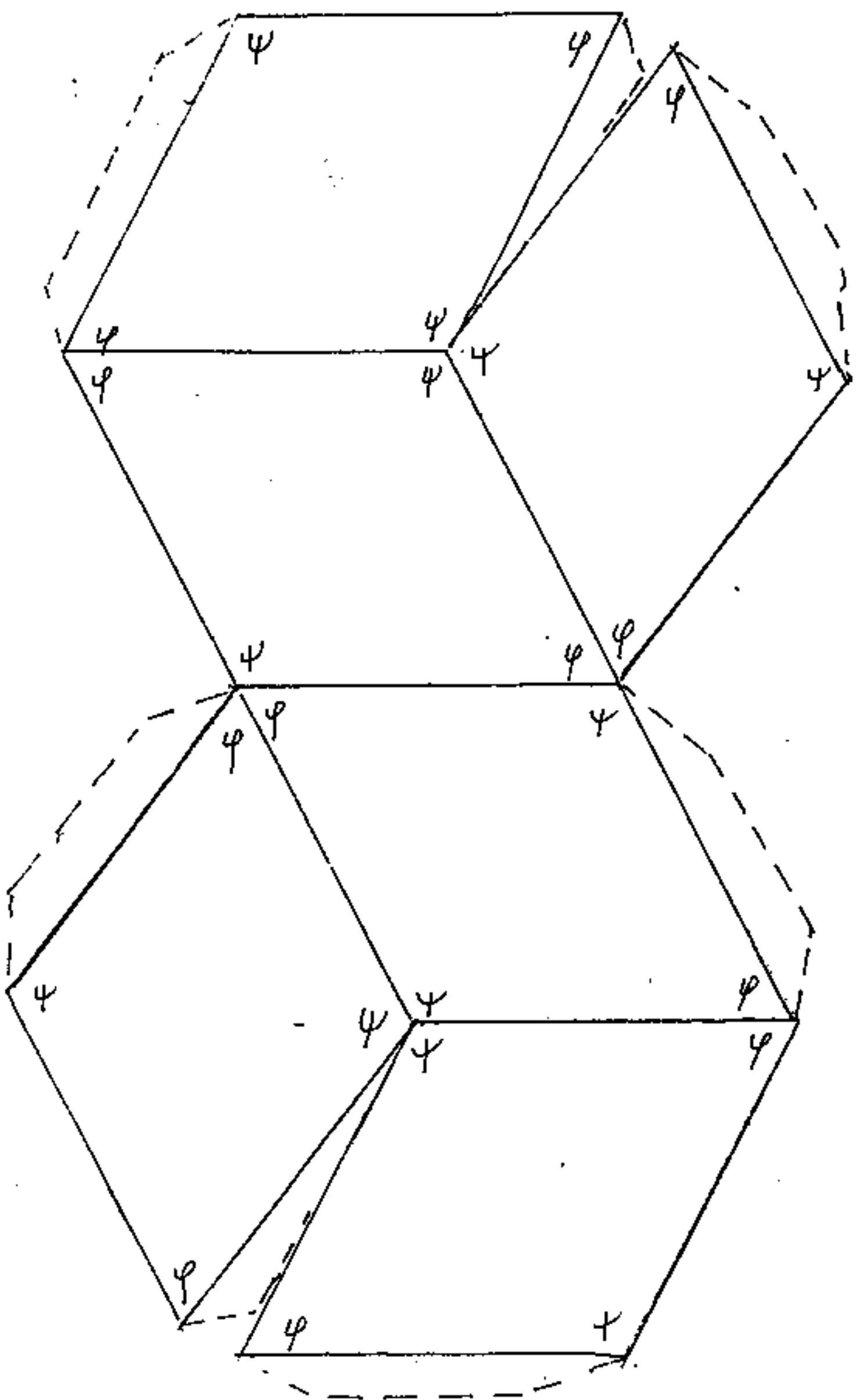


I diedri sugli spigoli uscenti dai vertici  $3\varphi$  sono uguali a quelli del rombododecaedro

schema di romboesaedro con facce rombiche uguali  
 a quelle del romboedro a 30 facce:  $l=5$   $\varphi=63,4349488 > 60^\circ$   
 $b=5,257311121$ ;  $2h=8,506508$ ;  $d=4,472136$ ; (primo tipo)



Schema di romboesaedro con facce rombiche uguali a quelle del romboedro a 30 facce:  $l = 5$ ;  $\varphi = 63,4349488 > 60^\circ$  (secondo tipo)



Si noti che gli angoli diedri sugli spigoli incidenti dai vertici  $3\varphi$  sono uguali a quelli del romboedro a 30 facce.

# Cristalli impossibili

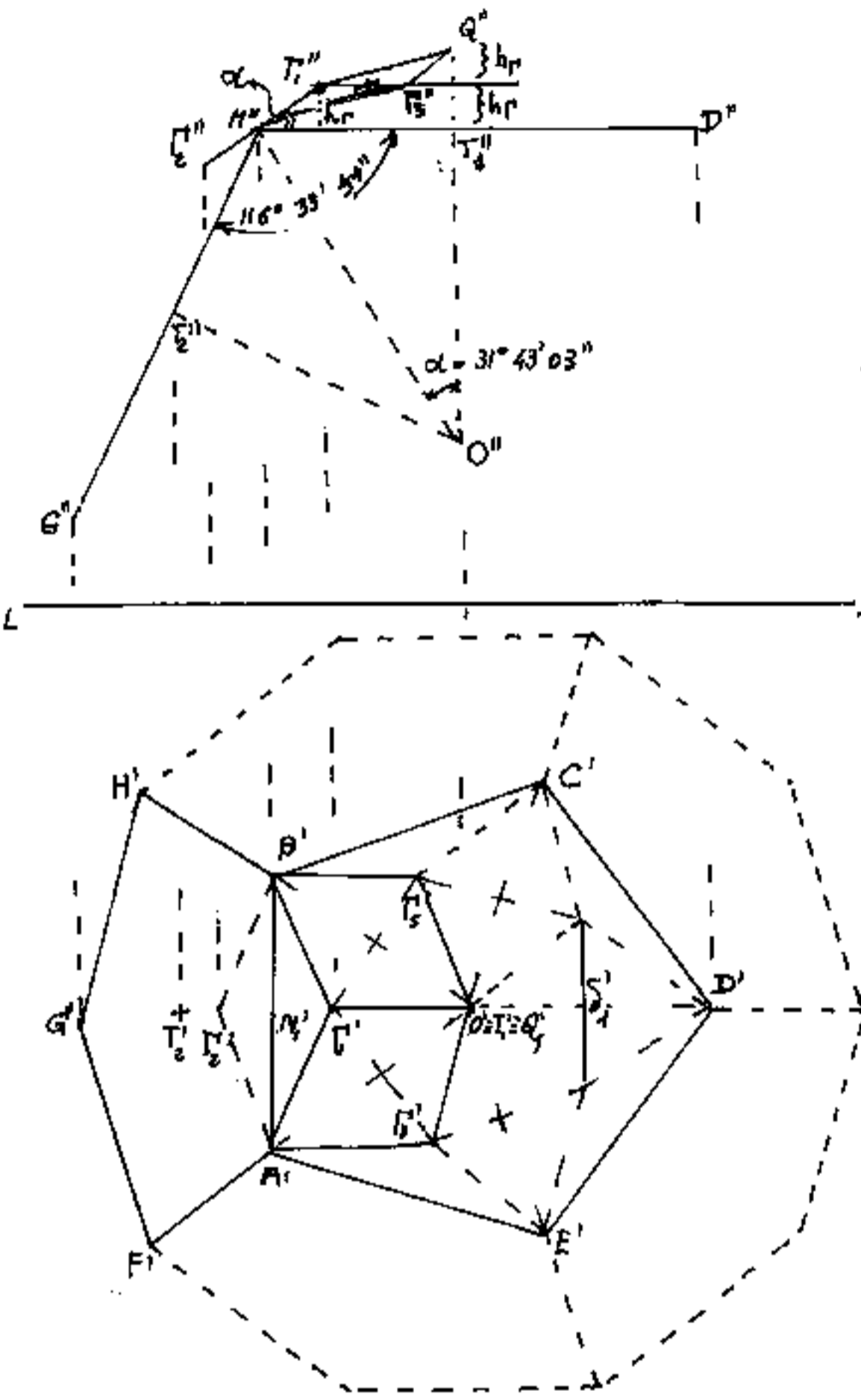
Un articolo di Lucio Loreto, professore di mineralogia all'Università "La Sapienza" di Roma, pubblicato su Scienza e Dossier Anno 3° - n° 26 Giugno 1988, intitolato appunto "Cristalli impossibili"; prendendo spunto dalla notizia pubblicata sulla rivista americana: "Physical Review Letters" da Schechtman, I. Blech, D. Gratia, J.W. Cahn, che:

"noduletti di una lega di Al ed Mn delle dimensioni di qualche micron, provenienti da raffreddamento del fuso alla velocità di un milione di gradi al secondo presentano effetti di diffrazione ben netti e distribuiti invece secondo una simmetria inequivocabilmente pentagonale".

Nell'articolo è stato dato notevole rilievo ad un solido costituito da facce rombiche di due tipi: 60 facce di un tipo e 30 dell'altro, complessivamente 90 facce (nell'articolo il solido è stato chiamato: "ennaedro", non so se così è stato convenuto, personalmente preferisco chiamarlo "enenecontaedro biconcavo", riservando il nome "ennaedro" a solidi con nove facce).

L'articolo in parola, me' capitato sotto gli occhi proprio mentre sto' lavorando al presente IV Volume di una ambiziosa opera di matematica il cui primo volume è intitolato: "La matematica, la geometria, l'analisi, per chi voglia ripartire da zero" Perciò tratto questo solido.

# L'Enenecontaedro birombico



Consideriamo le proiezioni di due facce adiacenti di un dodecaedro; (ABCDE); (AFGHB).

Sul prolungamento dei raggi  $\overline{OT}$ , che dal centro  $O$  del dodecaedro, vanno al centro  $T$  delle facce, consideriamo il vertice  $Q$ , comune a cinque facce rombiche del primo tipo del nostro enenecontaedro. Le diagonali maggiori di questi rombi si proiettano in prima pro-

iezione secondo i segmenti  $\overline{Q_1A'} = \overline{Q_1B'} = \overline{Q_1C'} = \overline{Q_1D'} = \overline{Q_1E'} = R_p$ . Se dai punti medi di tali proiezioni tracciamo le perpendicolari troviamo l'altra diagonale del rombo, che essendo parallela alla faccia del dodecaedro, si proietterà in vera grandezza in prima proiezione; e sarà calcolabile conoscendo lo spigolo  $l$  del dodecaedro.

I punti estremi  $\Gamma_i$  di queste diagonali sono comuni ai rombi del primo tipo come  $A\Gamma_1 Q_1 \Gamma_3$ ;  $B\Gamma_1 Q_1 \Gamma_5$ ; e del secondo tipo come  $A\Gamma_1 B\Gamma_2$ .

Avvalendoci delle note correlazioni fra gli elementi del pentagono e del dodecaedro, facciamo qualche calcolo:

In prima proiezione vale la proporzione:

$$\overline{A'B'} : \overline{M_1 T_1} = \delta_1 : \overline{T_1 D_1} \quad \left( \text{ove } \delta_1 = \delta_2 = \text{diagonale minore dei rombi} \right)$$

$$l : a = \delta_1 : R_p \quad \left( \text{ove } l = \text{lato pentagono} = \text{spigolo dodecaedro}; a = \text{apotema del pentagono}; R_p = \text{raggio del cerchio circoscritto al pentagono} \right)$$

$$\delta_1 = \frac{l R_p}{2a}$$

$$a = R_p \left( \frac{\sqrt{5}+1}{4} \right)$$

$$\delta_1 = \frac{2l}{(\sqrt{5}+1)}$$

$$\delta_1 = \frac{l}{2} (\sqrt{5}-1) = (0,618033989)l$$

Detta  $h_p$  la quota (distanza) delle diagonali  $\delta_1$  dal piano della faccia pentagonale, basta calcolare  $h_p$  per i punti estremi di  $\delta_1$  e  $\delta_2$  (ove  $\delta_2$  è la diagonale minore dei rombi)  $h_p = M_1 T_1 \tan \alpha$   $\delta_2 = 2 M_1 T_1 / \cos \alpha$

Poiché l'angolo diedro fra le facce del dodecaedro è  $116^\circ 33' 54''$  e quindi:  $\hat{M_1 T_1} = \alpha = \hat{M_1 D_1 T_1} = 90^\circ - \frac{1}{2}(116^\circ 33' 54'')$

$$\alpha = 31^\circ 43' 03''$$

$$\text{sappiamo anche: } \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

Dalla prima proiezione abbiamo

inoltre:

$$M_1 T_1 = \frac{l}{2} \tan \alpha (\hat{M_1 B_1 T_1});$$

ed essendo:  $\hat{B'T'A} = 72^\circ$ ; avremo:  $\hat{M'B'\Gamma'} = 18^\circ$ ;  $\text{tang } 18^\circ = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

$$h_r = \left( \frac{l}{2} \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \right) \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = \frac{l}{4} \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{5}} =$$

$$h_r = \frac{l}{4} \sqrt{\frac{30-12\sqrt{5}-10\sqrt{5}+20}{5}} = \boxed{h_r = \frac{l}{4} \sqrt{\frac{50-22\sqrt{5}}{5}}}$$

$$\underline{h_r = (0,100405709)l}$$

$h_r$  è anche la (quota) distanza dalla faccia pentagonale del punto medio della diagonale di faccia perciò la quota di  $Q''$  cioè il segmento  $\overline{TQ_1} = 2h_r = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{50-22\sqrt{5}}{5}} =$

$$\boxed{\overline{TQ_1} = l \sqrt{\frac{35-11\sqrt{5}}{10}}}$$

Ciò consente di calcolare la diagonale  $\overline{BQ}$

$$\overline{BQ_1} = \sqrt{\overline{B'T_1}^2 + \overline{TQ_1}^2} = \sqrt{R_r^2 + \overline{TQ_1}^2} = l \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) + \left(\frac{35-11\sqrt{5}}{10}\right)}$$

$$\overline{BQ_1} = l \sqrt{\frac{30-10\sqrt{5}}{10}} =$$

$$\boxed{\overline{BQ_1} = l \sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

$$\overline{BQ_1} = l \left[ \sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}} \right]$$

$$\boxed{BQ_1 = l \left( \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} \right)}$$

Il lato dei rombi:  $\overline{B\Gamma_1} = \overline{\Gamma_1 Q_1} = \sqrt{\left(\frac{\overline{BQ_1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} =$

$$\overline{B\Gamma_1} = \frac{l}{2} \sqrt{(3-\sqrt{5}) + \frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{l}{4} \sqrt{12-4\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}} = \frac{l}{4} \sqrt{18-6\sqrt{5}} = \frac{l}{4} \sqrt{6} \sqrt{3-\sqrt{5}} =$$

$$\overline{B\Gamma_1} = \frac{l}{4} \sqrt{6} \left( \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} \right) = \boxed{\overline{B\Gamma_1} = \frac{l}{4} (\sqrt{15}-\sqrt{3})} = (0,535233135)l$$

L'angolo acuto delle facce rombo(1) sarà:  $2 \arctg \left( \frac{\overline{B\Gamma_1}/2}{\overline{BQ_1}/2} \right) =$

$$= 2 \arctang \left( \frac{(\sqrt{5}-1)/2}{(\sqrt{5}-1)/\sqrt{2}} \right) = 2 \arctg \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2(35^\circ 15' 52'') = \underline{70^\circ 31' 44''}$$

quindi l'angolo ottuso =  $\underline{109^\circ 28' 16'',33}$

La diagonale minore del rombo(2):  $\delta_2 = 2 \frac{M'\Gamma_1 V}{\cos \alpha} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \sqrt{\frac{10}{5+\sqrt{5}}}$

$$\delta_2 = l \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{20}} = l \sqrt{\frac{25-10\sqrt{5}-5\sqrt{5}+10}{10}} = l \sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \frac{l}{2} (\sqrt{7+2} - \sqrt{7-2}) \quad \boxed{\delta_2 = \frac{l}{2} (3-\sqrt{5})}$$

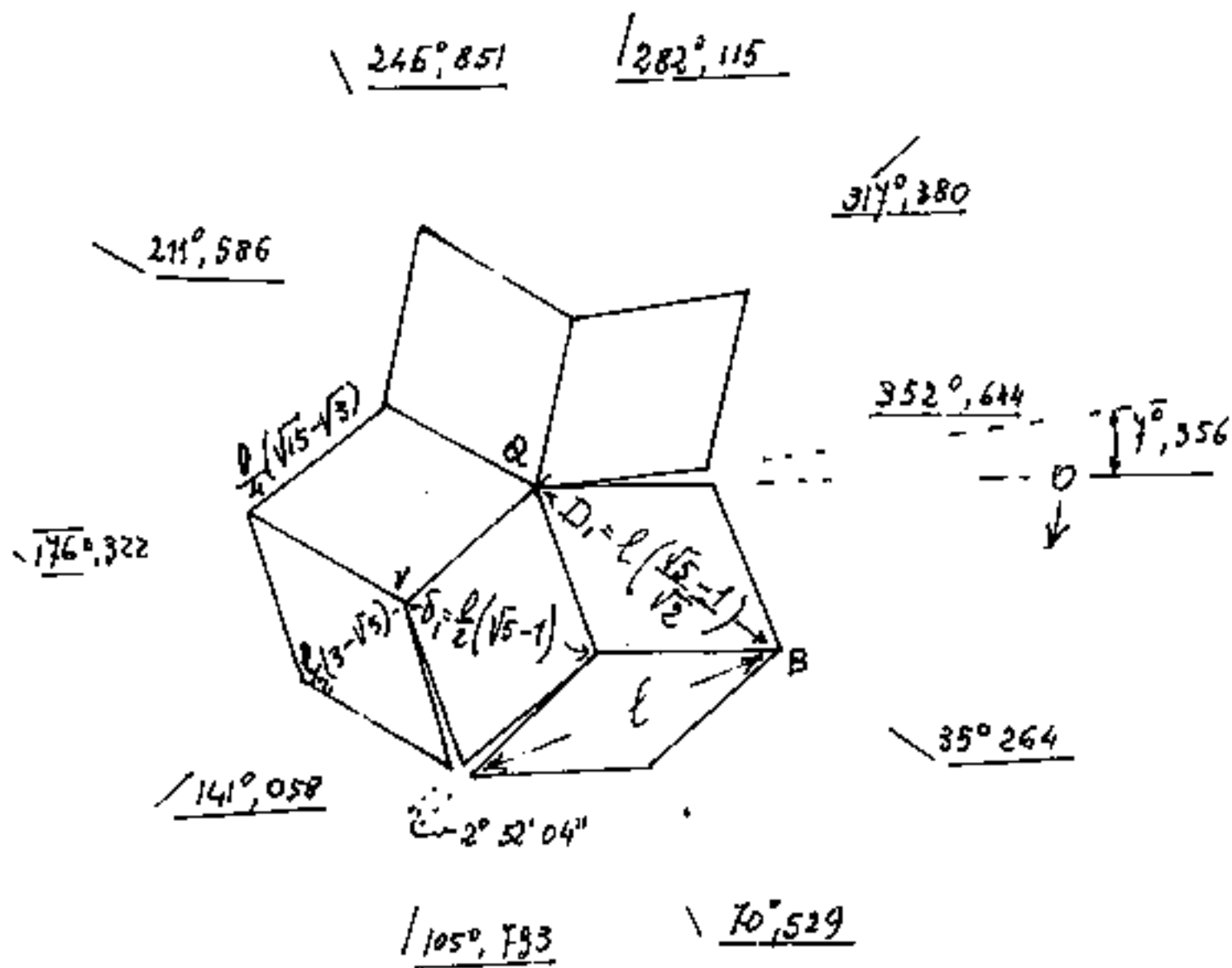
L'angolo acuto del rombo(2) =  $2 \arctang \left( \frac{\delta_2/2}{l/2} \right) = 2 \arctg \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) =$

$$= 2(20^\circ 54' 18'',57) = \underline{41^\circ 48' 37'',13} \quad \text{e l'angolo ottuso} = \underline{138^\circ 11' 23''}$$

Abbiamo calcolato gli elementi delle facce



Cerchiamo di riassumere i valori calcolati, a tal fine consideriamo lo sviluppo dei rombi che hanno in comune il vertice Q sulla normale alla faccia pentagonale del dodecaedro; ed avremo:



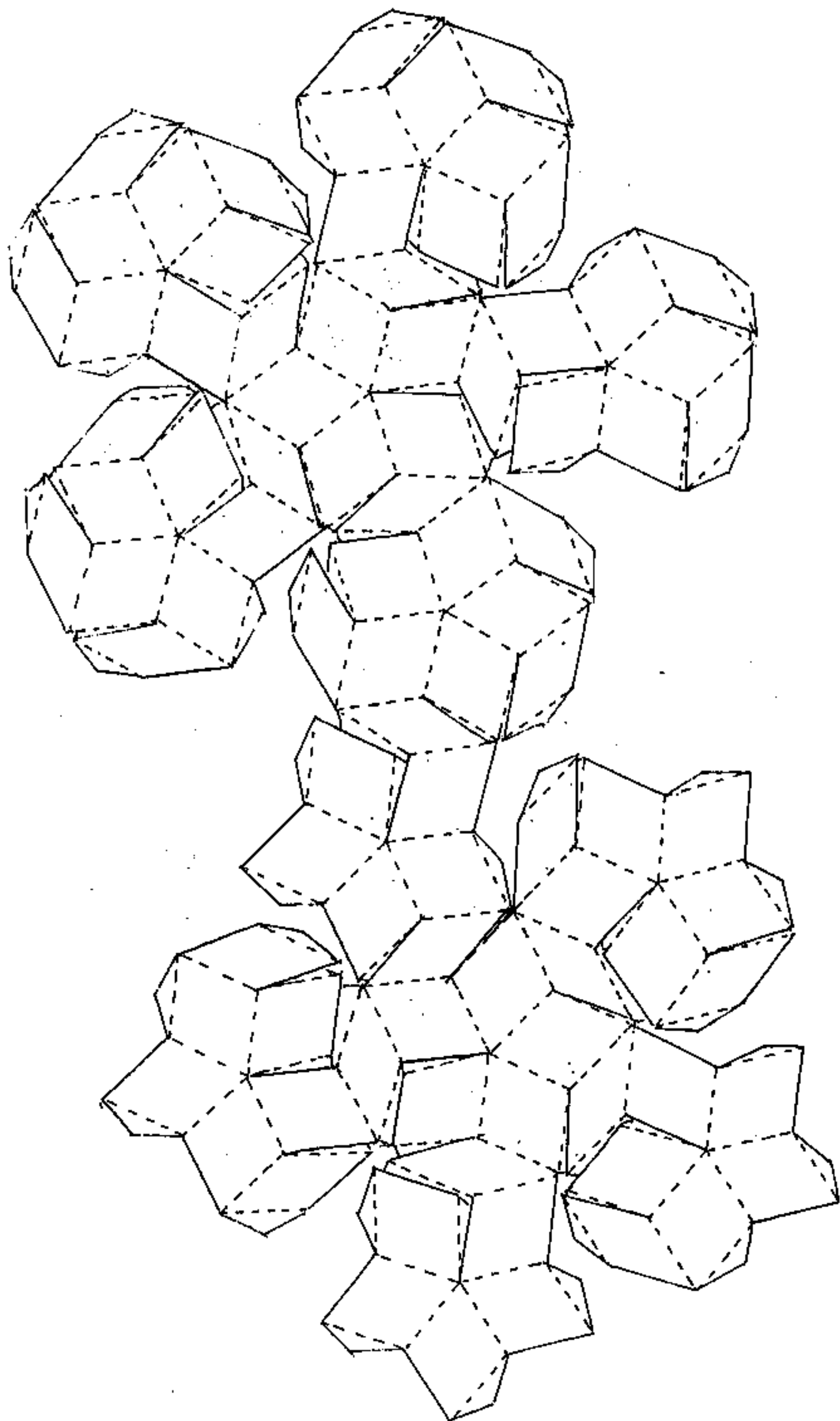
Se  $l$  è il lato delle facce pentagonali del dodecaedro, si sono riportati, in funzione di  $l$ , i valori delle diagonali e del lato dei rombi. Si è anche indicata la progressione angolare dello sviluppo, ciò consente una maggiore precisione nel disegno.

Si hanno così:  $5 \times 12 = 60$  facce rombiche del tipo (1)

$$\frac{5}{2} \times 12 = 30 \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad (2)$$

complessivamente 90 facce rombiche, da cui il nome: enenecontaedro

Schema intero di enenecontaedro.



Si noti che, mentre i vertici:  $A, B, C, D, E, F, G, H, \dots$  sono comuni al dodecaedro e all'enenecontaedro, i vertici  $Q_i$  sono comuni all'enenecontaedro ed all'icosaedro. (ad ogni faccia del dodecaedro corrisponde un vertice dell'icosaedro e viceversa).

Nei vertici del dodecaedro:  $A, \dots$ , convergono sei vertici di rombi, tre con angolo al vertice di:  $41^\circ 48' 37''$ , 13 (rombo 2), e tre con angolo al vertice di:  $70^\circ 31' 44''$  (rombo 1).

Nei vertici dell'icosaedro:  $Q_i$  convergono invece cinque vertici di rombo 1) con angolo di  $70^\circ 31' 44''$ .

I vertici del dodecaedro ed i vertici dell'icosaedro non giacciono sulla stessa superficie sferica, cioè l'enenecontaedro non è inscrivibile in una sfera, infatti:

Detto  $l_d$  lo spigolo del dodecaedro, coincidente con la diagonale maggiore del rombo 2, detto  $\rho_{1d}$  = il raggio della sfera circoscritta al dodecaedro:

sappiamo:  $\rho_{1d} = l_d \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{5} + 1) = (1.401258538) l_d$ .

Detto:  $\rho_{3i}$  = raggio della sfera circoscritta all'icosaedro avremo:  $\rho_{3i} = (r_{1d} + \overline{TQ})$ ; ove:  $r_{1d} = \overline{OT}$  = raggio della sfera inscritta nel dodecaedro ed  $\overline{TQ} = 2h_r$  = quota

di  $Q$  sulla faccia del dodecaedro. Sostituendo:  $r_{id}$   
 ed  $\overline{TQ} = 2hr$  in funzione di  $l_d$  si ha:

$$\int_{si} = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{25 - 11\sqrt{5}}{10}} \right) l_d$$

ma  $\int_{si}$  puo' essere espresso in funzione di " $l_i$ " = spigolo dell'icosaedro che coincide col segmento che unisce due vertici  $Q$  adiacenti.

$$\int_{si} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \right) l_i$$

Confrontando:

$$l_i = l_d \left( \sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{50 + 10\sqrt{5}}} + 2 \sqrt{\frac{50 - 22\sqrt{5}}{50 + 10\sqrt{5}}} \right)$$

$$l_i = l_d \left( \sqrt{\frac{(25 + 11\sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{5(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}} + 2 \sqrt{\frac{(25 - 11\sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{5(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}} \right)$$

$$l_i = l_d \left( \sqrt{\frac{70 + 30\sqrt{5}}{100}} + 2 \sqrt{\frac{180 - 80\sqrt{5}}{100}} \right)$$

semplificando e sviluppando i radicali doppi:

$$l_i = l_d \left[ \frac{1}{\sqrt{10}} \left( \sqrt{\frac{7+2}{2}} + \sqrt{\frac{7-2}{2}} \right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \left( \sqrt{\frac{9+1}{2}} - \sqrt{\frac{9-1}{2}} \right) \right]$$

$$l_i = l_d \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\sqrt{5}} + 1 \right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \left( \sqrt{5} - 2 \right) \right]$$

$$l_i = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} l_d = (1,38196601) l_d$$

Perciò riferendo ad  $l_d$  il raggio della sfera passante per i vertici  $Q_i$  si ha:

$$\int_{si} = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \right) \left( \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right) l_d$$

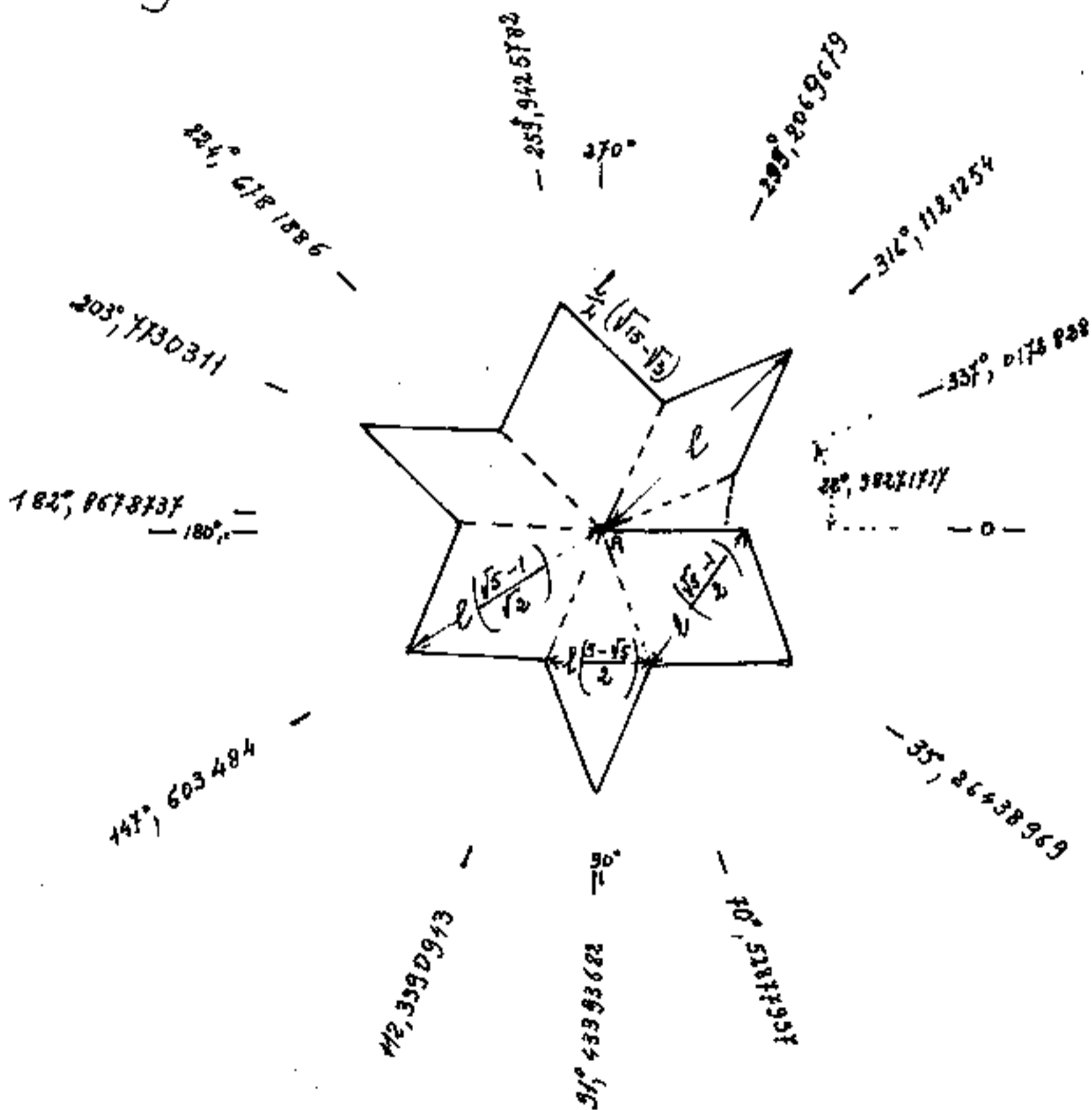
$$\int_{si} = \frac{l_d}{4} \sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})^2}{2}} = \int_{si} = \frac{l_d}{4} \sqrt{50 - 10\sqrt{5}} = (1,31432778) l_d$$

Mentre la sfera passante per i vertici: A, B, C, D, E, F, G, H.

$$P_{s_4} = \frac{ld}{4} (\sqrt{5} + 1) \sqrt{3} = (1,401258539) ld > (1,31432778) ld = P_{s_6}$$

La sfera che circoscrive il dodecaedro è più esterna della sfera che circoscrive l'icosaedro.

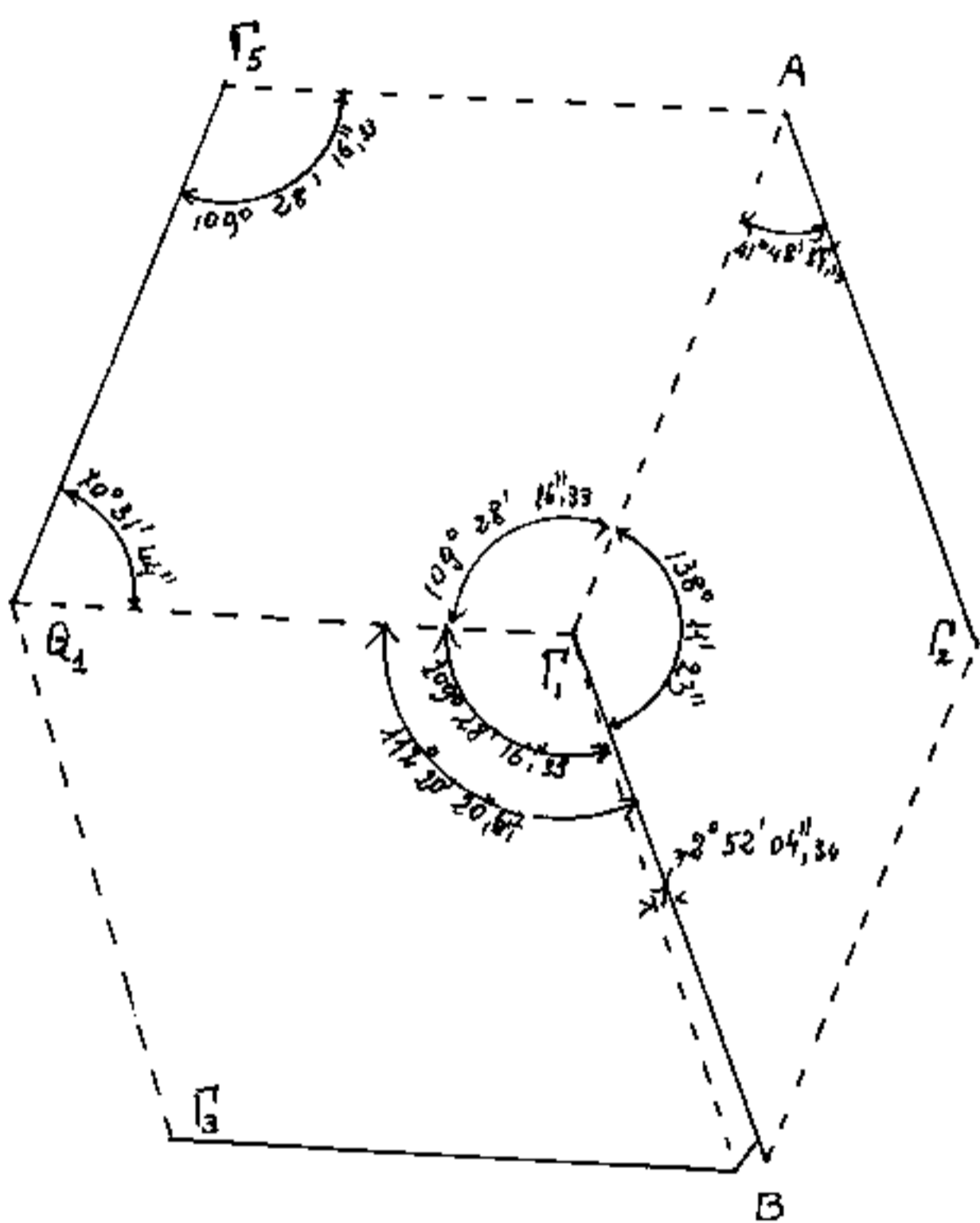
Consideriamo un vertice del dodecaedro (A, B, ...) e sviluppiamo in piano le facce rombiche che di convergono; avremo:



Questo schema può servire per costruire un modellino dell'enecontaedro; (ne occorrono 20 e si sovrappongono i

rombi più acuti). Però l'angolo di:  $2^{\circ} 52' 04''$  è troppo piccolo per linguette in modellini di piccole dimensioni.

Nello schema parziale sottostante, abbiamo riportato i valori angolari delle facce per evidenziare l'angolo di  $2^{\circ} 52' 04,34''$ .



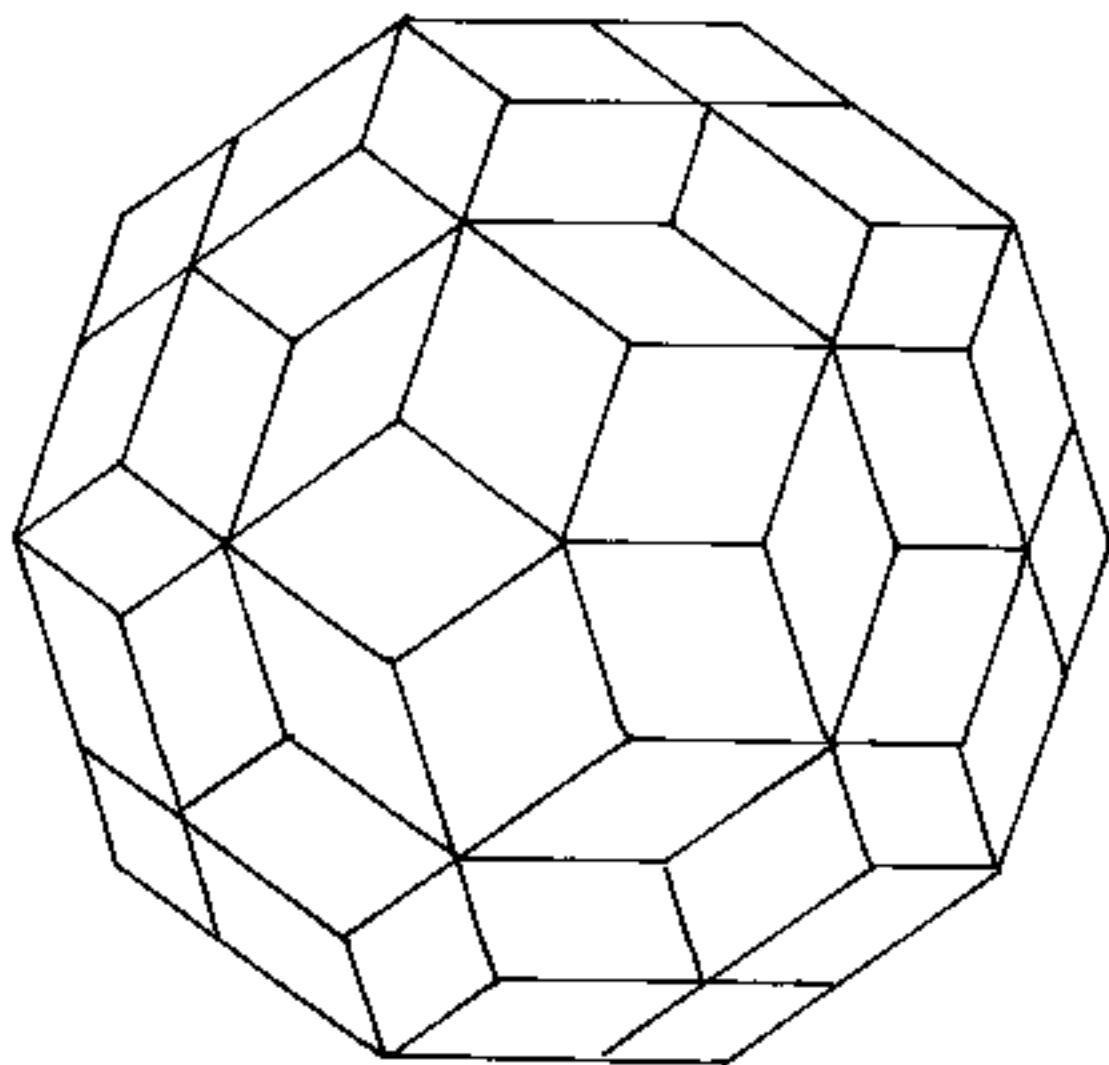
Ovviamente il collegamento delle due facce adiacenti può essere effettuato in modi diversi, purché sia rigido.

Può anche essere opportuno eseguire il modello del dodecaedro intersecato con l'icosaedro, in modo che i vertici

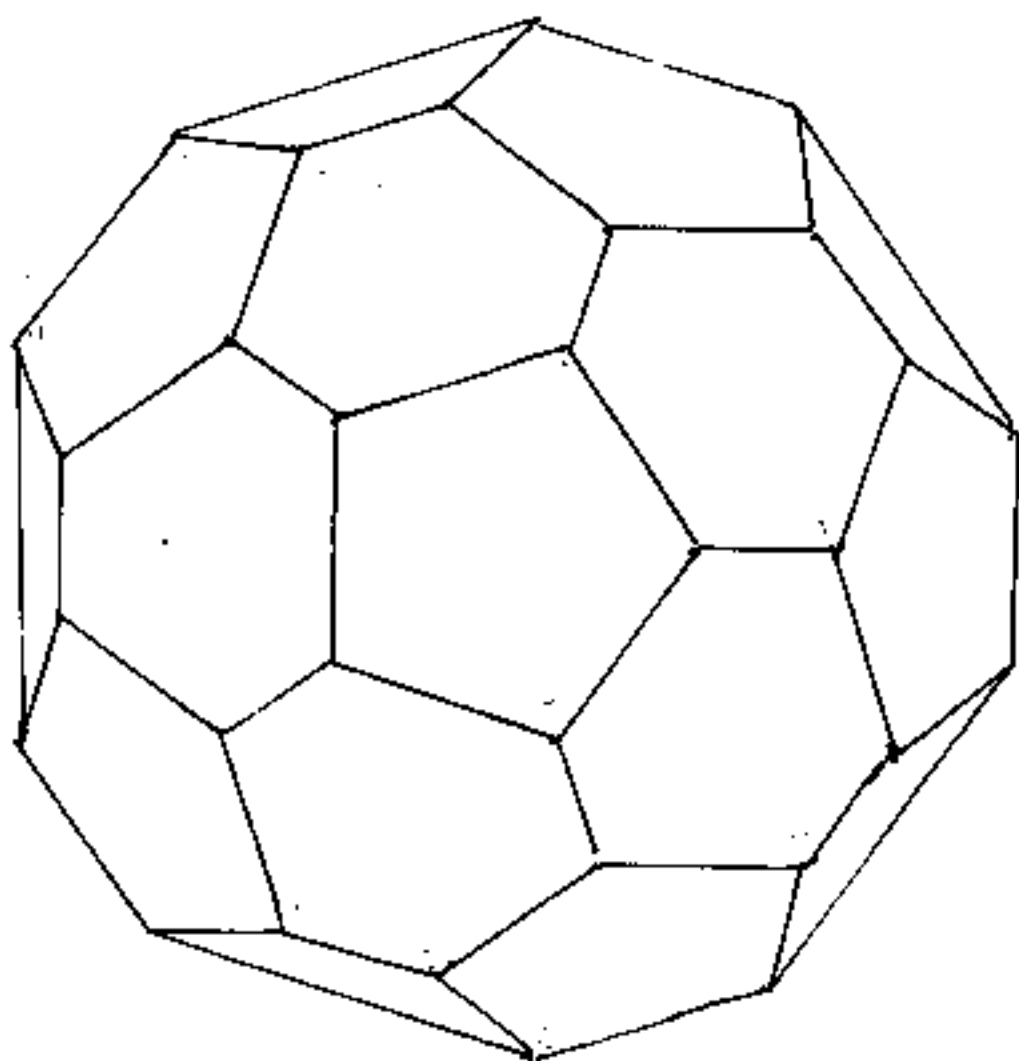
dei due solidi corrispondano a quelli del solido che abbiamo chiamato enenecontaedro. (90 facce)

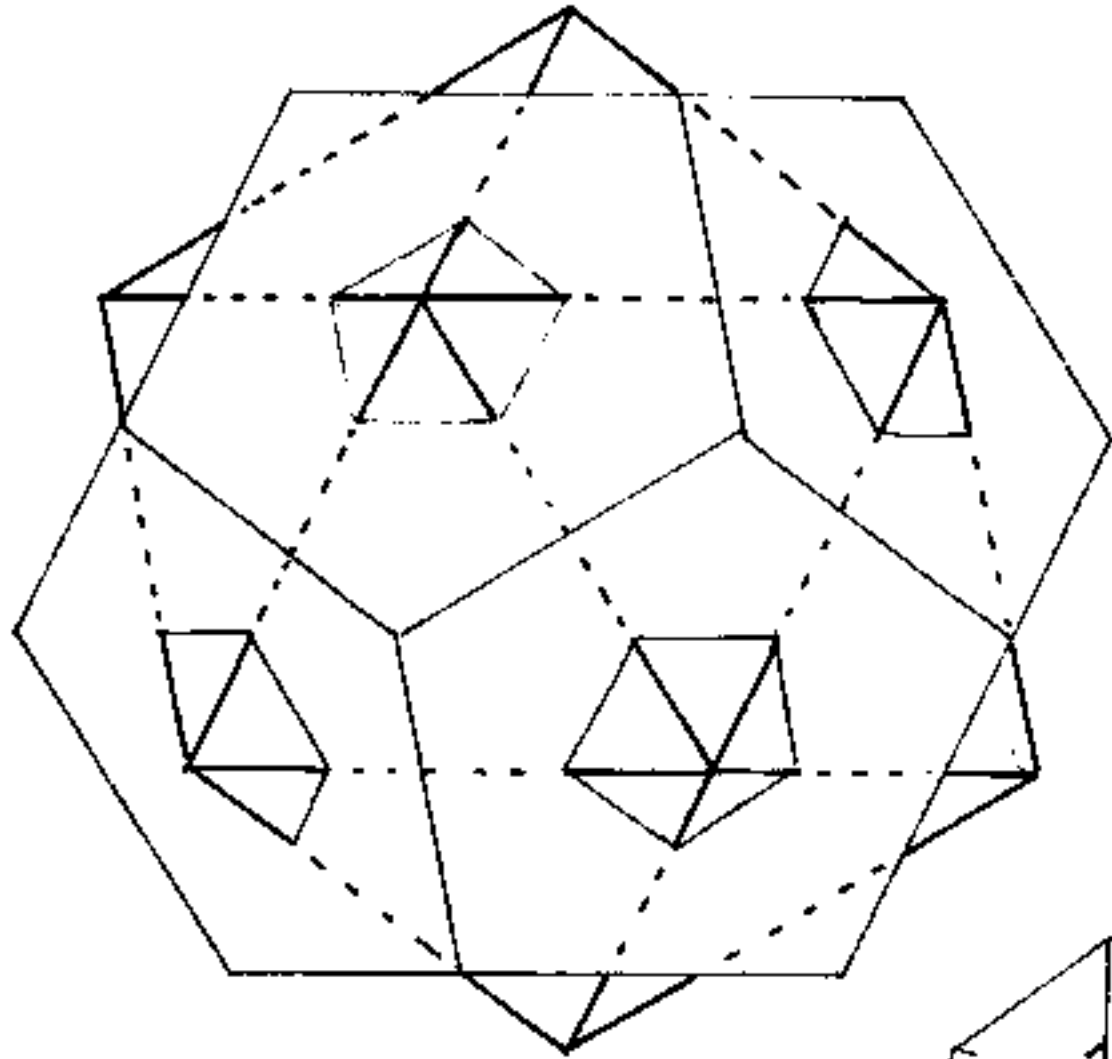
I vertici col dodecaedro sono 20 (A, B, C, ...), i vertici con l'icosaedro sono 12 (Q1, Q2, ...), i vertici (Γ1, Γ2, Γ3, ...), come in

figure sono 60; perciò complessivamente il  
solido enecontaedro ha:  $60 + 12 + 20 = 92$  vertici  
gli spigoli sono 180:  $(F + V = S + 2)$ ;  $(90 + 92 = 180 + 2)$ .  
Riportiamo la proiezione dell'enecontaedro.

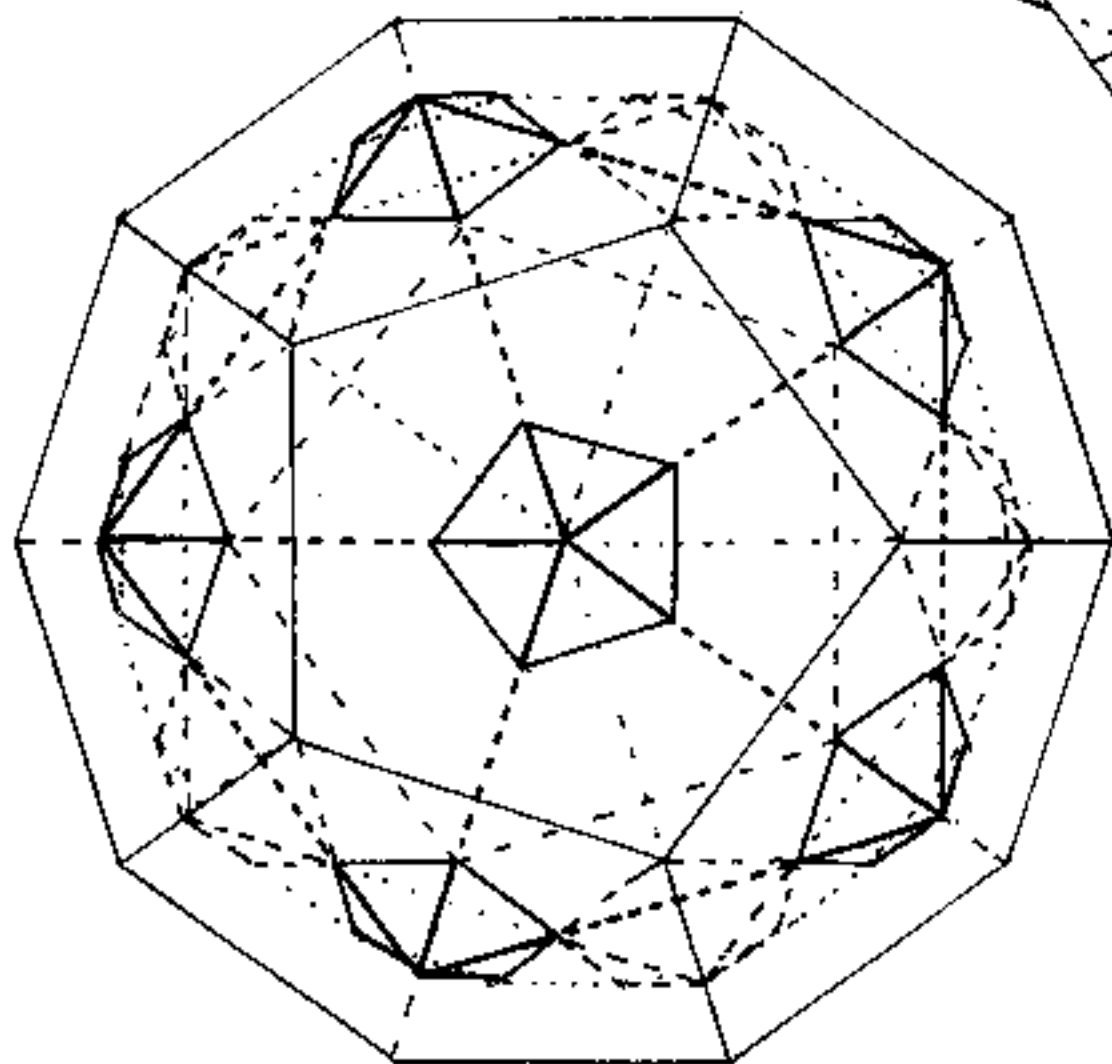
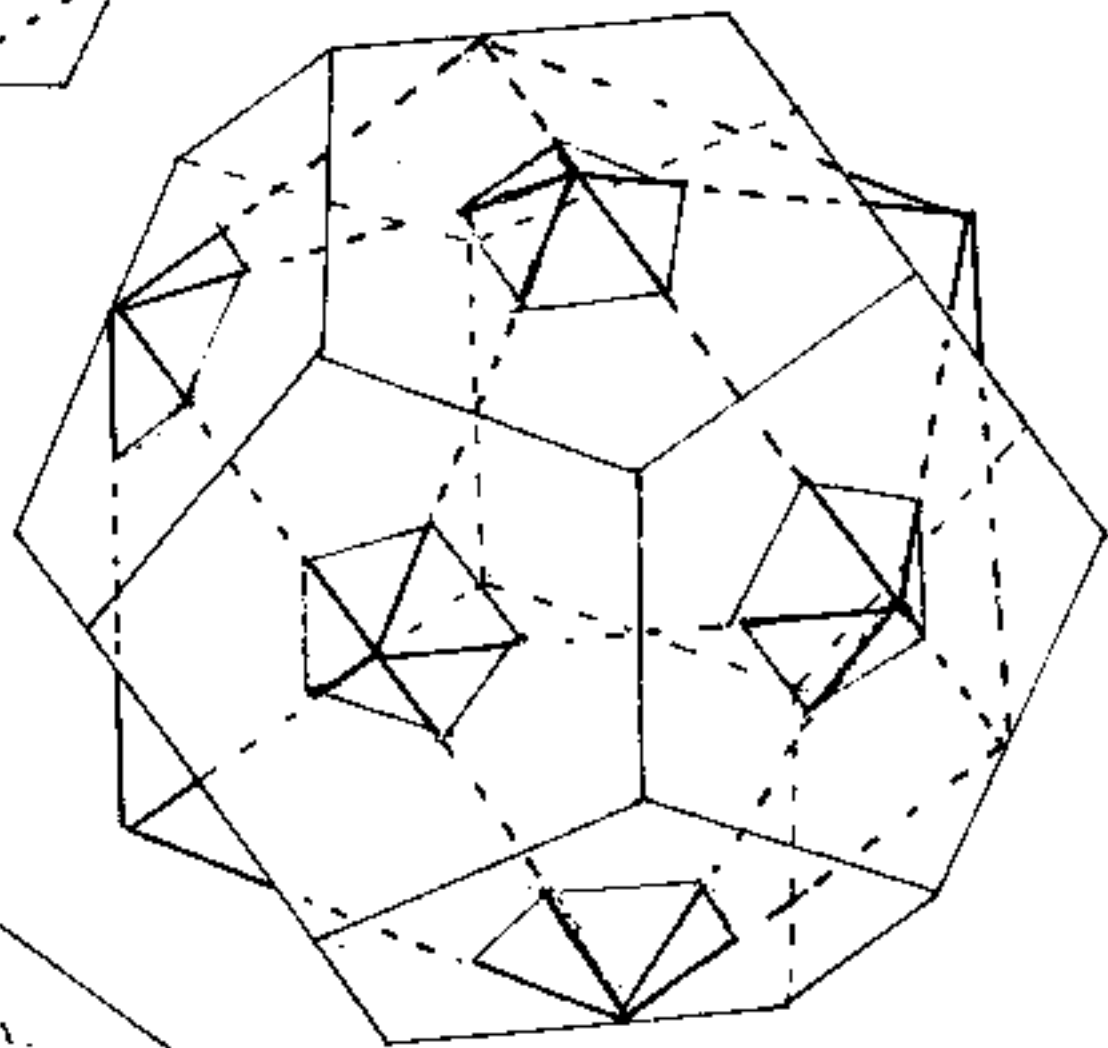


e la proiezione del solido ottenuto dai 60 vertici  $\Gamma$





*Proiezioni del dodecaedro  
e dell'icosaedro con  
vertici comuni all'  
enenecontaedro*





## Solidi provenienti da sezioni di altri solidi

Abbiamo visto come, partendo dai solidi regolari ed aggiungendo piramidi alle facce, si ricavano le principali forme cristallografiche.

Uno studio di solidi, con disegni di Leonardo da Vinci, si trova nell'opera di Luca Pacioli (1445-1517?) "De Divina Proportione". È interessante ricordare che, secondo Platone, la sezione aurea o Divina proporzione "... da' l'essere formale alla Quintessenza attraverso la quale Dio conferisce la Virtù Celeste a tutti gli elementi naturali: fuoco, aria, acqua, terra; corrispondenti ai solidi regolari:

duodecedron (dodecaedro) = quintessenza o cielo.

tetradron (tetraedro) = fuoco

ottocedron (ottaedro) = aria

icocedron (icosaedro) = acqua

exacedron (esaedro o cubo) = terra

Questi cinque corpi regolari sono legati, proporzionati fra loro e circoscritti da una sfera e solo la Divina Proporzione li accorda!"

Nella rappresentazione dei solidi, per evidenziare gli spigoli che rimangono coperti dalle facce, noi usiamo disegnarli a tratteggio. Nei disegni di Leonardo ogni solido è disegnato sia come "solidus" (cioè pieno) sia come "vacuus" (cioè vuoto), e disegna solo

materializzati gli spigoli del solido cosicché non esistendo piani di facce si vedono anche gli spigoli opposti.

Le sezioni dei solidi possiamo riguardarle come effettuate in due diverse modalità:

### 1) Sezioni parallele alle facce

È la modalità di sfaldamento dei cristalli.

Se tutte le sezioni avvengono alla stessa distanza dalle facce origine, il solido, come configurazione, resta invariato, anche se impiccolito.

In cristallografia non ha alcuna importanza, se non tutte le facce sono sfaldate, e se lo sfaldamento ha profondità diverse, la configurazione del solido appare variata, ma il sistema cristallino di appartenenza resta lo stesso. Basta pensare che le rette di giacitura delle facce restano le stesse.

### 2) Sezioni in prossimità dei vertici

Per asportare piramidi rette, aventi per vertice il vertice stesso. È il procedimento inverso a quello di aggiungere piramidi alle facce e che abbiamo già trattato. Le configurazioni del solido cambiano anche con l'altezza delle piramidi asportate.

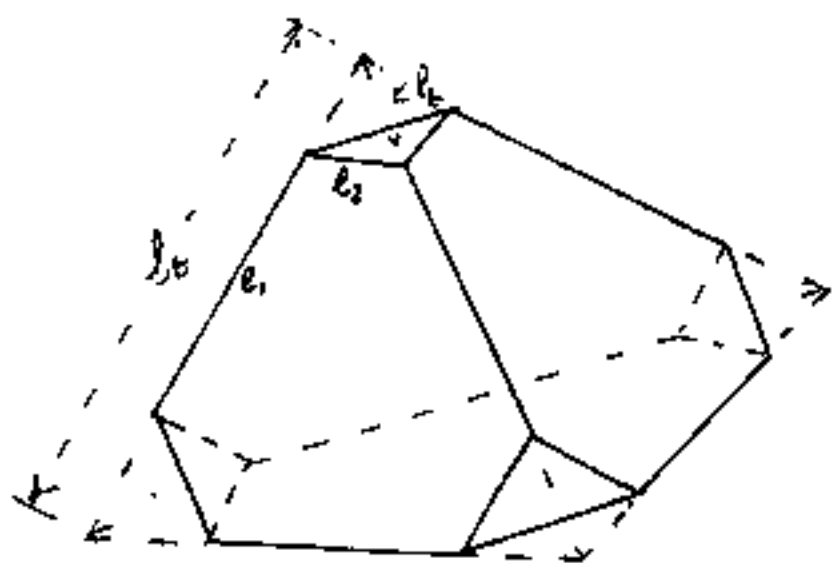
È da notare che, per i solidi regolari, solo

tetraedro non ha facce parallele, ed il suo complemento ove si scambiano le facce con i vertici è ancora un tetraedro, mentre: cubo e ottaedro, dodecaedro ed icosaedro, (come abbiamo già visto) si scambiano le facce con i vertici e viceversa.

### TETRAEDRO SEZIONATO

Consideriamo le sezioni del secondo tipo. (quelle del primo tipo lasciano la configurazione tetraedrica).

Il tetraedro sezionato presso i vertici diventa:



ove  $K l_t$  è la distanza dei vertici dalle sezioni; - si ha:

$$l_2 = \frac{K l_t \sqrt{6}}{2}$$

$$l_1 = l_t - 2l_2 = l_t (1 - K\sqrt{6})$$

Al crescere di  $K$  si hanno

configurazioni diverse; quando:  $l_2 = l_1$  cioè quando:

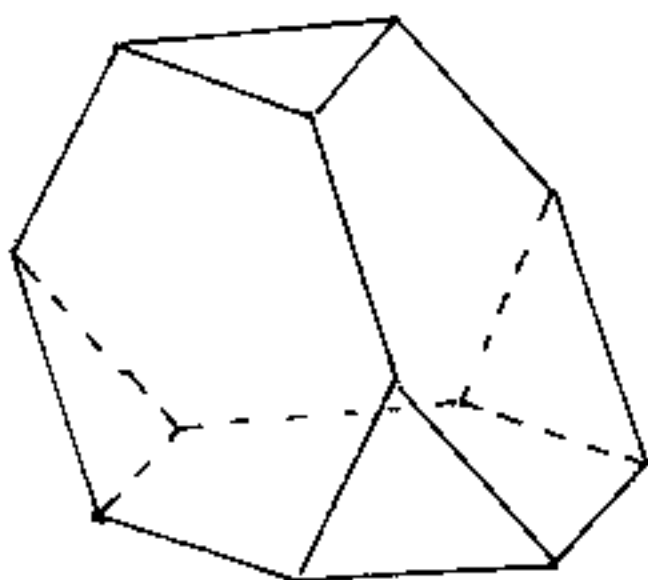
$$\frac{K l_t \sqrt{6}}{2} = l_t (1 - K\sqrt{6}) \Rightarrow \frac{1}{2} K\sqrt{6} = 1 \quad \boxed{K = \frac{\sqrt{6}}{3}} = 0,816553,$$

quindi:  $\boxed{l_2 = l_1 = \frac{1}{3} l_t}$  si ha

un solido che nel libro "De Divina Proportione" (op. cit.)

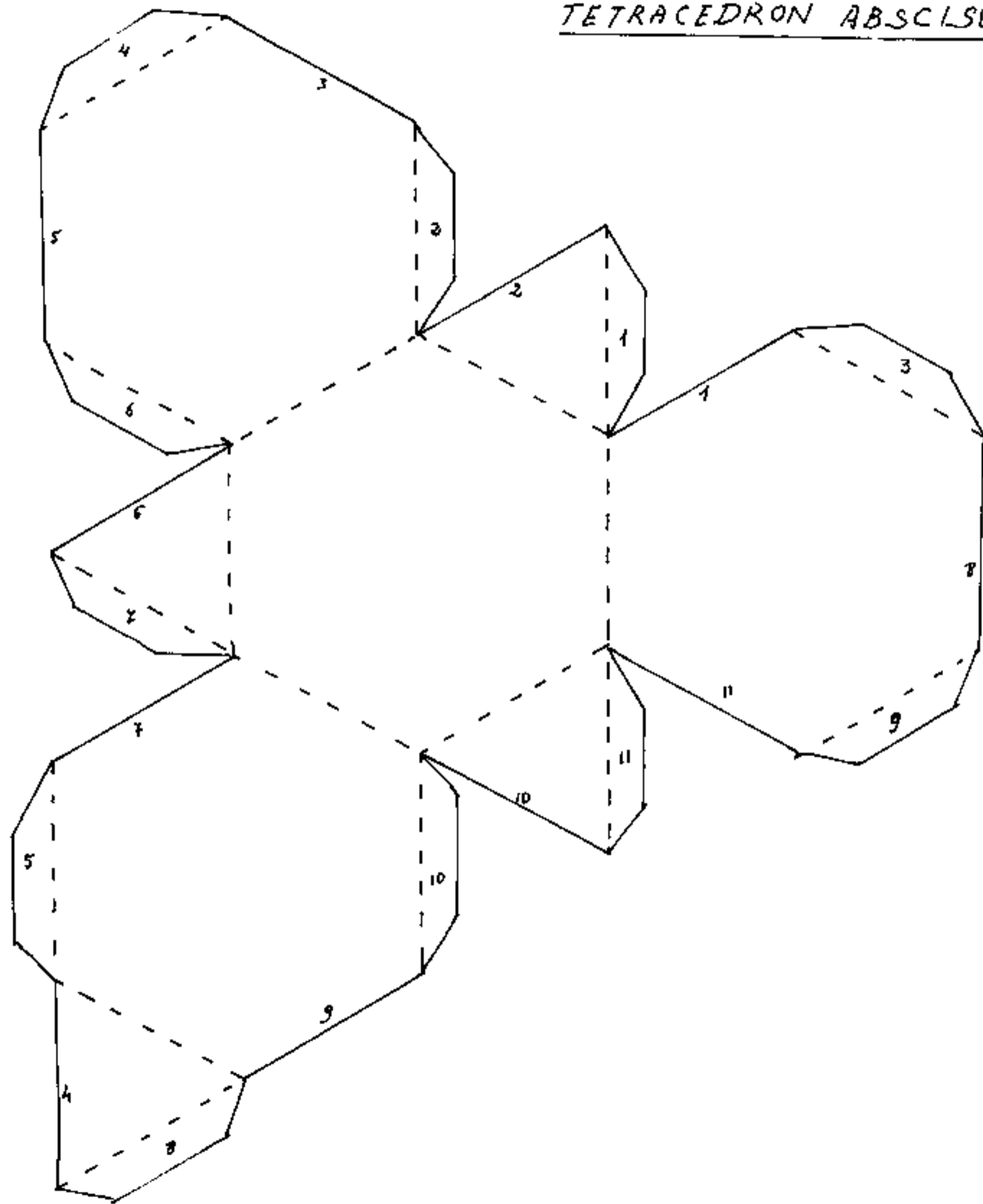
viene chiamato:

Tetracedron Abscisus

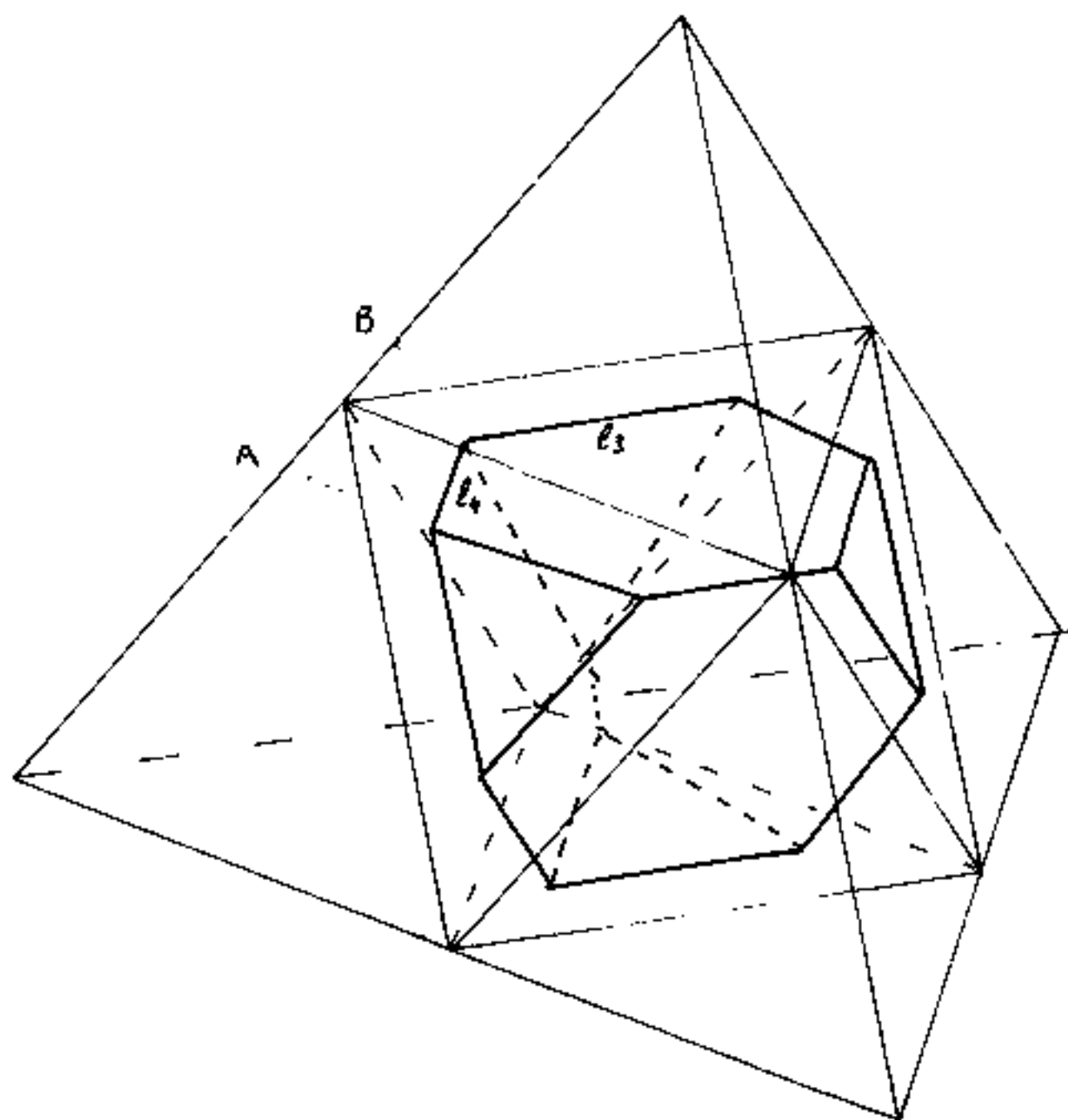


Schema di

TETRAEDRON ABSCLVUS



Aumentando ancora  $K$  si arriva al limite max  
 ove  $l_1 = 0$  cioè:  $K = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,40824829$ ;  $l_2 = l_t/2$ ;  
 si ha che il tetraedro si è trasformato in un  
 ottaedro di spigolo metà'  $= l_2 = l_t/2$ .



Se continuiamo ad aumentare  $K$  si sezionano  
 con piani paralleli alle facce, quattro facce  
 alterne dell'ottaedro.

Essendo  $K > \frac{1}{\sqrt{6}}$  si avrebbe  $l_1 < 0$ , e poiché  
 le sezioni si intersecano anche fra loro, le  
 formule sopra indicate non sono più valide.

$$l_1 = |l_t(1 - K\sqrt{6})| = |\overline{AB}|; \text{avremo: } \underline{l_4 = \overline{AB} = l_t(K\sqrt{6} - 1)}$$

$$l_3 = \frac{l_t K\sqrt{6}}{2} - 2\overline{AB} = l_t \left( \frac{K\sqrt{6}}{2} - 2K\sqrt{6} + 2 \right) = \underline{l_t \left( 2 - K \frac{3}{2}\sqrt{6} \right) = l_3}$$

per  $l_3 = l_4$  avremo:

$$-K \frac{3}{2} \sqrt{6} + 2 = K \sqrt{6} - 1$$

$$\frac{5}{2} K \sqrt{6} = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{K = \frac{\sqrt{6}}{5}} = 0,48990$$

cioè: per  $K = \sqrt{6}/5$  ritorna il tetraedronz ascisus con quattro facce esagonali e quattro triangolari regolari.

Ma possiamo continuare ad aumentare  $K$  fino a che:  $K l_4 = r_4 =$  raggio della sfera circoscritta al tetraedro, (ove i 4 piani di sezione hanno in comune il centro sfera) cioè  $K$  può essere:  $K \leq \frac{\sqrt{6}}{4} = 0,61237244$ .

Per  $K = \frac{\sqrt{6}}{4}$  il solido si riduce ad un punto.

$$\text{Se: } l_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{K = \frac{4}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{9}\sqrt{6}} = 0,54433105.$$

Per tale valore il solido ritorna un tetraedro orientato in modo da aver scambiato le facce con i vertici e viceversa col tetraedro di partenza, ed  $l_4 = l_4/3$ .

Idealmente possiamo continuare a far crescere  $K$  e se consideriamo il solido costituito dalle sezioni; (il negativo rispetto al precedente), si costituisce il solido tetraedrico primitivo per  $K = 1$ . V'è quindi una specie di pulsazione, di frequenza, che costituisce il tetraedro e passando

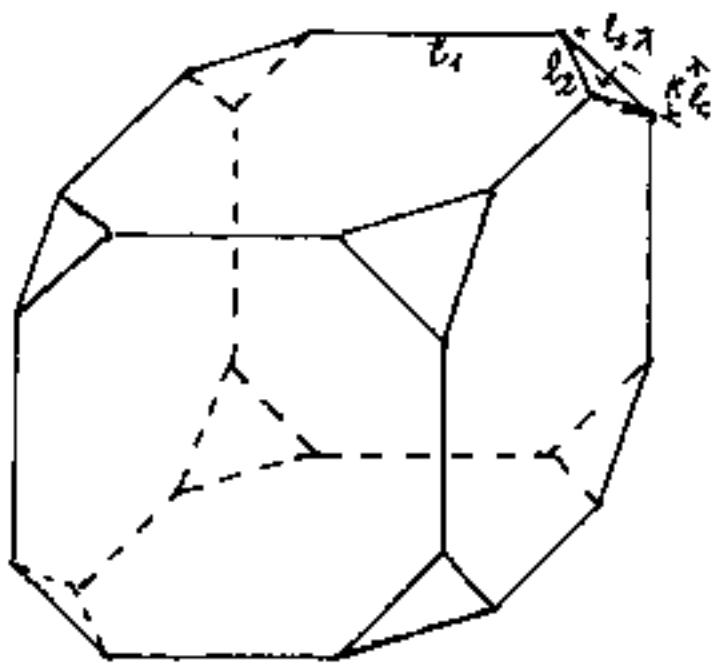
per l'ottaedro ne amplia la dimensione.

Se consideriamo puramente energetica che abbiamo detto ideale o negativa, e materiale la fase concreta o positiva, la pulsazione sarebbe il continuo trasmutarsi di materia in energia e viceversa.

Possiamo riguardare l'ottaedro come il nucleo e gli elettroni i tetraedri. (un elemento al massimo può avere valenza 8). Meglio forse pensare l'ottaedro ed il tetraedro i primordi di materia  $\leftrightarrow$  energia, Se consideriamo due rette sghembe in direzioni ortogonali e su di esse vibrazioni assiali di campo elettrico su una, e campo magnetico sull'altra, abbiamo fatto il tetraedro che può anche vedersi ponendo l'indice ed il pollice della mano sinistra e della mano destra sui vertici di un ideale tetraedro e simulando la vibrazione avvicinando e allontanando pollice ed indice delle due mani. Questi paragoni sono solo modelli mentali per cercare di fissare le idee sul costituirsi della fenomenologia che ci circonda, ed andrebbero analizzati meglio, ma ciò esula dall'impostazione matematica di questa parte, ci promettiamo uno studio specifico.

## Cubo sezionato

←---  $l_c$  ---→



Sezionando il cubo (o esaedro) in prossimità dei vertici, come abbiamo già fatto per il tetraedro, detta:  $\kappa l_c$  la distanza dal vertice del piano di sezione, abbiamo:

$$l_2 = l_3 \sqrt{3} ; l_1 = l_c - 2l_3 ; l_2 = l_c \kappa \sqrt{6} ;$$

$$l_1 = l_c (1 - 2\kappa \sqrt{3}) ; l_3 = \kappa l_c \sqrt{3} ;$$

Quando  $l_1 = l_2$  le facce diventano ottagoni e

triangoli regolari:  $\kappa \sqrt{6} = (1 - 2\kappa \sqrt{3}) \Rightarrow \kappa = 0,169101978$

$$\kappa = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) ; l_1 = l_2 = (\sqrt{2} - 1) l_c ; l_1 = l_2 = 0,414213562 l_c.$$

Quando  $l_1 = 0$  si ha:

$$l_c / \sqrt{2} = l_2 = 0,70710678 l_c$$

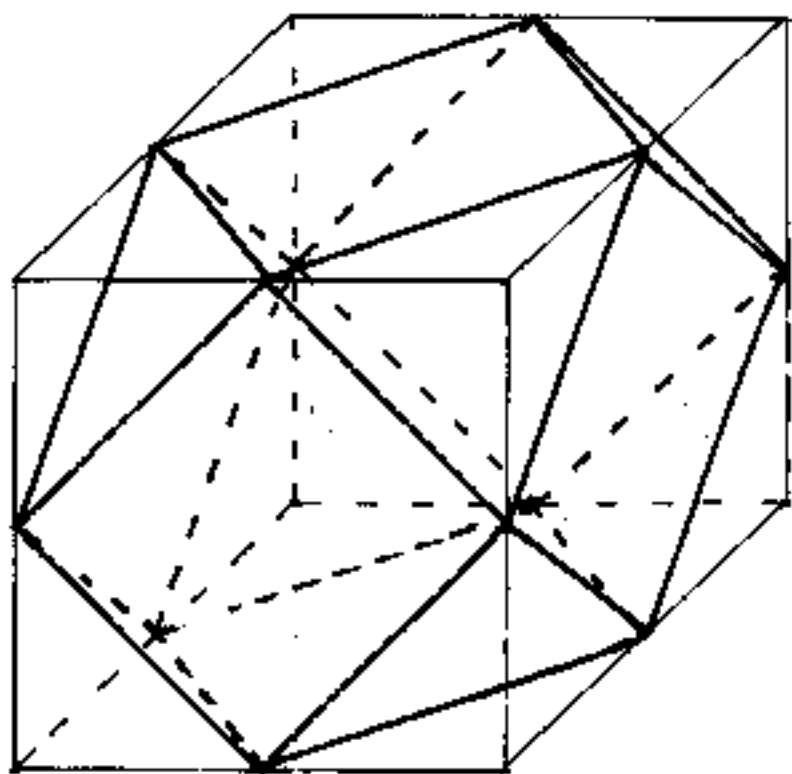
$$l_3 = l_c / 2 = 0,5 l_c$$

$$\kappa = \sqrt{3} / 6 = 0,28867513.$$

Le facce del solido diventano quadrati e triangoli equilateri. (Spigoli tutti uguali) Solido che nel testo

del Pacioli (op.cit.) viene chiamato:

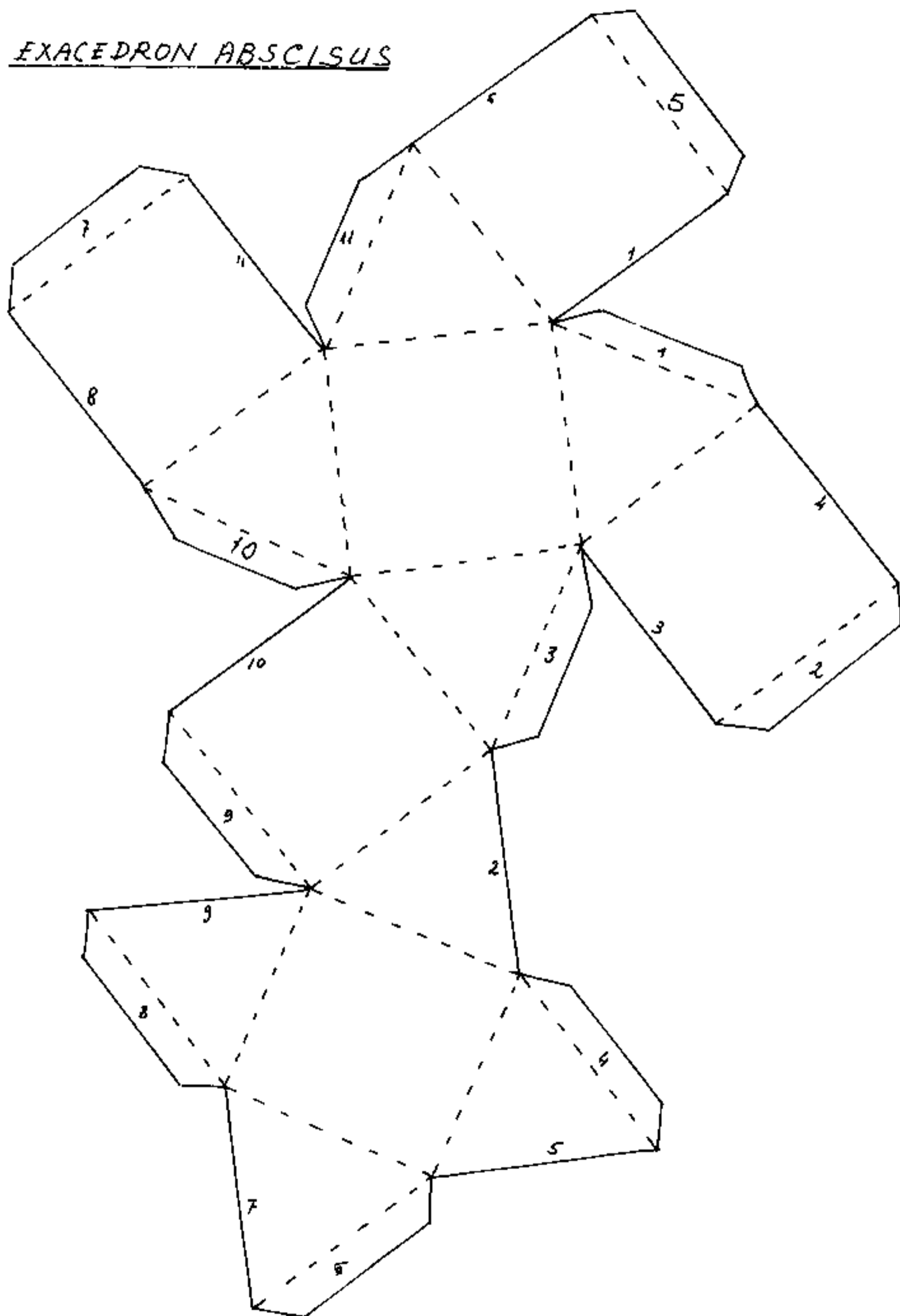
Exaedron Abscisus



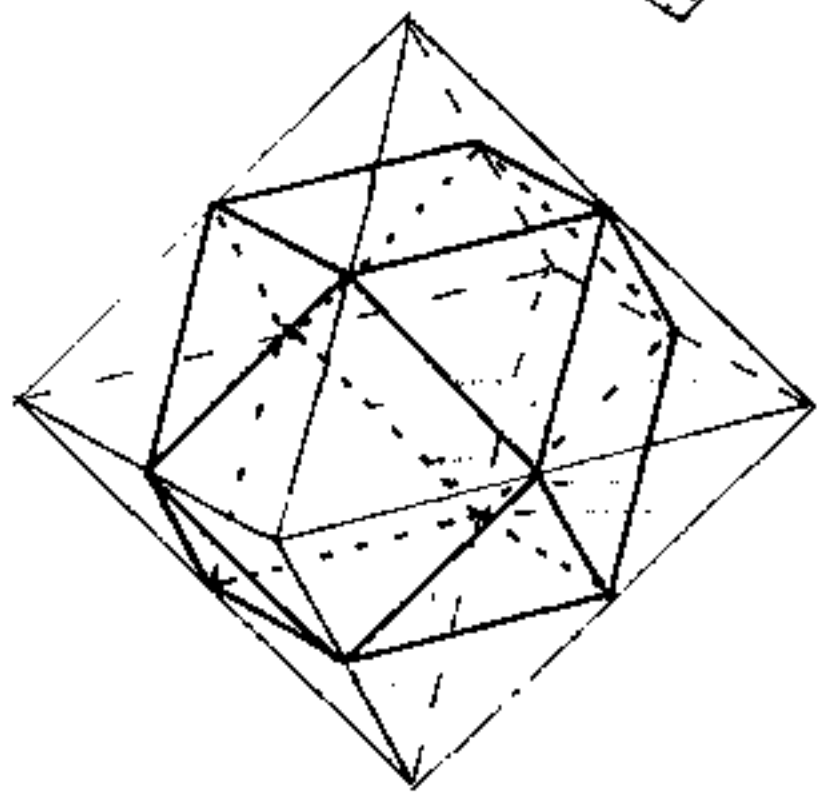
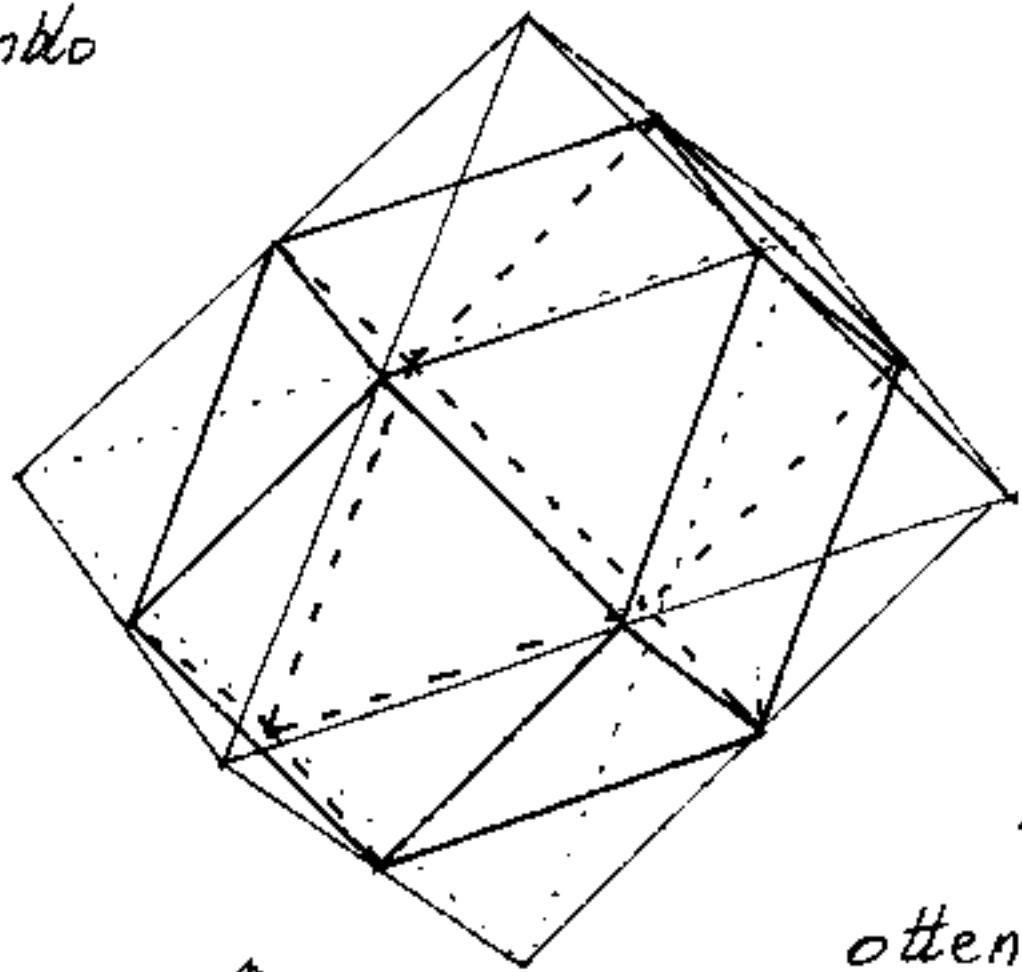


Schema di

EXACEDRON ABSCISUS



Però l'exaedron abscisus, si può ottenere anche sezionando l'ottaedro con piani che bisecano gli spigoli. Ne diamo la figura nella stessa posizione della sezione del cubo e la ripetiamo ponendo l'ottaedro nella posizione in cui dimostravamo che aggiungendo



ad un tetraedro le ottave parti di un ottaedro si otteneva un cubo. Cioè che la continuità poteva essere ottenuta con tetraedri ed ottaedri che rimarcano la continuità fatta di soli cubi. Abbiamo poi dimostrato che tale continuità poteva ottenersi con soli rombododecaedri.

È notevole rilevare che le 8 piramidi a base triangolare tolte al cubo di lato  $l$  per ottenere l'exaedron abscisus di spigolo  $l/\sqrt{2}$ , messe insieme, formano un ottaedro di spigolo  $l/\sqrt{2}$ . Ciò porta ad

alcune osservazioni:

1) Il volume del cubo di lato  $l_c$  è:  $V_c = l_c^3$ :

il volume dell'ottaedro di spigolo  $l_c/\sqrt{2}$  è:  $V_o = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{l_c}{\sqrt{2}}\right)^3 = \left(\frac{1}{6} l_c^3\right)$

quindi il volume dell'exaedron abscissus  $V_{ex} = V_c - V_o$

$$= \frac{5}{6} \text{ volume del cubo} = \left(\frac{5}{6} l_c^3\right)$$

2) Se all'exaedron abscissus di spigolo  $l_c/\sqrt{2}$  aggiungiamo sulle 6 facce quadrate 6 semiottaedri di

spigolo  $l_c/\sqrt{2}$  otteniamo un nuovo ottaedro di

spigolo  $(l_c/\sqrt{2}) = 2l_o$  il cui volume è  $\frac{\sqrt{2}}{3} (l_c/\sqrt{2})^3 = \frac{4}{3} l_c^3$

cioè il volume di questo nuovo ottaedro è  $\frac{4}{3}$  il

volume del cubo e poiché il volume del cubo è  $\frac{4}{5}$

il volume dell'exaedron abscissus, avremo che il vo-

lume del nuovo ottaedro è  $\frac{8}{5}$  di quello dell'exaedron ab-

scissus ed è otto volte il precedente ottaedro di spigolo metà.

3) Si nota l'opportunità di riferire ad uno stesso

spigolo certi gruppi di solidi. Se " $s_0$ " è lo spi-

golo del tetraedro, dell'ottaedro, dell'exaedron

abscissus che formano una continuità ove si

riproducono gli stessi solidi aventi per spigolo

un numero intero (razionale) di  $s_0$ ; analogamente

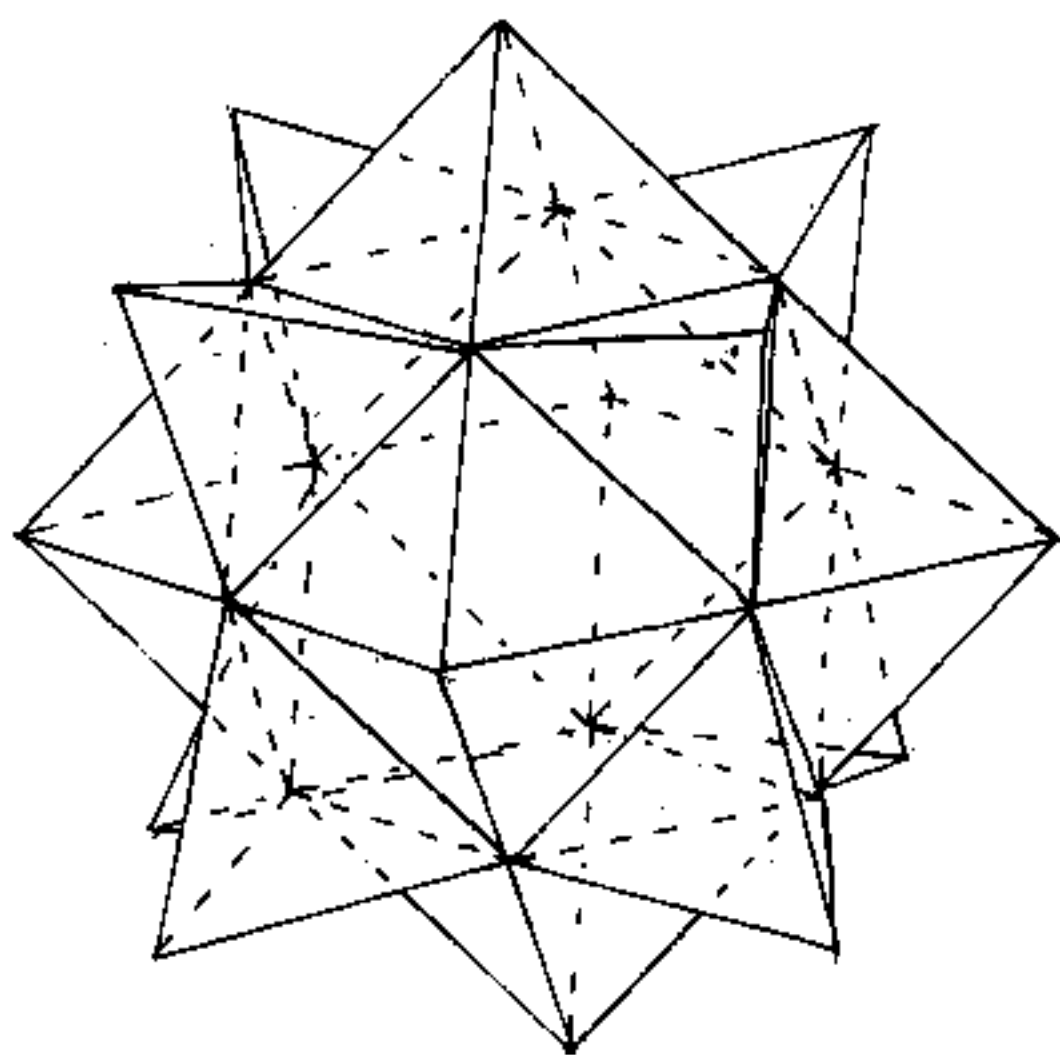
$s_1$  per la continuità cubica, ed  $s_2$  per la con-

tinuità rombododecaedrica, notiamo che:

$$s_0 = s_1 \sqrt{2} \quad ; \quad s_2 = \frac{s_1 \sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \text{cioè non commensurabili!}$$

## L'EXACEDRON ABSCISUS elevatus

Si ottiene sovrapponendo all'exacedron ascisus, dei semiottaedri sulle facce quadrate (6); (con ciò si è fatto un ottaedro di spigolo doppio) e sovrapponendo dei tetraedri sulle facce triangolari (8) (con ciò si sono sostituiti nel cubo originario le piramidi a base triangolare asportate (erano otto di ottaedro) con tetraedri. Tutte le facce (56) sono



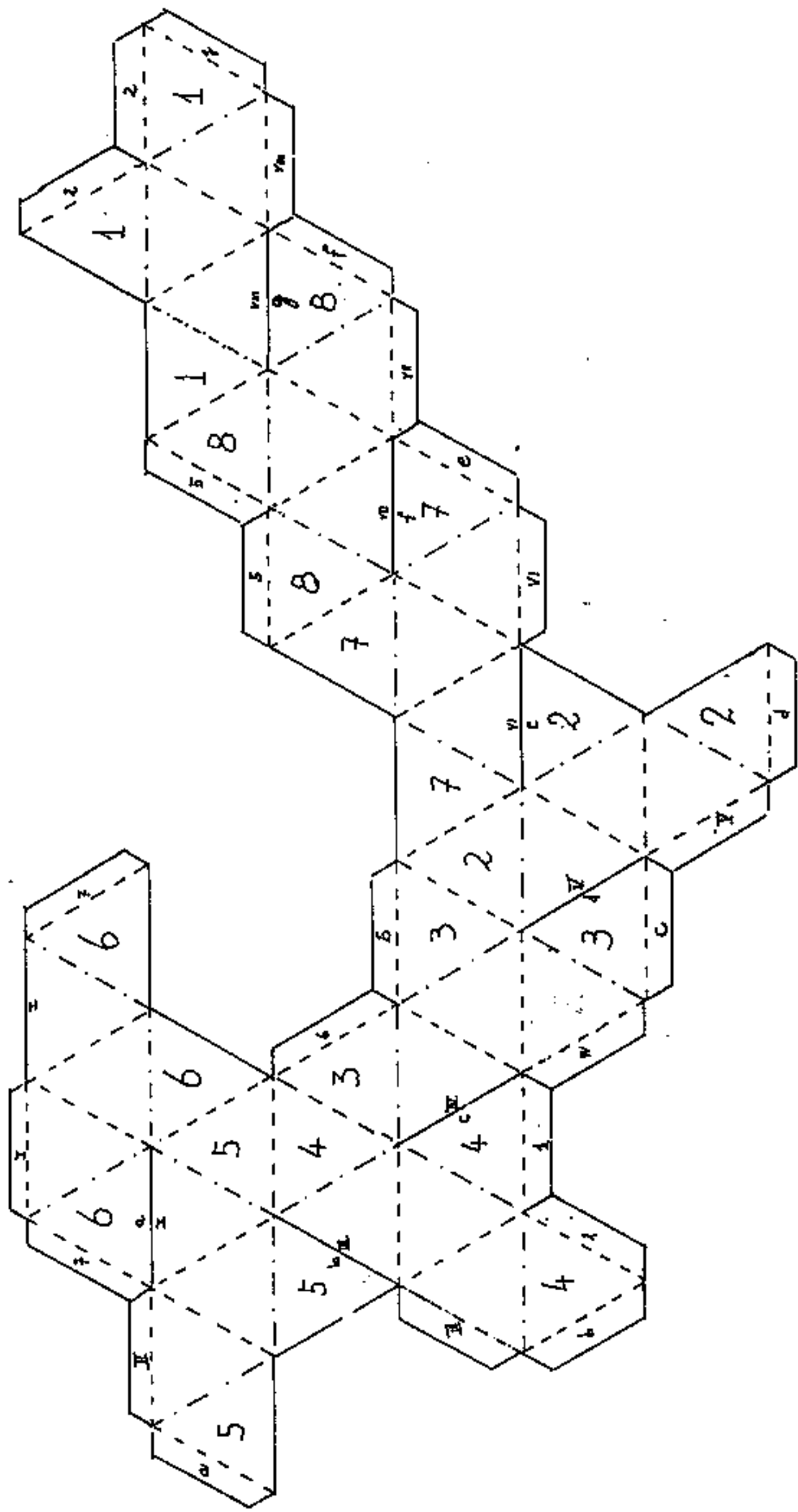
triangoli equilateri, se  $l$  è lo spigolo, la superficie laterale sarà:

$$56 \frac{l^2}{4} \sqrt{3} = \boxed{S_l = l^2 14\sqrt{3}}$$

Per il volume possiamo considerare il volume

di un ottaedro di spigolo  $2l$ , aumentato del volume di otto tetraedri di spigolo  $l$ ; cioè:  $V = \frac{\sqrt{2}}{3} (2l)^3 + 8 \left( \frac{\sqrt{2}}{12} l^3 \right) =$   
 $V = 8\sqrt{2} l^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) = \boxed{V = \frac{10\sqrt{2}}{3} l^3}$ , poiché  $l = \frac{l_c}{\sqrt{2}}$ ;  $\boxed{V = \frac{5}{3} l_c^3}$

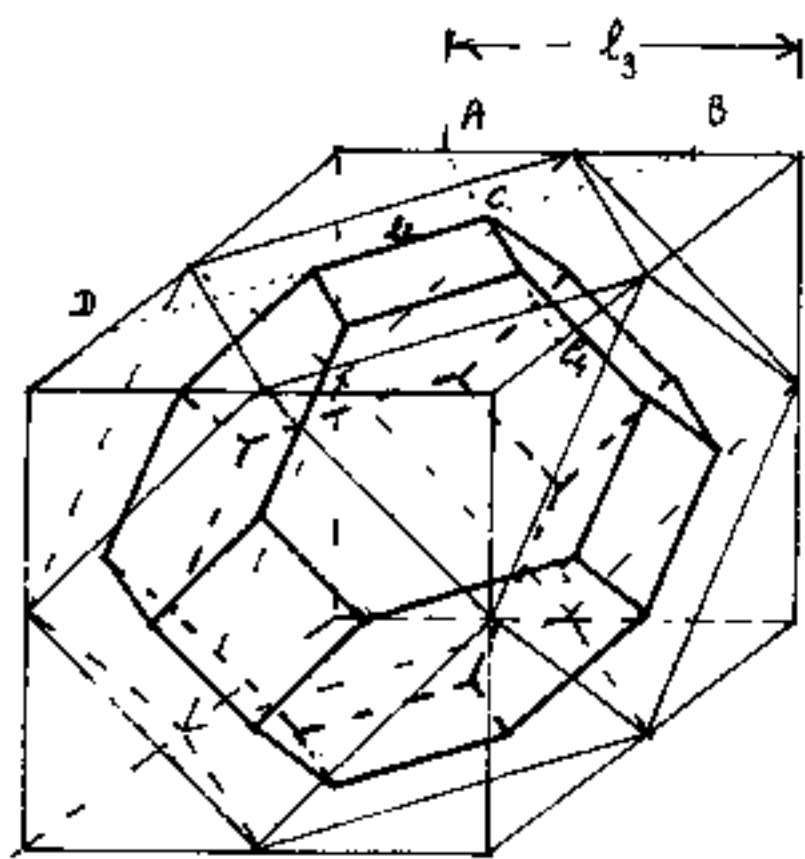
È interessante notare che il volume di questo solido rapportato al volume del cubo dà un numero razionale  $\left( \frac{5}{3} \right)$ ; e rapportato all'ottaedro dà  $\left( \frac{5}{4} \right)$ .



Schema di EXACEDRON ABCISVS ELEKAT5

Tagliare lungo le linee intere, piegare convesso lungo i tratti, piegare concavo lungo le linee a tratto e punto

Riprendiamo la sezione del cubo (esacedro) facendo aumentare ulteriormente  $K$ . Abbiamo visto



che per  $K = \frac{\sqrt{3}}{6} = 0,28867513$ , si ha  $l_1 = 0$  (exacedron ascisus), per  $K > \frac{\sqrt{3}}{6}$ , analogamente a quanto avviene per il tetraedro, le sezioni si intersecano fra loro, il valore di  $l_1$  diverrebbe ne-

gativo e le formule non sono più valide:

$$l_1 = \overline{AB} = (-l_c (1 - 2K\sqrt{3}))$$

D'altra parte l'intersezione fra i piani di sezione genera un nuovo segmento, così che il solido risulta avere sei facce quadrate ed otto esagonali irregolari.

Le facce esagonali diventano esagoni regolari quando  $l_2 = l_4$ . Poiché questo solido si può ottenere anche sezionando un ottaedro, nel testo del Pacioli (op. cit.) è stato chiamato: OCTOEDRON ABSCISVS.

Calcoliamo gli elementi.

$$\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB} / \sqrt{2} = \boxed{l_c (K\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{2}}) = l_4} ; \quad \overline{BD} = l_c K\sqrt{6} ;$$

$$l_2 = \overline{BD} - 2\overline{CB} = l_c (K\sqrt{6} - 2K\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \boxed{l_2 = l_c (\sqrt{2} - K\sqrt{6})}$$

$$\text{per } (l_2 = l_4) ; (\sqrt{2} - K\sqrt{6}) = (K\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{2}}) ; 2K\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2} ; K = \frac{\sqrt{3}}{4} ;$$

$$\underline{K = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,43301270}$$

Se continuiamo ad aumentare  $K$  arriviamo ad  $l_2 = 0$ , spariscono le facce quadrate e per  $l_2 = 0$ , il solido diventa un ottaedro regolare di spigolo  $l_0 = l_c/\sqrt{2}$ .

Perciò essendo:

$$l_2 = 0 : l_c (\sqrt{2} - K\sqrt{6}) = 0 \quad \text{si ha: } K = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

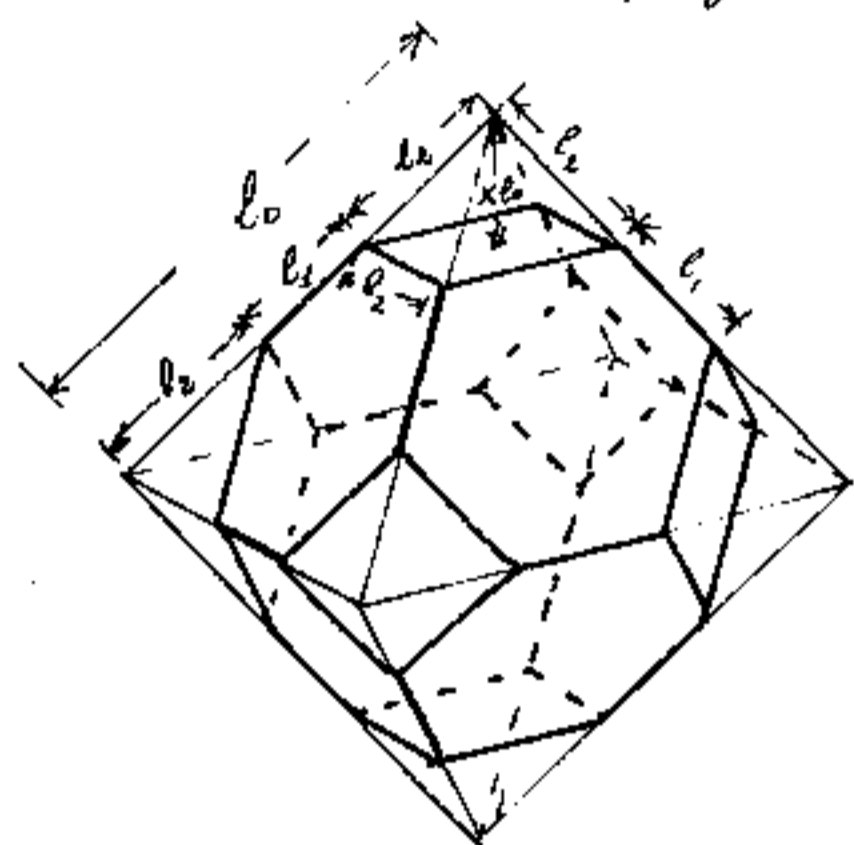
per  $K = \sqrt{3}/3 = 0,57735027$  si ha l'ottaedro.

Se continuassimo ad aumentare  $K$ , in quanto i piani di sezione sono paralleli alle facce dell'ottaedro, si ha lo sfaldamento dell'ottaedro che diventa sempre più piccolo finché per  $K = \sqrt{3}/2 = 0,866025403$ , si ha il solido puntiforme al centro del cubo originario ed è l'intersezione degli otto piani di sezione.

Vedremo ora come sezionando l'ottaedro si ripetono, in sequenza inversa, i solidi della sezione del cubo, fino ad arrivare al cubo stesso ed al suo sfaldamento con piani paralleli alle facce.

# OTTAEDRO SEZIONATO

Sezioniamo l'ottaedro con piani perpendicolari agli assi dell'ottaedro stesso, partendo dai vertici. Sia  $l_0$  lo spigolo dell'ottaedro, e  $Kl_0$  la



distanza dai vertici dei piani di sezione, avremo:

$$\underline{l_2 = K\sqrt{2}l_0 ; l_1 = l_0(1 - 2K\sqrt{2})}$$

Quando:  $l_1 = l_2$  si ha:

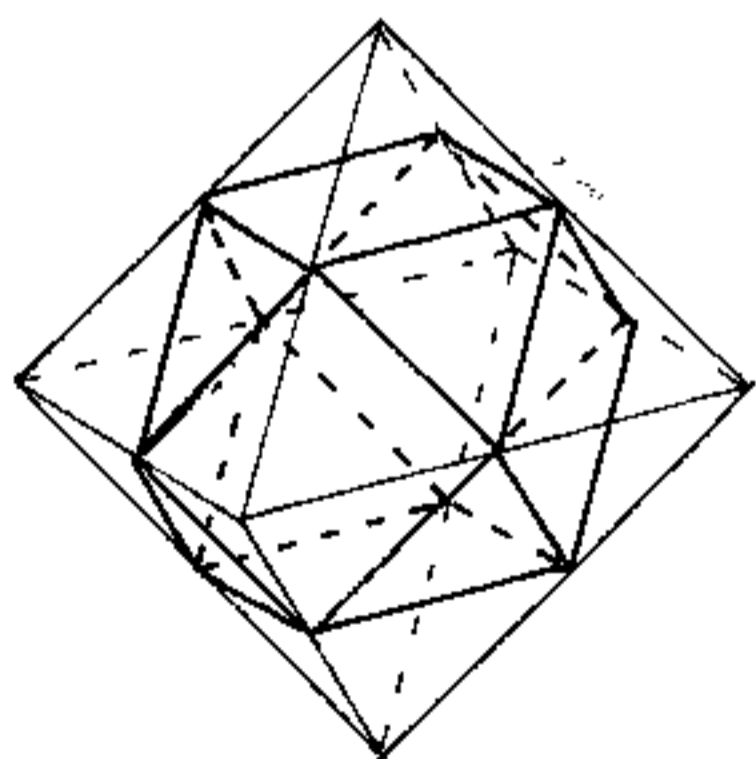
$$\underline{K = 1/3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} = 0,23570226}$$

$$\underline{l_1 = l_2 = l_0/3 \text{ il solido \u00e9}}$$

detto: OCTACEDRON ABSCISVS

e lo abbiamo gi\u00e0 trovato con le sezioni del cubo.

$$\underline{\text{Quando } l_1 = 0 ; l_2 = l_0/2 ; K = 1/2\sqrt{2} = 0,35355339}$$



ritorna l'EXACEDRON ABSCISVS

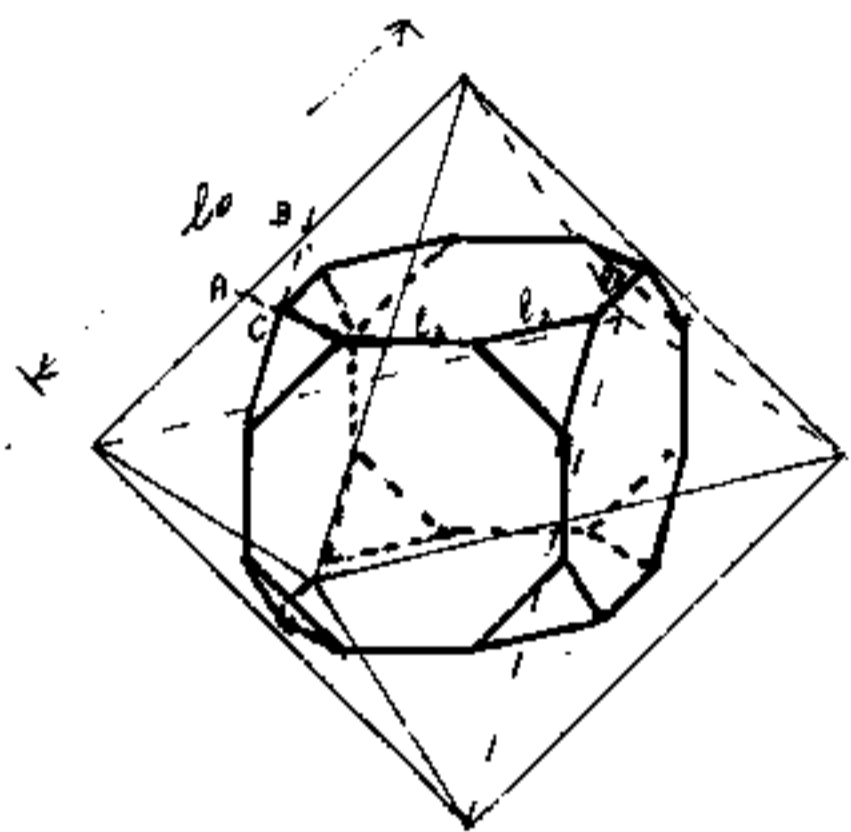
che abbiamo gi\u00e0 trovato con le sezioni del cubo.

Aumentando ancora  $K$ , si ha il fenomeno del sovrapporsi delle sezioni, impiccoliscono le facce triangolari,

mentre le facce che da esagone erano divenute quadrate, diventano ora ottagonali per l'aumento dei segmenti intercettati sui piani di sezione,



Occorre rivedere le formule, perché si introduce il segmento  $l_3$ , (intersezione fra i piani di sezione) che è lato nell'ottagono ove quattro lati sono uguali ad  $l_2$  e quattro ad  $l_3$ . (Per  $l_3 = 0$ , si ha il caso precedente di exaedron abscissus)



$$l_1 < 0; \overline{AB} = -l_1; -l_1 = l_0(2K\sqrt{2} - 1);$$

Essendo ABC un triangolo equilatero  $\overline{AC} = \overline{AB}$  per cui l'accorciamento di  $l_2$  sarà:  $2\overline{AB}$ , cioè:

$$l_2 = (K\sqrt{2}l_0 - 2\overline{AB}) = K\sqrt{2}l_0 - 2l_0(2K\sqrt{2} - 1)$$

$$l_2 = (K\sqrt{2} - 4K\sqrt{2} + 2)l_0 = \boxed{l_2 = (2 - 3K\sqrt{2})l_0}$$

$$\text{mentre } l_3 = \overline{AC}\sqrt{2} = l_0(2K\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = \boxed{l_3 = (4K - \sqrt{2})l_0}$$

Condizione che l'ottagono sia regolare è che:

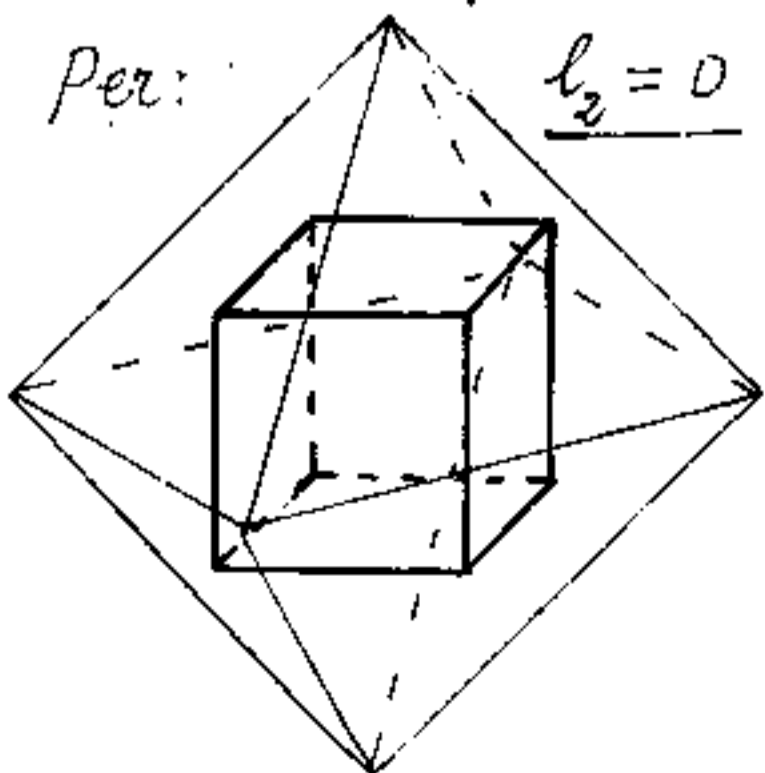
$$\underline{l_2 = l_3}; \text{ cioè: } (4K - \sqrt{2}) = (2 - 3K\sqrt{2}), \text{ da cui: } (4 + 3\sqrt{2})K = (2 + \sqrt{2});$$

$$\text{ed anche: } K = \frac{2 + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{18}} = \frac{(2 + \sqrt{2})(\sqrt{18} - 4)}{18 - 16} = \frac{6\sqrt{2} + 6 - 8 - 4\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2}$$

$$\boxed{K = (\sqrt{2} - 1)} = 0,414213562$$

$$l_3 = l_2 = l_0(4(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}); \boxed{l_2 = l_3 = (3\sqrt{2} - 4)l_0} = (0,342640687)l_0$$

$$\text{Per: } \underline{l_2 = 0}$$



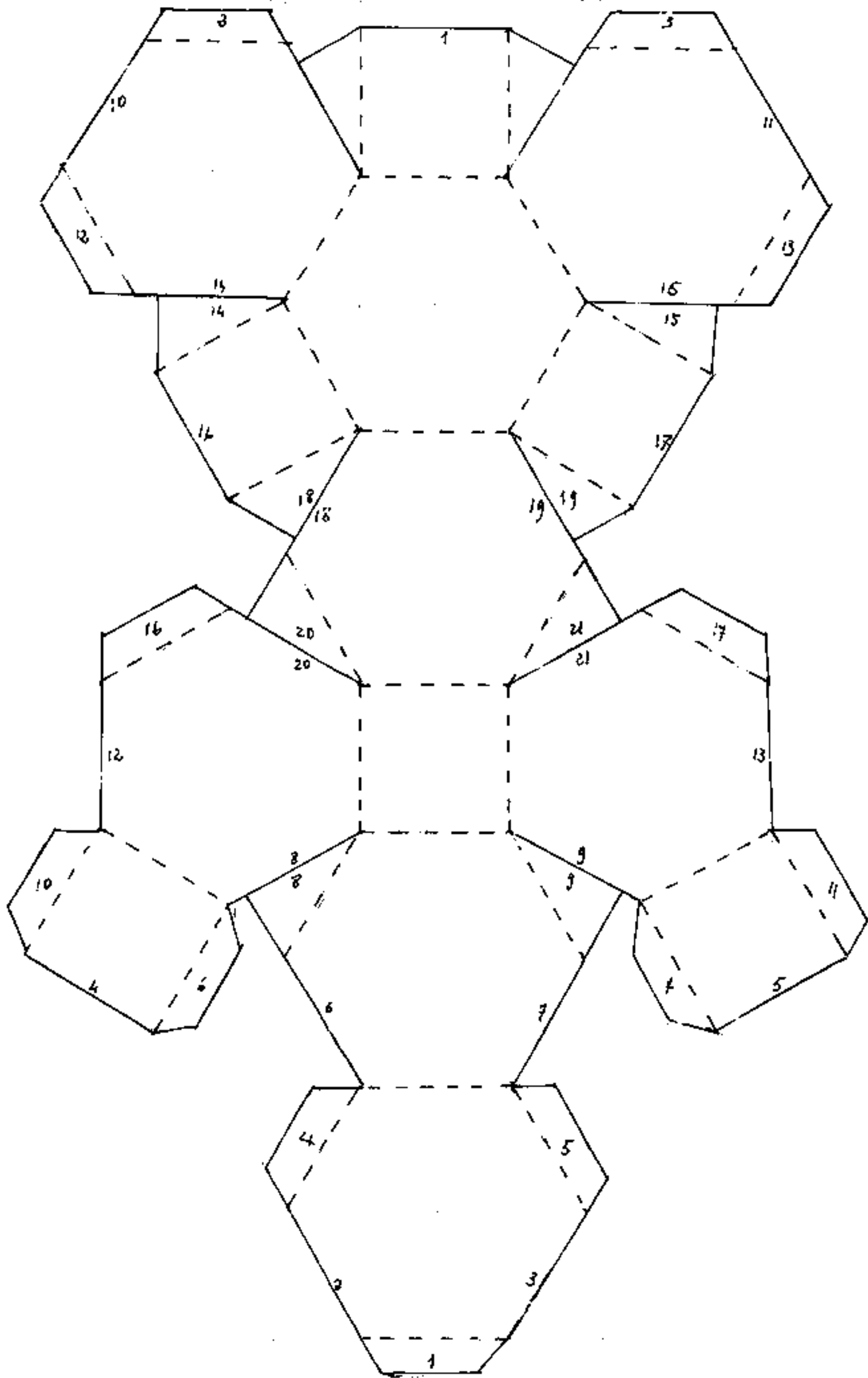
ritorna il cubo:  $2 - 3\sqrt{2}K = 0$

$$K = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,471404521; l_3 = (4(\frac{\sqrt{2}}{3}) - \sqrt{2})l_0 =$$

$$\underline{l_3 = (\frac{\sqrt{2}}{3})l_0} = \text{lato del cubo.}$$

Per  $K > \frac{\sqrt{2}}{3}$  si ha lo sfoltamen-  
to del cubo.

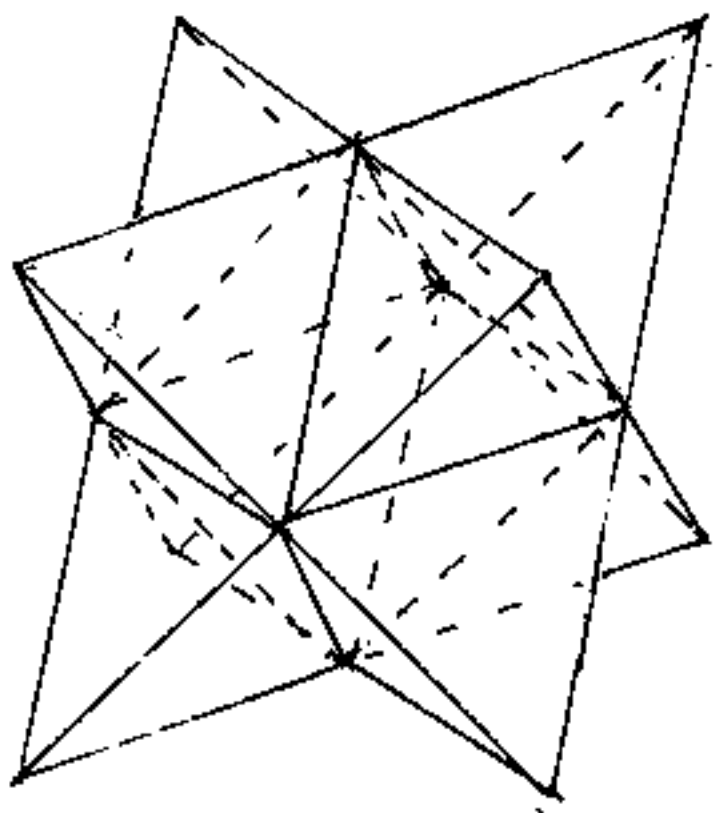
Schema di OCTOCEDRON ABCISVS



## OCTAEDRON ELEVATUS

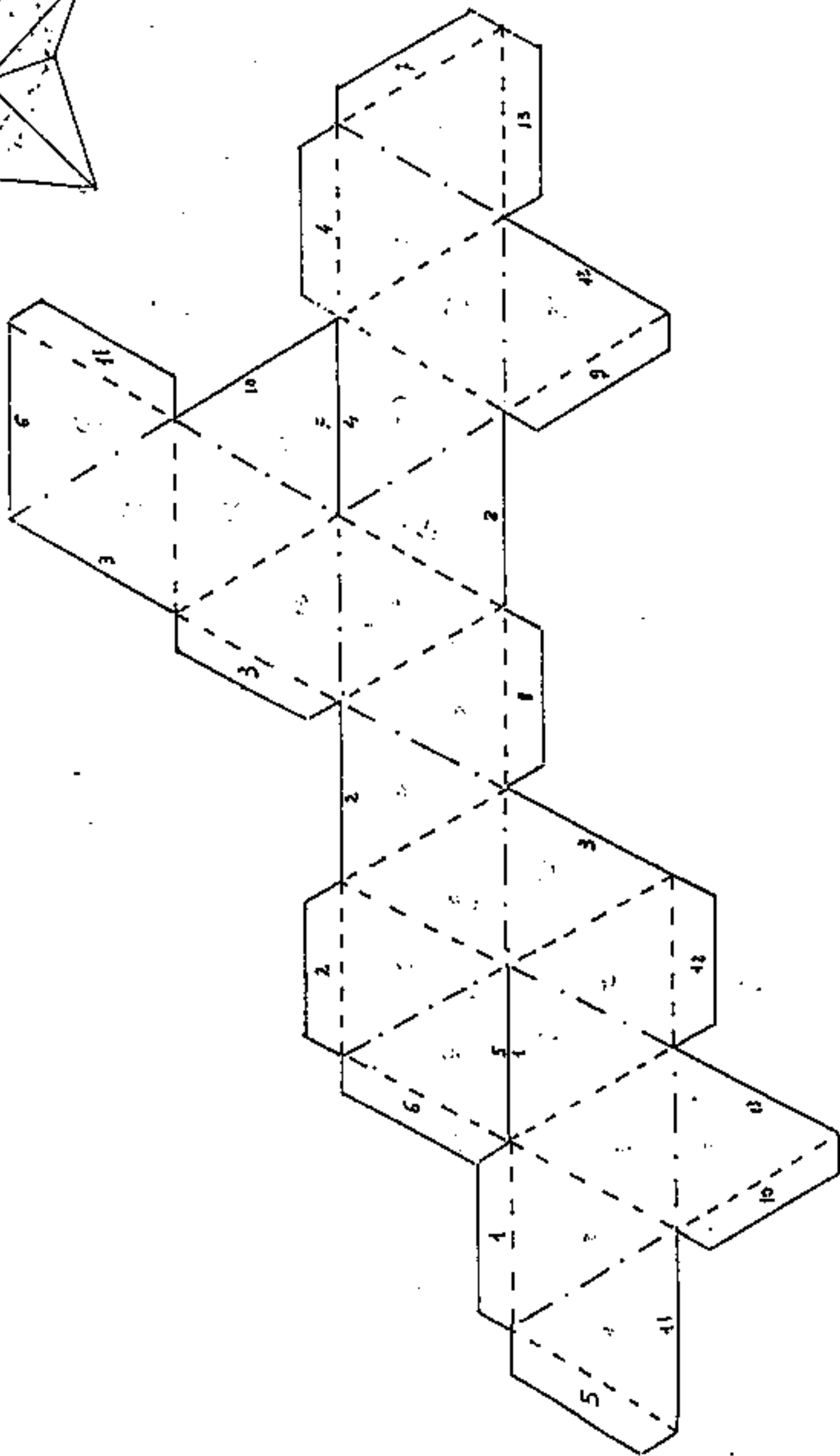
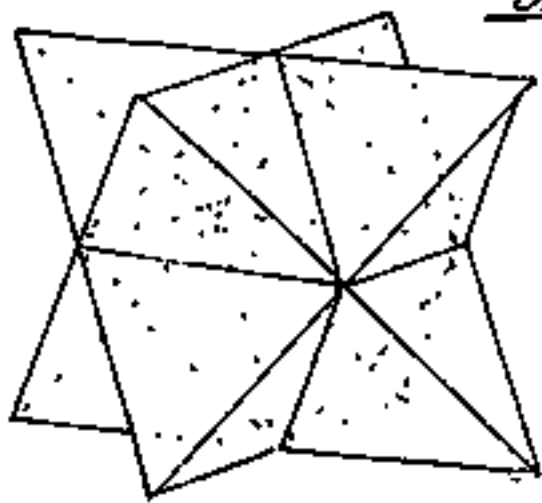
Se poniamo otto tetraedri sulle otto facce di un ottaedro di uguale spigolo, otteniamo l'octaedron elevatus, è un solido concavo la cui superficie laterale è data dalle 24 facce triangolari:  $S_l = 20 \left( \frac{l^2 \sqrt{3}}{2} \right) = 10 l^2 \sqrt{3}$ .

Il volume è dato dal volume dell'ottaedro più otto volte il volume del tetraedro:  $V = l^3 \left( \frac{\sqrt{2}}{3} + 8 \frac{\sqrt{2}}{12} \right) =$   
 $V = l^3 \sqrt{2}$  (Il triplo del volume dell'ottaedro).

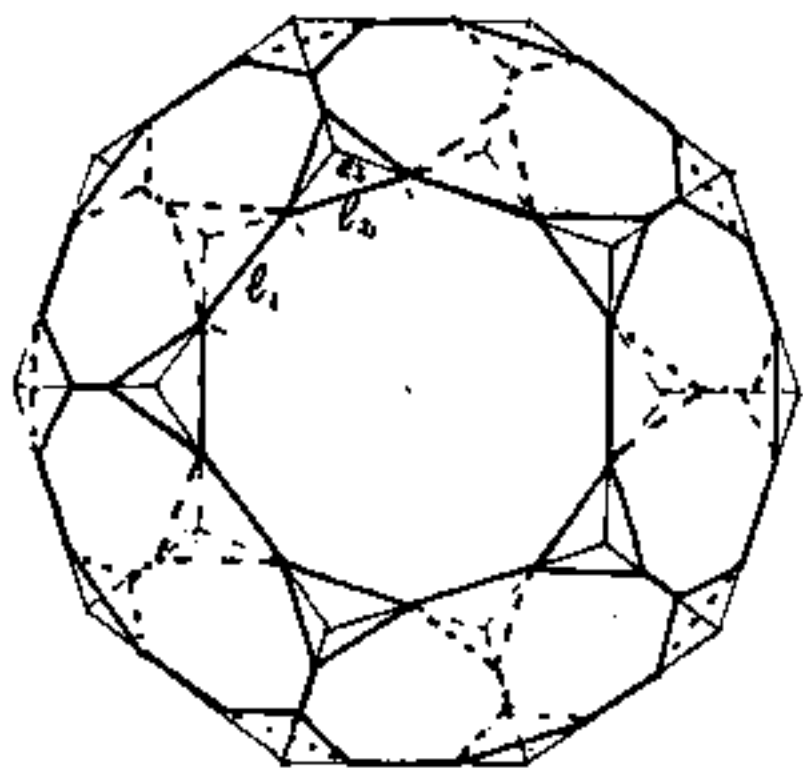


Questo solido è identico all'incastro dei due tetraedri che hanno per spigoli le diagonali delle facce di un cubo; solido che abbiamo già trattato col tetraedro come solido regolare.

Schema di triacisoottaedro formante  
due tetraedri intrecciati:  
detto OCTACEDROVELEVATVS



## DODECAEDRO SEZIONATO



Sia  $l_1$  lo spigolo del dodecaedro, e sia  $Kl_d$  la distanza dei piani di sezione dai vertici del dodecaedro. I piani di sezione sono normali ai raggi passanti per i rispettivi vertici.

Per  $K=0$  si ha il dodecaedro non sezionato.

Detti  $l_2$  i segmenti intersezione fra il piano di sezione e tre facce del dodecaedro, (lato di base della piramide triangolare retta asportata)

Detta  $l_3$  la porzione di spigolo asportata a partire da un vertice, (cioè i segmenti  $l_3$  sono gli spigoli della piramide asportata alta  $Kl_d$ ).

Avremo:  $(Kl_d)^2 + \frac{l_2^2}{3} = l_3^2$ ; detto  $l_1$  il segmento residuo dello spigolo del dodecaedro:  $l_1 = l_1 - 2l_3$

$$\text{Ma } l_3 = l_2 / 2 \cos 36^\circ = l_2 / 2 \frac{(\sqrt{5}+1)}{4} = l_2 \frac{2}{\sqrt{5}+1} = l_2 \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) =$$

$$l_3 = l_2 (0,618034). \text{ perciò: } Kl_d^2 = l_2^2 \left( \frac{6-2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{3} \right) = l_2^2 \left( \frac{9-3\sqrt{5}-2}{6} \right) =$$

$$= l_2^2 \left( \frac{7-3\sqrt{5}}{6} \right); \quad Kl_d = \sqrt{\left( \frac{7-3\sqrt{5}}{6} \right) l_2^2} = l_2 \left( \sqrt{\frac{7-2}{12}} - \sqrt{\frac{7-2}{12}} \right) = l_2 \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right) =$$

$$Kl_d = l_2 (0,22053818); \quad \boxed{l_2 = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2} Kl_d} = Kl_d (4,53456788) -$$

$$\boxed{l_3 = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2} Kl_d} = (2,80251708) Kl_d. \quad \boxed{l_1 = (1-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)K) l_d}$$

Quando:  $l_1 = l_2$  il solido risulta formato da 12 facce decagoni regolari e 20 facce triangolari equilateri, complessivamente 32 facce.

Posto  $l_1 = l_2$  si ha:  $1 - \kappa(\sqrt{15} + \sqrt{3}) = \kappa \left( \frac{\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{2} \right)$  ;

$$\kappa \left( \frac{\sqrt{15} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{3}}{2} \right) = 1 \quad ; \quad \kappa = \frac{2}{3\sqrt{15} + 5\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{135} + \sqrt{75}} =$$

$$\kappa = \frac{3\sqrt{15} - 5\sqrt{3}}{30} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{45} - 5)}{30} = \boxed{0,098623200 = \kappa}$$

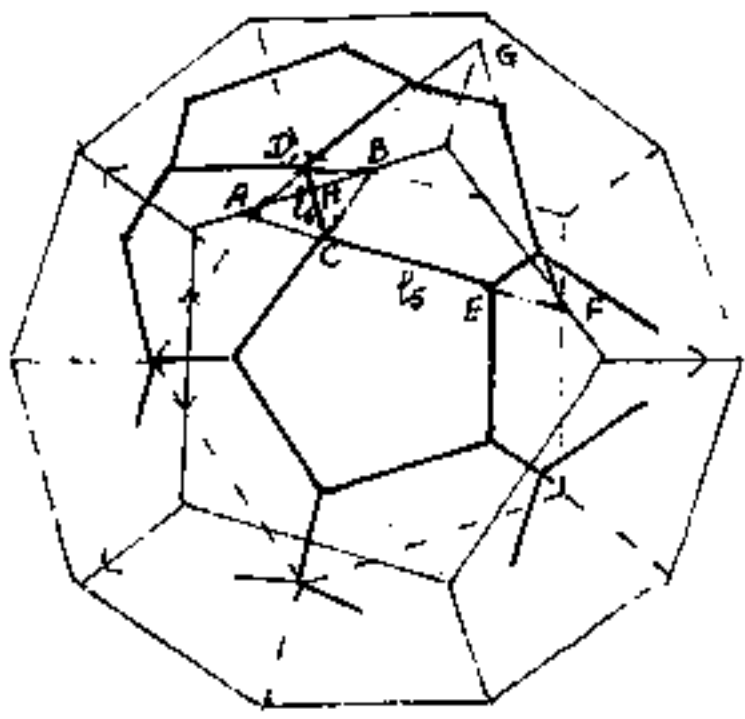
$$\underline{l_1 = l_2 = l_d / \sqrt{5} = l_d (0,44721360)}$$

Facendo crescere  $\kappa$  aumenta  $l_2$  e diminuisce  $l_1$ , i decagoni non sono piú regolari.

Quando  $l_1 = 0$ , cioè quando  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)} = 0,17841104$  le dodici facce decagonali diventano pentagoni regolari, le 20 facce triangolari equilateri restano triangolari equilateri, unico spigolo  $l_2$ , si ha così il DUODECEDRON ABSCISVS.

$$\boxed{l_2 = \left( \frac{\sqrt{5}+1}{4} \right) l_d = (0,80901698) l_d} \quad ; \quad (l_3 = l_d/2)$$

Se continuiamo ad aumentare  $\kappa$ , ( $\kappa > 0,17841104$ ) si ha l'intersezione dei piani di sezione fra loro, nascono nuovi segmenti ed  $l_1 < 0$ ; occorre ri-vedere le formule.



AFG = piano di sezione

$$\overline{AB} = -l_1 = 2l_3 - l_d = l_d (\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)\kappa - 1) ;$$

$$\overline{AB} = l_d (5,60503415 \kappa - 1)$$

Il quadrilatero ACBD non è piano, detto H il punto medio di AB abbiamo:

$$\overline{CH} = \frac{\overline{AB}}{2} \tan(36^\circ) = l_d \left[ K\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) - 1 \right] \left( \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{2} \right) = \overline{CH} = \frac{l_d}{2} \left[ K\sqrt{6}(5-\sqrt{5}) - \sqrt{5}-2\sqrt{5} \right]$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{2 \cos(36^\circ)} = l_d \left[ K\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) - 1 \right] \frac{1}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{l_d}{2} \left[ K\sqrt{6}(5+2\sqrt{5}) - 1 \right] (\sqrt{5}-1) = \overline{AC} = \frac{l_d}{2} \left[ 4K\sqrt{3} - \sqrt{5}+1 \right]$$

$$\overline{AC} = l_d \left[ K(3,46410162) - (0,61803399) \right]$$

Il triangolo DHC ha l'angolo in H =  $\widehat{DHC} = 116^\circ 33' 54''$ .

= (diedro del dodecaedro), per cui  $\overline{DC} = 2\overline{CH} \sin\left(\frac{1}{2}\widehat{H}\right) = l_6$

$$l_6 = \overline{DC} = 2 \left[ \frac{l_d}{2} \left[ K\sqrt{6}(5-\sqrt{5}) - \sqrt{5}-2\sqrt{5} \right] \right] \left( \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \right) = l_d \left[ 2K\sqrt{3} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right] =$$

$$l_6 = l_d \left[ (3,46410162)K - 0,618034 \right] = \overline{CD}$$

Indichiamo:  $\overline{CE} = l_5$  = (lato facce pentagonali de nuovo solido)  $\overline{CE} = l_2 - 2\overline{AC}$

Indichiamo con  $l_6 = \overline{CD}$  = (tre lati facce pentagonali).

Se  $l_6 \neq l_5$  gli esagoni sono irregolari.

Se  $l_6 = l_5$  gli esagoni sono regolari, e si ha il solido detto: DODECAEDRON ABSCISUS (Fullerene  $C_{60}$ )

$$\overline{CE} = l_5 = (l_2 - 2\overline{AC}) = l_d \left[ \left( \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2} \right) K - 2 \left( 2K\sqrt{3} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \right] =$$

$$l_5 = l_d \left[ \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) K + \left( \frac{3\sqrt{5}-2}{2} \right) \right] = \frac{l_d}{2} \left[ \sqrt{5}-2 - K\sqrt{3}(5-\sqrt{3}) \right]$$

$$l_5 = (1,23606798 - (2,393635347)K)$$

Per  $l_5 = l_6$ , si ha:  $\left( 2\sqrt{3}K - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = \left( \sqrt{5}-1 - \left( \frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) \sqrt{3}K \right)$  da cui:

$$\left( \frac{9-\sqrt{5}}{2} \right) \sqrt{3}K = \frac{3}{2}(\sqrt{5}-1); K = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{(9-\sqrt{5})} = \boxed{K = 0,316521889}$$

$$l_5 = l_6 = l_d \left[ 2 \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{9-\sqrt{5}} \sqrt{3} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right] = \frac{l_d}{2} \left[ \frac{12\sqrt{5}-12-10\sqrt{5}+14}{9-\sqrt{5}} \right]$$

$$l_5 = l_6 = l_d \left( \frac{\sqrt{5}+1}{9-\sqrt{5}} \right) = (0,478429996039) l_d = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CE}; \overline{AB} = (0,771159964473) l_d$$

Se continuiamo ad aumentare  $K$ , si arriva al valore massimo di  $l_2$ , quando  $l_2$  coincide con la diagonale della faccia pentagonale del dodecaedro.

In questo caso:  $l_2 = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2} K l_d = l_d \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ; cioè:  $K = \frac{(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{27}+\sqrt{15}}$

$$K = \frac{(\sqrt{5}+1)(3-\sqrt{5})\sqrt{3}}{12} = \frac{(2\sqrt{5}-2)\sqrt{3}}{12} = \boxed{K = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{6}} = 0,356822090$$

$$\underline{l_2 = (1,618033987) l_d.}$$

Continuando ad aumentare  $K$  oltre questo limite occorre rivedere le formule anche di  $l_2$ ; il solido che ne deriva ha, con l'aumentare di  $K$ , le facce pentagonali sempre più piccole, mentre le facce esagonali non sono più regolari essendo i tre lati  $l_6 > l_5$ .

Infine quando i piani di sezione passano per i centri-faccia del dodecaedro, cioè quando i segmenti che uniscono i centri-faccia (e che sono gli spigoli di un icosaedro);

$$g_1 = l_d \left( \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \right) = l_6; \text{ ed essendo il raggio circoscritto alla faccia pentagonale: } R_p = l_d \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{10}$$

$$\text{avremo: } (K l_d)^2 = R_p^2 - \frac{g_1^2}{3}; \quad K^2 l_d^2 = l_d^2 \left( \frac{5+\sqrt{5}}{10} - \frac{70+3\sqrt{5}}{300} \right);$$

$$K^2 = \frac{150+30\sqrt{5}-70-30\sqrt{5}}{300} = \frac{80}{300} = \frac{4}{15} \Rightarrow \boxed{K = \frac{2}{\sqrt{15}} = 0,516397780;}$$

$$l_5 = 0.$$

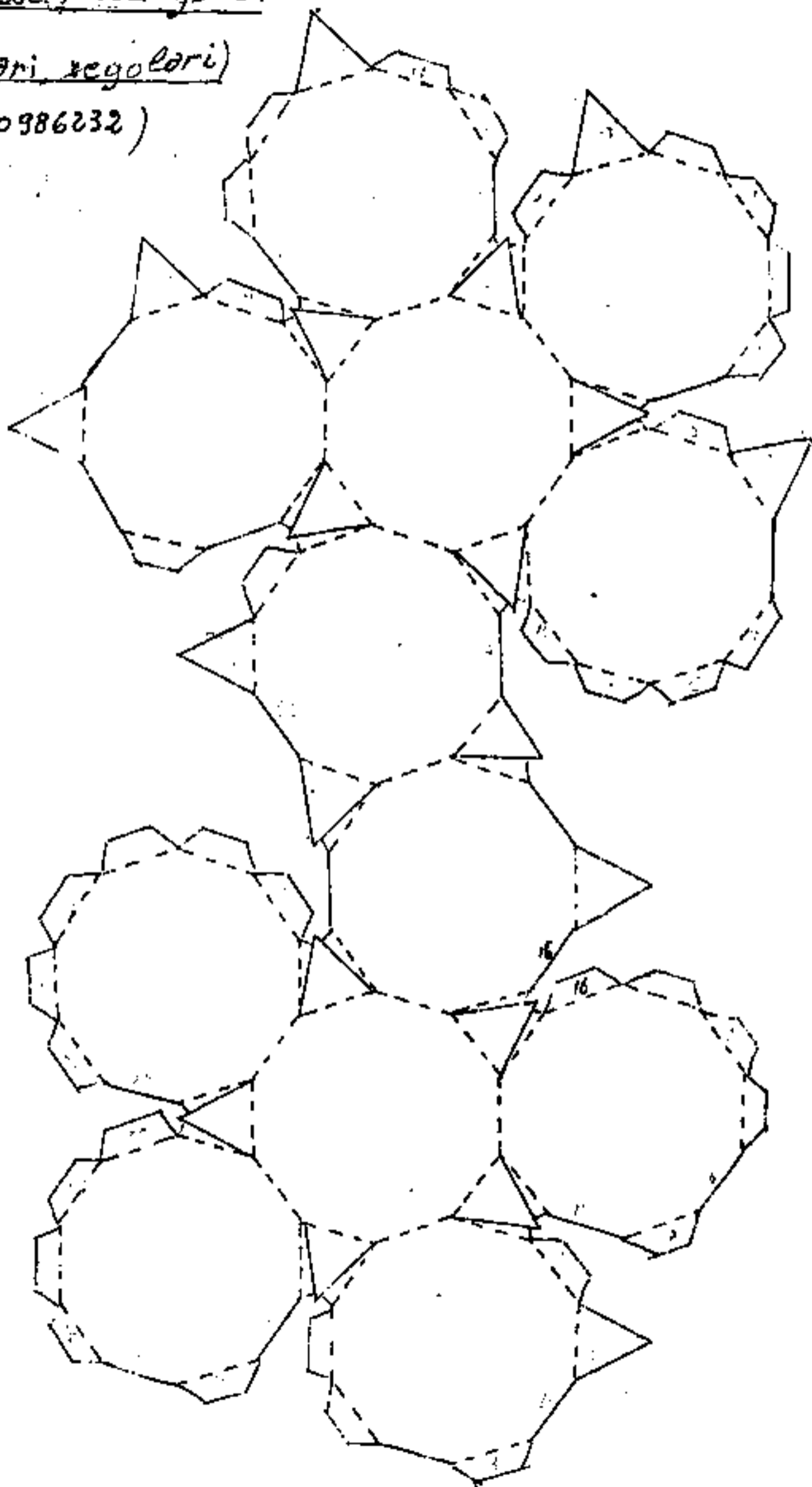
L'ulteriore aumento di  $K$  sfalda l'icosaedro ora costituito.



# Dodecaedro sezionato

(solido a facce: 12 decaagoni  
e triangolari regolari)

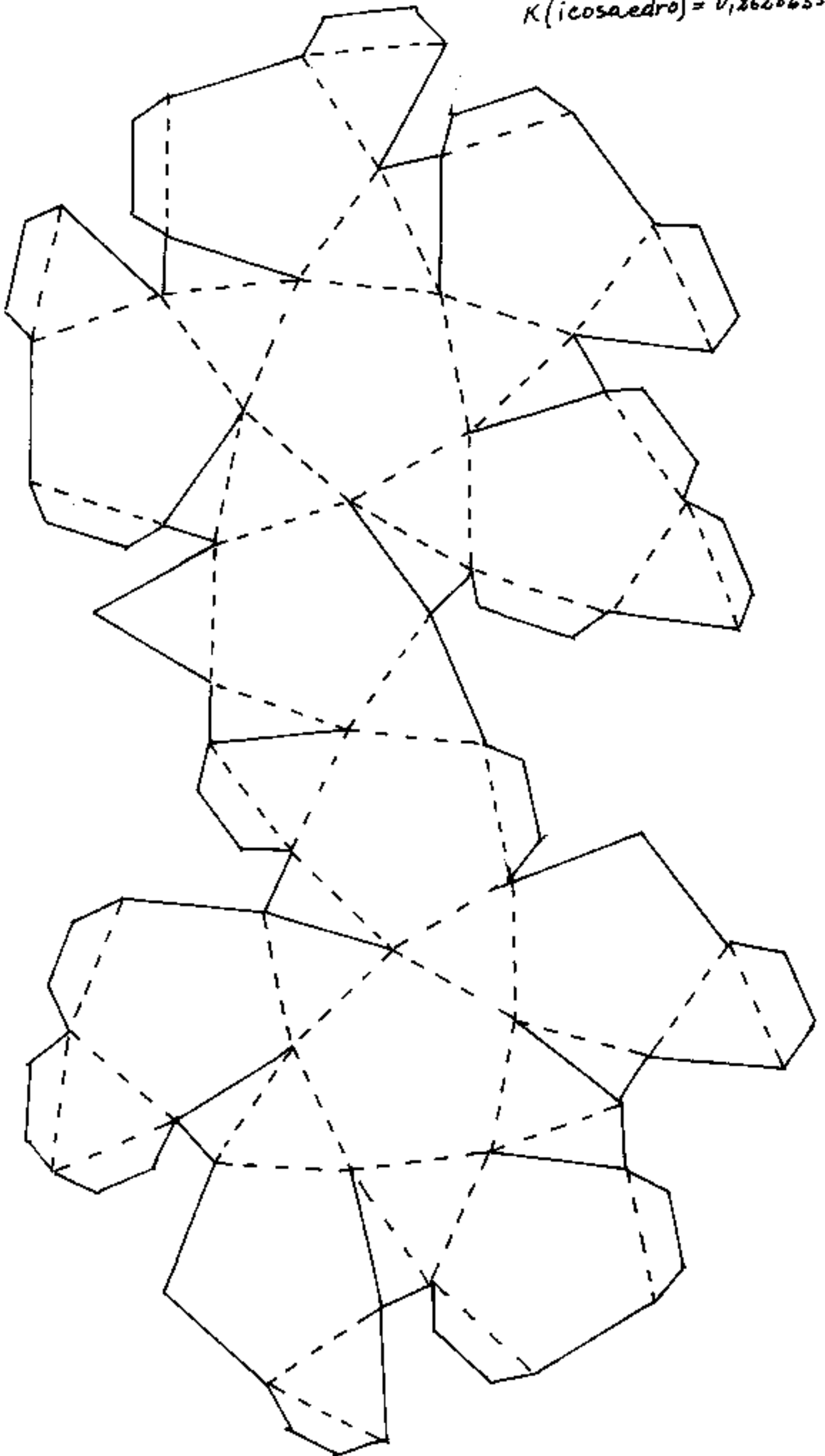
$$(K = 0,0986232)$$



DVOJEDRON ABSOLVUS

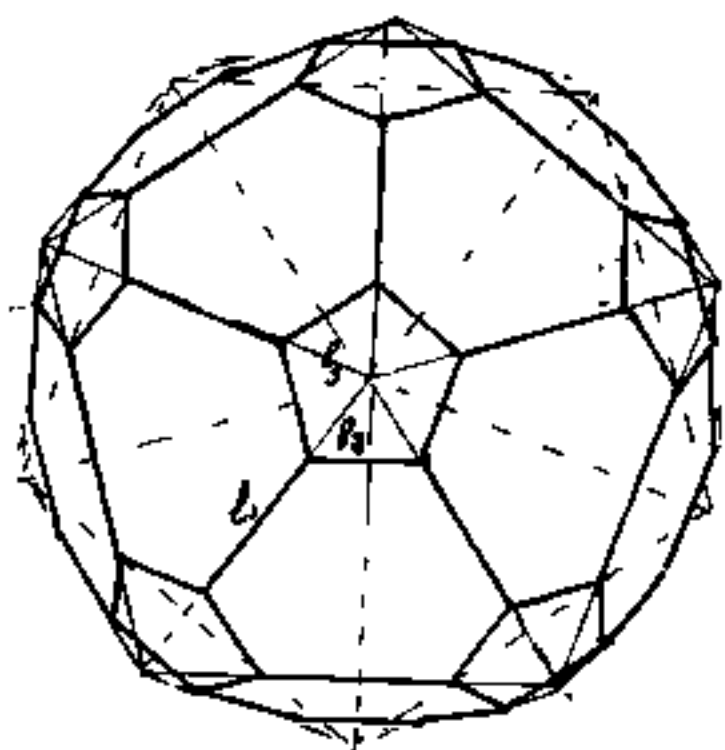
$$K(\text{dodecaedro}) = 0,17841104$$

$$K(\text{icosaedro}) = 0,26286556$$



## ICOSAEDRO SEZIONATO

Ricordiamo che il dodecaedro e l'icosaedro sono legati dal fatto che scambiando i vertici con le facce e viceversa, da un solido si passa all'altro; perciò,



le sezioni dell'icosaedro porteranno agli stessi solidi che si sono ottenuti dalle sezioni del dodecaedro, però in ordine inverso al crescere della distanza  $K$ , dei piani di sezione dai vertici del solido sezionato.

Sia  $l_i$  lo spigolo dell'icosaedro. Si noti che  $l_2$  tiene ora il posto di  $l_5$  nelle sezioni del dodecaedro

ed  $l_1 \equiv l_6$ ;  $l_1 = l_i - 2l_3$ ;  $l_3^2 - l_2^2 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) = K^2 l_i^2$ , ma:

$$l_3 = l_2 > K^2 l_i^2 = \frac{10-5-\sqrt{5}}{10} l_2^2 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right) l_2^2; \quad l_2 = l_1 K \sqrt{\frac{10}{5-\sqrt{5}}} =$$

$$\boxed{l_2 = l_i K \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = l_i K (1,902113033); \quad \boxed{l_1 = l_i \left(1 - 2K \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)}$$

Quando  $l_1 = l_2$  si ha il solido detto: ICOCEDRON

ABSCISSA :  $1 - 2K \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = K \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}; \quad 3K \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 1;$

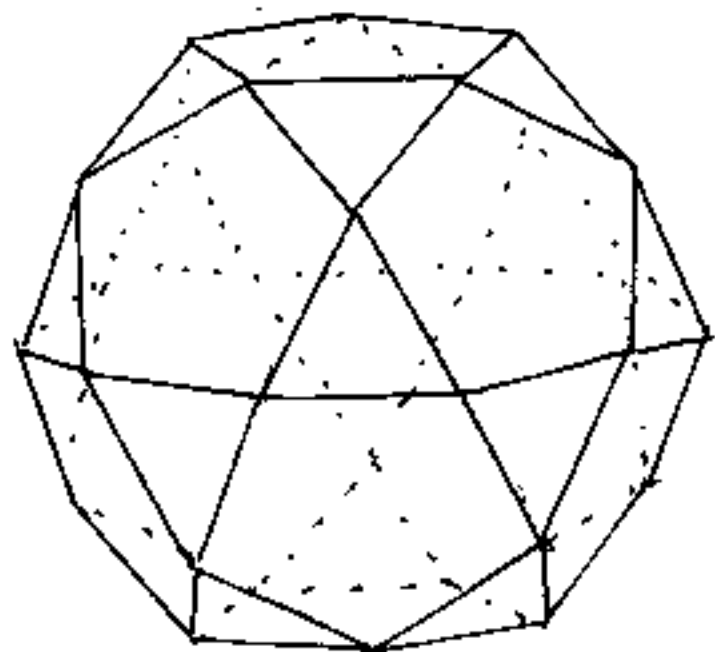
$$\boxed{K} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} = \boxed{\frac{1}{3} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}} = 0,175243704$$

$$l_2 = l_1 = l_i \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} \frac{(5+\sqrt{5})}{2}} = \frac{l_i}{3} \sqrt{\frac{20}{20}} \quad \boxed{l_2 = l_i/3}$$

Notare che le facce triangolari dell'icosaedro sezionando sui piani si hanno pentagoni regolari,

crescenti con  $K$ .

Aumentando  $K$  si arriva ad  $l_1 = 0$ ;  $l_2 = l_i/2$   
le facce originarie dell'icosaedro sono tornate  
triangoli equilateri di lato metà, in questo



caso il solido è detto:

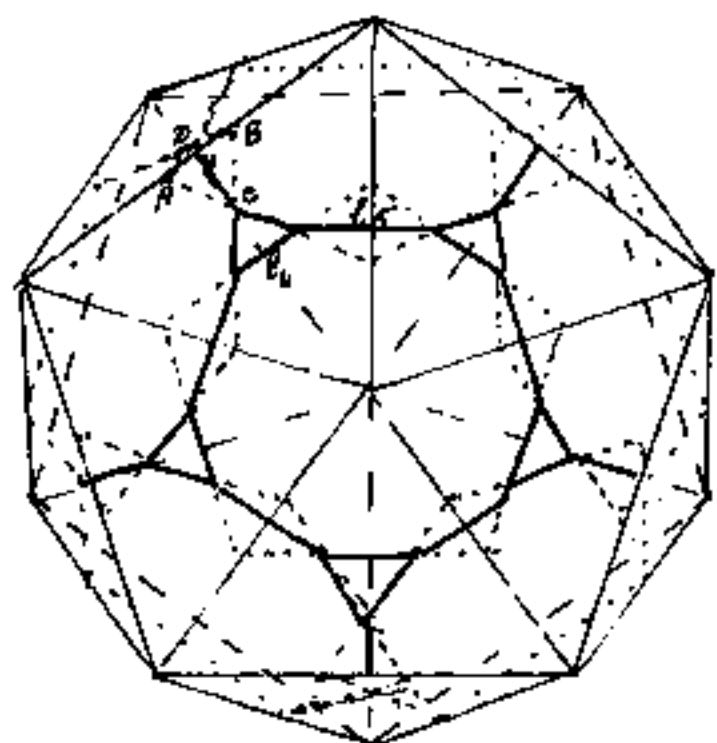
### DUODECEDRON ABSCISUS

ciò si ha quando:  $3K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 1$ ;

cioè:  $K = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} = \boxed{K = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{10} = 0,2628655}$ .

Continuando ad aumentare  
e  $K$  i piani di sezione si

intersecano fra loro ed occorre rivedere le formule;  
 $l_1 < 0$ ; allo scopo di evidenziare il solido si



le tracce dei piani di sezione. Si nota che il solido  
è formato da facce triangolari equilateri e da  
facce decagonali irregolari.

Si ha:  $\overline{AB} = -l_1 = (2K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - 1)l_i$ .

Detto  $l_4$  il lato delle facce triangolari, ed  $l_5$   
cinque lati delle facce decagonali;  $l_4 = l_2 - 2\overline{AC}$ ;  
 $\overline{AC} = \overline{AB}$ ; per cui  $l_4 = l_i \left( K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - 4K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + 2 \right) =$

$\boxed{l_4 = l_i \left( 2 - 3K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \right)}$ ;  $l_5 = \overline{DC}$ , ma il quadrilatero

ACBD non è piano, perciò, detto H il punto medio di  $\overline{AB}$ , l'angolo  $\widehat{DHC} = \widehat{H} = 138^\circ 11' 23'' =$  angolo diedro dell'icosaedro:  $\overline{DC} = l_5 = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{H}{2}\right) \cdot \overline{CH} = 2 \left(\frac{AC}{2} \sqrt{3} \operatorname{sen}\left(\frac{H}{2}\right)\right) =$

$$l_5 = l_i \left( 2\kappa \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - 1 \right) \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \right) = l_i \left( \kappa \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) =$$

$$l_5 = l_i \left( \kappa \sqrt{\frac{30+6\sqrt{5}+10\sqrt{5}+10}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right); \quad \boxed{l_5 = l_i \left( 2\kappa \sqrt{5+2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)}$$

Quando  $l_4 = l_5$  il decagono è regolare

perciò:  $2\kappa \sqrt{5+2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 2 - \kappa 3 \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow$

$$\left( 2\sqrt{5+2\sqrt{5}} + 3\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \right) \kappa = \left( 2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) = \left( \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\kappa = \frac{(5+\sqrt{5})/2}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}} + 3\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})/2}}{2\sqrt{\frac{2(5+2\sqrt{5})}{5+\sqrt{5}} + 3}} = \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})/2}}{(\sqrt{5}+4)} =$$

$$\boxed{\kappa = 0,3050180}$$

Quando  $l_4 = 0$  le facce diventano pentagonali e si ha il dodecaedro.

$$3\kappa \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 2 \Rightarrow \kappa = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \boxed{\kappa = 0,350487408}$$

$$l_5 = l_i \left( \frac{4}{3} \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{10}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) = l_i \left( \frac{4}{3} \sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{10}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$$

$$l_5 = l_i \left( \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \quad \boxed{l_5 = \frac{l_i}{6} (\sqrt{5}+1)}$$

$l_5 =$  distanza fra i centri faccia dell'icosaedro o spigolo del dodecaedro.

L'ulteriore aumento di  $\kappa$  provoca lo sfaldamento del dodecaedro.

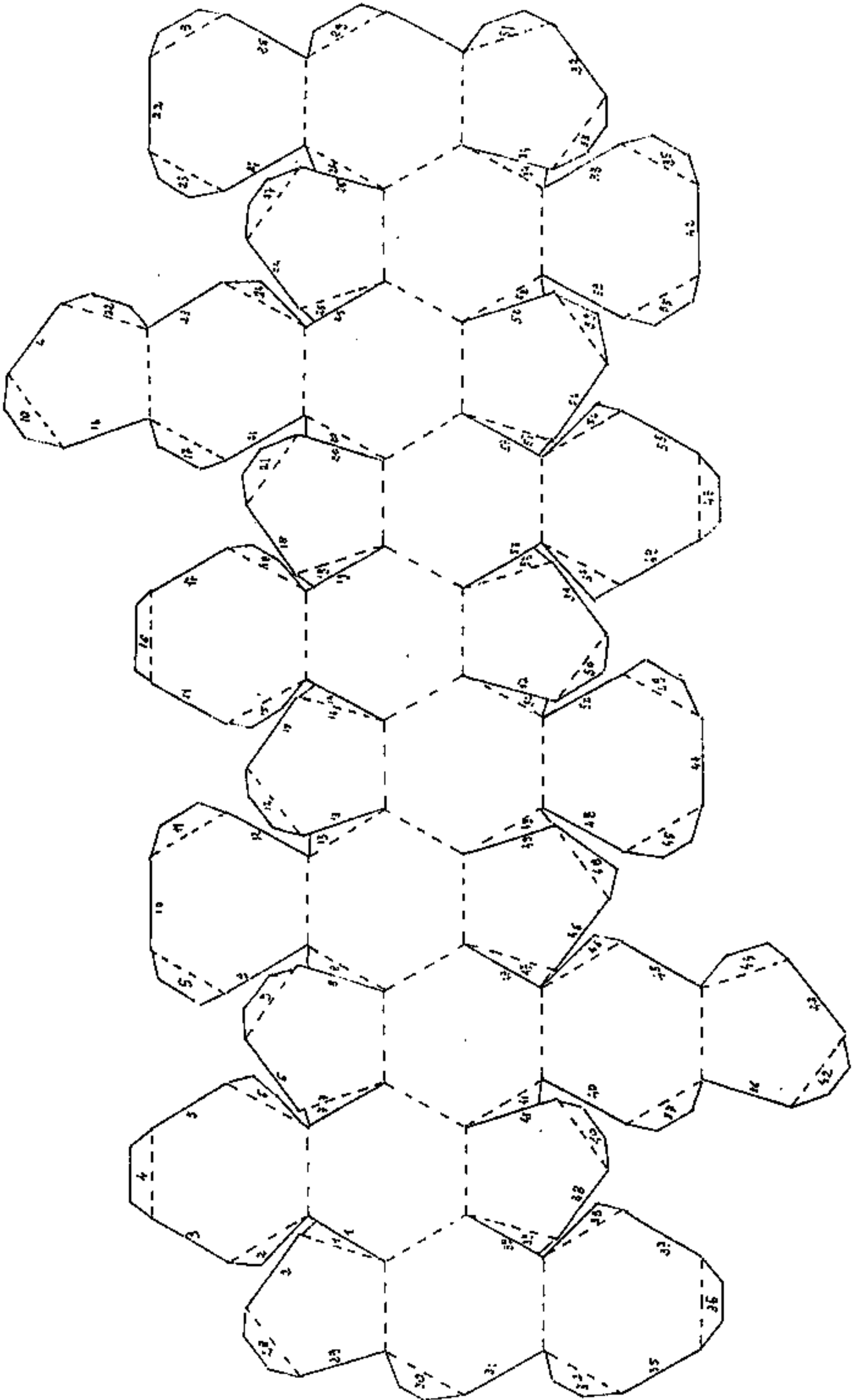
Schema di sviluppo di

(Fullerene  $C_{60}$ )

YCOCEDRON ABSCISUS

$K = 0,316521888676103$ . (dodicaedro)

$K = 0,175243704$  (icosaedro)



## La geometria naturale

### La legge della costanza degli angoli diedri.

Il senese Vannoccio Biringuccio (1480-1539) parlando della pirite esprimeva: "in forme di certe grane hor grosse et hor pichole, tutte cubiche a similitudine di dadi, over bisquadre tutte iustamente squadrate. Tal che artefice alcuno, con qual si vogli strumento non potrebbe tirar più iusti, né meglio li lor angoli". A queste asserzioni dei primi anni del 1500, fece seguito Nils Stensen (Nicolaus Stenone (1638-1686) olandese, italiano di adozione, medico del Granduca di Toscana, studiando l'ematite dell'Elba ed il quarzo, rilevò che anche in cristalli "distorti" valeva la legge che nei cristalli di uno stesso materiale, gli angoli fra le facce corrispondenti sono uguali. Poco dopo (1688) il medico e matematico bolognese Domenico Guglielmini (1655-1710), portando come esempi il salgemma, il salnitro, l'allume, il vetriolo, dice che: si possono presentare imperfetti ma "stabile nulladimeno, purché vi sia principio di cristallizzazione, è sempre l'inclinazione dei piani, e degli angoli, dalla quale ne' cristalli non assai perfetti, ben si conosce ove avrebbero a terminarsi, dipendendo essa necessariamente la determinazione della figura, e

si riconosce in ciò l'intenzione della natura  
e la propensione della materia, che s'indirizza  
per quanto può a disponersi nella sua figura  
geometrica → Considera anche la trasformazione  
in trapezi delle facce di ottaedri di allume ri-  
levando che mantengono costante la mutua inclinazione.  
Molti anni dopo, o meglio nel secolo succes-  
sivo al Guglielmini, Jean Baptiste Louis Rome' de  
L'Isle (1736-1790) esprime la legge per tutti i cristal-  
li (Legge della costanza degli angoli diedri) che  
in molti testi stranieri è detta legge di De l'Isle.

Partecipi dello stupore di Biringuccio per la  
perfezione dell'artefice natura (chissà con quali  
strumenti lavora?) del pensiero di Stenone che l'appar-  
ente irregolarità "distorsione" non invalida il principio,  
e del pensiero sottilissimo del Guglielmini che  
esprime: "l'intenzione della natura, .. la propensione  
della materia ..." verso una geometria.

Abbiamo matematicamente studiato le forme  
cristalline: come modelli geometrici trovando coef-  
ficienti che permettono di capire il passaggio da  
dodecaedri (regolari o no) a cubi ed a rombododecaedri.  
Da queste basi può partire uno studio più specifico. —





# Appendice

Si riporta una tavola di funzioni trigonometriche, espresse in forma di radicale, cioè esatte nella loro espressione e quindi calcolabili con qualsiasi n° di cifre decimali. Gli angoli cui si riferiscono sono solo approssimati ai secondi e trattasi di angoli di solidi. Se trattasi di solidi regolari accanto all'angolo si è posta una R, in modo che risalendo al prospetto riepilogativo nei solidi regolari (pag 165), sia possibile risalire al solido.

L'espressione radicale del valore della funzione trigonometrica consente spesso semplificazioni nei calcoli, non apprezzabili coi valori decimali.

Gli angoli sono posti su 4 colonne, in modo da non ripetere valori uguali.

Le funzioni trigonometriche si riferiscono alla prima colonna di angoli ( $\alpha$ ); per le altre basta ricordare che:

$$\left. \begin{cases} \text{sen}(180^\circ - \alpha) = (\text{sen}(\alpha)) \\ \text{cos}(180^\circ - \alpha) = (-\text{cos}(\alpha)) \\ \text{tang}(180^\circ - \alpha) = (-\text{tang}(\alpha)) \end{cases} \right\} \text{II}^\circ \text{ colonna}$$

$$\left. \begin{cases} \text{sen}(90^\circ - \alpha) = (\text{cos}(\alpha)) \\ \text{cos}(90^\circ - \alpha) = (-\text{sen}(\alpha)) \\ \text{tang}(90^\circ - \alpha) = (1/\text{tang}(\alpha)) \end{cases} \right\} \text{III}^\circ \text{ colonna}$$

$$\left. \begin{cases} \text{sen}(90^\circ + \alpha) = (\text{cos}(\alpha)) \\ \text{cos}(90^\circ + \alpha) = (-\text{sen}(\alpha)) \\ \text{tang}(90^\circ + \alpha) = (-1/\text{tang}(\alpha)) \end{cases} \right\} \text{IV}^\circ \text{ colonna}$$

TABELLA delle funzioni trigonometriche di angoli affinenti ai solidi, espresse in forma di radicali

N°	$\alpha$	$(180^\circ - \alpha)$	$(90^\circ - \alpha)$	$90^\circ + \alpha$	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{cos}(\alpha)$	$\text{tang}(\alpha)$
1	$4^\circ 54' 12''$	$175^\circ 05' 48''$	$85^\circ 05' 48''$	$94^\circ 54' 12''$	$(3-2\sqrt{2})/\sqrt{21-12\sqrt{2}}$	$2/\sqrt{31-12\sqrt{2}}$	$(3-2\sqrt{2})/2$
2	$5^\circ 46' 06''$	$174^\circ 13' 54''$	$84^\circ 13' 54''$	$95^\circ 46' 06''$	$(\sqrt{3/2}-1)/\sqrt{5}$	$(\sqrt{3/2}+1)/\sqrt{5}$	$(5-4\sqrt{3/2})$
3	$7^\circ 53' 48''$	$172^\circ 06' 12''$	$82^\circ 06' 12''$	$97^\circ 53' 48''$	$\sqrt{(9-5\sqrt{3})/8}$	$\sqrt{(9+5\sqrt{3})/8}$	$(9-\sqrt{5})/\sqrt{6}$
4	$8^\circ 25' 16''$	$171^\circ 34' 44''$	$81^\circ 34' 44''$	$98^\circ 25' 16''$	$\sqrt{(3-2\sqrt{2})/8}$	$\sqrt{(3+2\sqrt{2})/8}$	$1/\sqrt{23+16\sqrt{2}}$
5	$8^\circ 47' 38''$	$171^\circ 12' 22''$	$81^\circ 12' 22''$	$98^\circ 47' 38''$	$1/\sqrt{22+12\sqrt{3}}$	$\sqrt{3/(10-4\sqrt{3})}$	$1/(3+2\sqrt{3})$
6	$10^\circ 32' 43''$	$169^\circ 27' 17''$	$79^\circ 27' 17''$	$100^\circ 32' 43''$	$\sqrt{(2-\sqrt{3})/8}$	$\sqrt{(6+\sqrt{3})/8}$	$1/\sqrt{15+8\sqrt{3}}$
7	$10^\circ 43' 43''$	$169^\circ 16' 17''$	$79^\circ 16' 17''$	$100^\circ 43' 43''$	$(2-\sqrt{3})/\sqrt{9-4\sqrt{3}}$	$\sqrt{2/(9-4\sqrt{3})}$	$(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}$
8	$10^\circ 48' 44''$	$169^\circ 11' 16''$	$79^\circ 11' 16''$	$100^\circ 48' 44''$	$\sqrt{(5-2\sqrt{5})/15}$	$\sqrt{(10+2\sqrt{5})/15}$	$1/(\sqrt{5}+3)$
9	$11^\circ 18' 36''$	$168^\circ 41' 24''$	$78^\circ 41' 24''$	$101^\circ 18' 36''$	$1/\sqrt{26}$	$5/\sqrt{26}$	$1/5$
10	$11^\circ 39' 13''$	$168^\circ 27' 47''$	$78^\circ 27' 47''$	$101^\circ 39' 13''$	$1/5$	$2\sqrt{6}/5$	$1/2\sqrt{6}$
11	$12^\circ 12' 00''$	$167^\circ 48' 00''$	$77^\circ 48' 00''$	$102^\circ 12' 00''$	$(3-\sqrt{3})/6$	$\sqrt{(4+\sqrt{3})/6}$	$\sqrt{11+6\sqrt{3}}$
12	$13^\circ 45' 52''$	$167^\circ 14' 08''$	$77^\circ 14' 08''$	$102^\circ 45' 52''$	$1/\sqrt{12+6\sqrt{2}}$	$(3+\sqrt{2})/\sqrt{12+6\sqrt{2}}$	$1/(3+\sqrt{2})$
13	$12^\circ 56' 40''$	$167^\circ 03' 20''$	$77^\circ 03' 20''$	$102^\circ 56' 40''$	$(\sqrt{12}-1)/11$	$2\sqrt{27+\sqrt{3}}/11$	$1/2\sqrt{3+\sqrt{3}}$

TABELLA delle funzioni trigonometriche di angoli affinenti ai solidi, espresse in forma di radicali II<sup>o</sup>

N°	$\alpha$	$(180^\circ - \alpha)$	$(90^\circ - \alpha)$	$90^\circ + \alpha$	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{cos}(\alpha)$	$\text{tang}(\alpha)$
14	$12^\circ 58' 19''$	$167^\circ 01' 41''$	$77^\circ 01' 41''$	$102^\circ 58' 19''$	$\sqrt{\frac{59-24\sqrt{6}}{63-24\sqrt{6}}}$	$\frac{2}{\sqrt{63-24\sqrt{6}}}$	$\frac{2}{\sqrt{59-24\sqrt{6}}}$
15	$13^\circ 15' 46''$	$166^\circ 44' 14''$	$76^\circ 44' 14''$	$103^\circ 15' 46''$	$\frac{1}{\sqrt{19}}$	$\sqrt{\frac{18}{19}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$
16	$14^\circ 02' 10''$	$165^\circ 57' 50''$	$75^\circ 57' 50''$	$104^\circ 02' 10''$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	$\frac{4}{\sqrt{17}}$	$\frac{1}{4}$
17	$14^\circ 28' 39''$	$165^\circ 31' 21''$	$75^\circ 31' 21''$	$104^\circ 28' 39''$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{15}}$
18	$15^\circ$	$165^\circ$	$75^\circ$	$105^\circ$	$\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$	$\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$	$(2-\sqrt{3})$
19	$16^\circ 49' 35''$	$163^\circ 10' 25''$	$73^\circ 10' 25''$	$106^\circ 49' 35''$	$\frac{11}{38}$	$\frac{31\sqrt{3}}{38}$	$\frac{21-\sqrt{3}}{11}$
20	$17^\circ 35' 17''$	$162^\circ 24' 43''$	$72^\circ 24' 43''$	$107^\circ 35' 17''$	$\frac{(4\sqrt{3}-3)}{13}$	$\frac{(2+6\sqrt{3})}{13}$	$\frac{(3-\sqrt{3})}{4}$
21	$18^\circ$	$162^\circ$	$72^\circ$	$108^\circ$	$\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}$	$\frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{8}$	$\frac{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}{5}$
22	$18^\circ 26' 06''$	$161^\circ 33' 54''$	$71^\circ 33' 54''$	$108^\circ 26' 06''$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{3}$
23	$19^\circ 28' 16''$	$160^\circ 31' 44''$	$70^\circ 31' 44''$	$109^\circ 28' 16''$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
24	$20^\circ 54' 18''$	$159^\circ 05' 42''$	$69^\circ 05' 42''$	$110^\circ 54' 18''$	$\frac{(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{3}}$	$\frac{(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{3}}$	$\frac{(3-\sqrt{5})}{2}$
25	$20^\circ 56' 28''$	$159^\circ 03' 32''$	$69^\circ 03' 32''$	$110^\circ 56' 28''$	$\frac{\sqrt{(5-2\sqrt{2})}}{17}$	$\frac{2}{\sqrt{6-\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
26	$21^\circ 14' 45''$	$158^\circ 45' 15''$	$68^\circ 45' 15''$	$111^\circ 14' 45''$	$\frac{(\sqrt{6}-1)}{4}$	$\frac{\sqrt{9+2\sqrt{6}}}{4}$	$\frac{(\sqrt{6}-1)}{\sqrt{9+2\sqrt{6}}}$

TABELLA delle funzioni trigonometriche di angoli attinenti ai solidi, espresse in forma di radicali

N°	$\alpha$	$(180^\circ - \alpha)$	$(90^\circ - \alpha)$	$90^\circ + \alpha$	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{cos}(\alpha)$	$\text{tang}(\alpha)$
27	$22^\circ 17' 33''$	$157^\circ 42' 27''$	$67^\circ 42' 27''$	$112^\circ 17' 33''$	$\sqrt{(18-4\sqrt{6})/57}$	$5/\sqrt{39-4\sqrt{6}}$	$(2\sqrt{3}-\sqrt{2})/5$
28	$22^\circ 30' 00''$	$157^\circ 30' 00''$	$67^\circ 30' 00''$	$112^\circ 30' 00''$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$	$(\sqrt{2}-1)$
29	$22^\circ 53' 07''$	$157^\circ 06' 53''$	$67^\circ 06' 53''$	$112^\circ 53' 07''$	$7/18$	$5\sqrt{11}/18$	$7/5\sqrt{11}$
30	$23^\circ 04' 36''$	$156^\circ 55' 24''$	$66^\circ 55' 24''$	$113^\circ 04' 36''$	$4\sqrt{6}/25$	$23/25$	$4\sqrt{6}/23$
31	$24^\circ 02' 32''$	$155^\circ 57' 28''$	$65^\circ 57' 28''$	$114^\circ 02' 32''$	$11/27$	$4\sqrt{38}/27$	$11/4\sqrt{38}$
32	$24^\circ 05' 41''$	$155^\circ 54' 19''$	$65^\circ 54' 19''$	$114^\circ 05' 41''$	$1/\sqrt{6}$	$\sqrt{5}/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{5}$
33	$24^\circ 22' 28''$	$155^\circ 37' 32''$	$65^\circ 37' 32''$	$114^\circ 22' 28''$	$(\sqrt{8}-2)/\sqrt{31-12\sqrt{2}}$	$(\sqrt{8}-1)/\sqrt{31-12\sqrt{2}}$	$(\sqrt{8}-2)/(\sqrt{8}-1)$
34	$24^\circ 41' 18''$	$155^\circ 18' 42''$	$65^\circ 18' 42''$	$114^\circ 41' 18''$	$\sqrt{(4-\sqrt{3})/13}$	$\sqrt{(9+\sqrt{3})/13}$	$\sqrt{3+\sqrt{3}}$
35	$25^\circ 14' 22''$	$154^\circ 45' 38''$	$64^\circ 45' 38''$	$115^\circ 14' 22''$	$\sqrt{2/11}$	$3/\sqrt{11}$	$\sqrt{2}/3$
36	$25^\circ 15' 47''$	$154^\circ 44' 13''$	$64^\circ 44' 13''$	$115^\circ 15' 47''$	$(9+4\sqrt{2})/4(10-\sqrt{2})$	$7\sqrt{31-8\sqrt{2}}/4(10-\sqrt{2})$	$(9+4\sqrt{2})/7\sqrt{31-8\sqrt{2}}$
37	$26^\circ 31' 31''$	$153^\circ 28' 29''$	$63^\circ 28' 29''$	$116^\circ 31' 31''$	$6\sqrt{2}/19$	$17/19$	$6\sqrt{2}/17$
38	$26^\circ 33' 54''$	$153^\circ 26' 06''$	$63^\circ 26' 06''$	$116^\circ 33' 54''$	$1/\sqrt{5}$	$2/\sqrt{5}$	$1/2$
39	$27^\circ$	$153^\circ$	$63^\circ$	$117^\circ$	$1/4\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$	$1/\sqrt{4(3-\sqrt{5})-2\sqrt{50-20\sqrt{5}}}$	$\sqrt{5-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$

TABELLA delle funzioni trigonometriche di angoli attinenti ai solidi, espresse in forma di radicali

N°	$\alpha$	$(180^\circ - \alpha)$	$(90^\circ - \alpha)$	$90^\circ + \alpha$	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{cos}(\alpha)$	$\text{tang}(\alpha)$
40	$27^\circ 22' 04''$	$152^\circ 37' 56''$	$62^\circ 37' 56''$	$117^\circ 22' 04''$	$\sqrt{(3-\sqrt{3})/6}$	$\sqrt{(3+\sqrt{3})/6}$	$\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$
41	$27^\circ 41' 01''$	$152^\circ 18' 59''$	$62^\circ 18' 59''$	$117^\circ 41' 01''$	$\sqrt{(9-2\sqrt{6})/19}$	$\sqrt{(10+2\sqrt{6})/19}$	$\sqrt{(3-\sqrt{6})/2}$
42	$27^\circ 43' 56''$	$152^\circ 16' 04''$	$62^\circ 16' 04''$	$117^\circ 43' 56''$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{15-\sqrt{5}}}$	$\sqrt{\frac{10}{15-\sqrt{5}}}$	$\sqrt{(5-\sqrt{5})/10}$
43	$30^\circ$	$150^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
44	$30^\circ 21' 40''$	$149^\circ 38' 20''$	$59^\circ 38' 20''$	$121^\circ 21' 40''$	$\frac{(2-\sqrt{2})}{\sqrt{17-4\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}$	$(2-\sqrt{2})$
45	$31^\circ 43' 03''_R$	$148^\circ 16' 57''$	$58^\circ 16' 57''_R$	$121^\circ 43' 03''$	$\sqrt{(5-\sqrt{5})/10}$	$\sqrt{(5+\sqrt{5})/10}$	$(\sqrt{5}-1)/2$
46	$32^\circ 12' 15''$	$147^\circ 47' 45''$	$57^\circ 47' 45''$	$122^\circ 12' 15''$	$4\sqrt{3}/13$	$11/13$	$4\sqrt{3}/11$
47	$32^\circ 22' 06''$	$147^\circ 37' 54''$	$57^\circ 37' 54''$	$122^\circ 22' 06''$	$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{31-8\sqrt{2}}{30-2\sqrt{2}}\right)}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{20-2\sqrt{2}}}\right)$	$(\sqrt{31-8\sqrt{2}})/7$
48	$32^\circ 26' 35''$	$147^\circ 33' 25''$	$57^\circ 33' 25''$	$122^\circ 26' 35''$	$\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{21-8\sqrt{6}}}$	$\frac{1}{\sqrt{21-8\sqrt{6}}}$	$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
49	$32^\circ 58' 44''$	$147^\circ 01' 16''$	$57^\circ 01' 16''$	$122^\circ 58' 44''$	$2\sqrt{6}/9$	$\sqrt{19/37}$	$\sqrt{8/19}$
50	$33^\circ 33' 26''$	$146^\circ 26' 34''$	$56^\circ 26' 34''$	$123^\circ 33' 26''$	$(\sqrt{11})/6$	$5/6$	$(\sqrt{11})/5$
51	$33^\circ 41' 24''$	$146^\circ 18' 36''$	$56^\circ 18' 36''$	$123^\circ 41' 24''$	$2/\sqrt{13}$	$3/\sqrt{13}$	$2/3$
52	$34^\circ 22' 37''$	$145^\circ 37' 23''$	$55^\circ 37' 23''$	$124^\circ 22' 37''$	$\sqrt{(5-\sqrt{6})/8}$	$\sqrt{(3+\sqrt{6})/8}$	$\sqrt{(21-8\sqrt{6})/3}$

TABELLA delle funzioni trigonometriche di angoli affinenti ai solidi, espresse in forma di radicali

N°	$\alpha$	$(180^\circ - \alpha)$	$(90^\circ - \alpha)$	$90^\circ + \alpha$	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{cos}(\alpha)$	$\text{tang}(\alpha)$
53	$35^\circ 15' 52''_R$	$144^\circ 44' 08''$	$54^\circ 44' 08''_R$	$125^\circ 15' 52''_R$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{2/3}$	$1/\sqrt{2}$
54	$36^\circ_R$	$144^\circ$	$54^\circ$	$126^\circ$	$\sqrt{(5-\sqrt{5})/8}$	$(\sqrt{5}+1)/4$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
55	$36^\circ 12' 22''$	$143^\circ 47' 38''$	$53^\circ 47' 38''$	$126^\circ 12' 22''$	$(\sqrt{3}-1)/\sqrt{5-2\sqrt{3}}$	$1/\sqrt{5-2\sqrt{3}}$	$(\sqrt{3}-1)$
56	$36^\circ 35' 12''$	$143^\circ 24' 48''$	$53^\circ 24' 48''$	$126^\circ 35' 12''$	$\sqrt{27/16}$	$7/2\sqrt{19}$	$3\sqrt{3}/7$
57	$36^\circ 52' 12''$	$143^\circ 07' 48''$	$53^\circ 07' 48''$	$126^\circ 52' 12''$	$3/5$	$4/5$	$3/4$
58	$37^\circ 22' 38''_R$	$142^\circ 37' 22''_R$	$52^\circ 37' 22''$	$127^\circ 22' 38''_R$	$\sqrt{(10-2\sqrt{5})/15}$	$\sqrt{(5+2\sqrt{5})/15}$	$(3-\sqrt{5})$
59	$38^\circ 31' 40''$	$141^\circ 28' 20''$	$51^\circ 28' 20''$	$128^\circ 31' 40''$	$\sqrt{2/(5-\sqrt{3})}$	$\sqrt{(6-\sqrt{3})/11}$	$\sqrt{(5+\sqrt{3})/(6-\sqrt{3})}$
60	$38^\circ 54' 00''$	$141^\circ 06' 00''$	$51^\circ 06' 00''$	$128^\circ 56' 00''$	$4\sqrt{2}/9$	$7/9$	$4\sqrt{2}/7$
61	$39^\circ 13' 53''$	$140^\circ 46' 07''$	$50^\circ 46' 07''$	$129^\circ 13' 53''$	$\sqrt{2/5}$	$\sqrt{3/5}$	$\sqrt{2/3}$
62	$39^\circ 31' 16''$	$140^\circ 28' 44''$	$50^\circ 28' 44''$	$129^\circ 31' 16''$	$7/11$	$(6/11)\sqrt{2}$	$(7\sqrt{2})/12$
63	$39^\circ 43' 38''$	$140^\circ 16' 22''$	$50^\circ 16' 22''$	$129^\circ 43' 38''$	$\sqrt{(5-\sqrt{3})/8}$	$\sqrt{(5+\sqrt{3})/8}$	$\sqrt{(9-4\sqrt{3})/3}$
64	$40^\circ 14' 11''$	$139^\circ 45' 49''$	$49^\circ 45' 49''$	$130^\circ 14' 11''$	$11/\sqrt{290}$	$13/\sqrt{290}$	$11/13$
65	$40^\circ 37' 24''$	$139^\circ 22' 36''$	$49^\circ 22' 36''$	$130^\circ 37' 24''$	$1/(\sqrt{5-2\sqrt{3}})$	$(2/13)\sqrt{33-5\sqrt{3}}$	$1/(2\sqrt{9-5\sqrt{3}})$

